Thời gian anh Tài chèo từ Q đến R là: $\frac{4\varphi}{6}=\frac{2\varphi}{3}$ (giờ).

Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ P đến R là: $t=\frac{4\cos\varphi}{3}+\frac{2\varphi}{3}\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $t(\varphi)=\frac{4\cos\varphi}{3}+\frac{2\varphi}{3}$ với $\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$t'(\varphi)=\frac{1}{3}(-4\sin\varphi+2),\ \varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$t'(\varphi)=0,\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\sin\varphi=\frac{1}{2},\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Bảng biến thiên:

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$t'(\varphi)$		$+$	0	$-$	
$t(\varphi)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$t\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$

Vậy thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là $t\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{9}\approx 1,5$ (giờ) hay 90 phút.

Bài 7. Xét hàm số: $f(x)=TR-TC=-2x^2+1312x-\left(x^3-77x^2+1000x+40000\right)$.

$f(x)=-x^3+75x^2+312x-40000$

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+150x+312=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=52\,(N)\\x=-2\,(L)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		52		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4000	$\nearrow$	74416	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD}=74416$ tại $x=52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x=52$.

Bài 8. Xét hàm số $y=C(x)=\frac{30x}{x^2+2}$ trên khoảng $x\in(0;6)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-30x^2 + 60}{\left(x^2 + 2\right)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-30x^2 + 60}{\left(x^2 + 2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$ do $x \in (0;6) \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

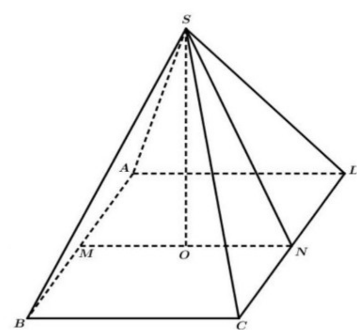
Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{2}$		6
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{90}{19}$

Từ bảng biến thiên suy ra:

Nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}(\mathrm{mg/L}) \approx 10,6(\mathrm{mg/L})$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Bài 9. Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là $x(\mathrm{m})$.



Độ dài đường chéo tấm bạt bằng $20\sqrt{2}(\mathrm{m})$.

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S \cdot ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung diểm AB, CD.

Khi đó $MN = x(\mathrm{m}), SN = \dfrac{20\sqrt{2} - x}{2}$ (m) với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}SO = \dfrac{1}{6}x^2\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}$.

Ta có $V' = \dfrac{20x\left(80 - 5\sqrt{2}x\right)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$ với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Xét bảng biến thiên:

x	0		$8\sqrt{2}$		$10\sqrt{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy khi $x = 8\sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp lớn nhất $V = \dfrac{256\sqrt{10}}{3}\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Diện tích phần bị cắt của tấm bạt:

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4\cdot S_{\Delta SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2}\cdot 8\sqrt{2} = 80\left(\mathrm{m}^2\right)$$

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3 \ (0 \le t \le 30)$.

Ta có: $N'(t) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 20 \end{array}\right.$

t	0		20		30
N'		$+$	0	$-$	
N		$\nearrow$	5000	$\searrow$	

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Bài 2. Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x($ ĐK: $x > -20)$

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$$f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

Bảng biến thiên:

x	-20		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-20)$	$\nearrow$	$f(-6)$	$\searrow$	$-\infty$

$\max\limits_{(-20;+\infty)} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Bài 3. Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $\mathrm{x}(\mathrm{cm}, x > 0$ và chiều cao là $\mathrm{h}(\mathrm{cm}, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108\ \mathrm{cm}^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \dfrac{108 - x^2}{4x}(\mathrm{cm})$

(điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \dfrac{108 - x^2}{4x} = \dfrac{108x - x^3}{4}\left(\text{cm}^3\right)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\dfrac{x^3}{4} + 27x \left(0 < x < \sqrt{108}\right)$

Ta có: $V' = \dfrac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0		6		$\sqrt{108}$
V'		+	0	−	
V	0	↗	108	↘	0

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6$ cm

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là: $\dfrac{108 - 6^2}{4.6} = 3(\text{cm})$.

Bài 4. Gọi x, y lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có: thể tích bể cá $V = x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $4xy + x^2 = 6 \Leftrightarrow y = \dfrac{6 - x^2}{4x}$ (điều kiện $y > 0 \Leftrightarrow 6 - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{6}$)

Khi đó: $V = x^2 \cdot \dfrac{6 - x^2}{4x} = \dfrac{6x - x^3}{4} \Rightarrow V' = \dfrac{6 - 3x^2}{4}$

$V' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$
V'		+	0	−	
V	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

Suy ra $V_{\max} = \sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}; y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy bể cá có kích thước là cạnh đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì dung tích là lớn nhất.

Bài 5. Gọi chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của thùng đựng gạo lần lượt là $x, y(\text{m})$;

$(x > 0, y > 0)$. Ta có thể tích của thùng là: $V = x^2 y = 10 \Rightarrow y = \dfrac{10}{x^2}$.

Diện tích đáy hình hộp là x^2 và diện tích xung quanh là $4xy$ nên chi phí để làm thùng tôn là

$90000x^2 + 160000xy = 90000x^2 + \dfrac{1600000}{x} = f(x)12000\sqrt[3]{900}$

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $f'(x) = 180000x - \dfrac{1600000}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$	$120000\sqrt[3]{900}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng $120000\sqrt[3]{900}$ đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng $\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$.

Bài 6. Xét hàm số $c(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}, (t > 0)$.

$c'(t) = \dfrac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}$.

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Sau 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Bài 7. Ta có: $h = x(\text{ cm})$ là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $40 - 2x(\text{ cm})$.

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (40-2x)^2(\text{ cm}^2)$.

Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;20)$.

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x\cdot(40-2x)^2$.

Xét hàm số: $y = x.(40-2x)^2$ trên khoảng $(0;20)$

Ta có: $y' = (40-2x)^2 - 4x(40-2x) = (40-2x)(40-6x)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \ (L) \\ x = \dfrac{20}{3} \ (N) \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{20}{3}$		20
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{128000}{27}$	$\searrow$	0

Vậy $x = \dfrac{20}{3}$ thì thể tích khối hộp là lớn nhất.

Bài 8. Ta có $V = kRr^2 - kr^3$

$$V' = 2kRr - 3kr^2, V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ r = \dfrac{2R}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

r	0		$\frac{2R}{3}$		R
$v'(r)$		$+$	0	$-$	
$v(r)$	0	$\nearrow$	$\frac{4kR^3}{27}$	$\searrow$	0

Từ BBT ta có bán kính khí quản khi ho bằng $\dfrac{2R}{3}$ thì tốc độ của không khí đi váo khí quản là lớn nhất.

Bài 9. Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t$ với $t \in [0;10]$.

$$v'(t) = -6t + 36$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$v(0) = 0$$

$$v(10) = 60$$

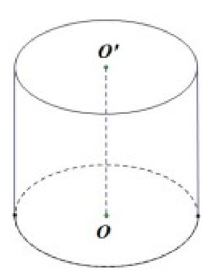
$$v(6) = 108$$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $108\,(\mathrm{m/s})$.

Bài 10.

Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = l = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa:



$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2d} = 2\pi rl$$

$$= 2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\frac{2V}{r}+2\pi r^2=\frac{V}{r}+\frac{V}{r}+2\pi r^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}\cdot 2\pi r^2}=6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{V}{r}=2\pi r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng $6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ khi $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bài 11. Ta có: $4a+2\pi r=60 \Leftrightarrow \pi r=30-2a$

Điều kiện: $0<4a<60 \Leftrightarrow 0<a<15$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S=a^2+r^2\pi=a^2+\frac{(30-2a)^2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[(\pi+4)a^2-120a+900\right]$$

Xét $f(a)=(\pi+4)a^2-120a+900$ với $a\in(0,15)$

$f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=\frac{120}{2(\pi+4)}=\frac{60}{\pi+4}\in(0,15)$.

S đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=\frac{60}{\pi+4}\Rightarrow \pi r=30-2\cdot\frac{60}{\pi+4}=\frac{30\pi}{\pi+4}\Rightarrow r=\frac{30}{\pi+4}$

Khi đó: $\frac{a}{r}=\frac{60}{\pi+4}:\frac{30}{\pi+4}=2$.

Kết luận: $\frac{a}{r}=2dm$.

Bài 12. Ta có: $h'(t)=-t^2+10t+24$

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow -t^2+10t+24=0 \Leftrightarrow t=12$$

Bảng biến thiên:

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	h_{max}	$\searrow$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Khi đó 20 giờ nước đầy. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Bài 13. Gọi $x, y(m)(x>0, y>0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

Khi đó theo đề ta suy ra: $0,6xy=0,096 \Leftrightarrow y=\dfrac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x)=2\cdot 0,6\left(x+\frac{0,16}{x}\right)\cdot 70000+100000\cdot x\cdot\frac{0,16}{x}\Leftrightarrow f(x)=84000\left(x+\frac{0,16}{x}\right)+16000$$

Ta có: $f'(x)=84000\left(1-\dfrac{0,16}{x^2}\right)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=0,4$

Bảng biến thiên:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4)=83200\text{VN}$.

Bài 14. Gọi x (lít) $(0<x<10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10-x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra: $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x}, x\in(0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{(10-x)^2}$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{(10-x)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-20\notin(0;10)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x}, x\in(0;10)$

x	0		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta có ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Bài 15. Xét hàm số $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\ (t>0)$

Ta có $c'(t)=\dfrac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$

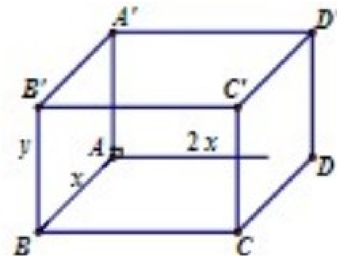
$c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\ (L)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Vậy khi $t=1$ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân là cao nhất.

Bài 16.



Gọi x và y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có: Thể tích của bể cá là $V=2x^2y$.

Theo đề bài ta có:

$$2xy+2.2xy+2x^2=5 \Leftrightarrow 6xy+2x^2=5 \Leftrightarrow y=\frac{5-2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V=2x^2\cdot\frac{5-2x^2}{6x}=\frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V'=\frac{5-6x^2}{3}$$

$$\Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

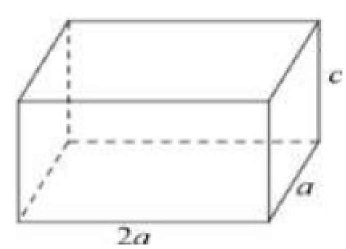
$$\Rightarrow V'=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

Vậy thể tích lớn nhất của bể cá là $\frac{5\sqrt{30}}{27}\approx 1,01\ \text{m}^3$

Bài 17. Theo bài ra ta có chi phí thuê nhân công thấp nhất thì bể phải xây dung có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.



Gọi ba kích thước của bể là $a,2a,c$ với $(a,c>0)$.

Diện tích các mặt cần xây là $S=2a^2+4ac+2ac=2a^2+6ac$.

Thể tích bể là $V=a\cdot 2a\cdot c=2a^2c=288 \Rightarrow c=\frac{144}{a^2}$

Khi đó: $S=2a^2+6a\cdot\frac{144}{a^2}=2a^2+\frac{864}{a}=2a^2+\frac{432}{a}+\frac{432}{a}\geq 3\sqrt[3]{2a^2\cdot\frac{432}{a}\cdot\frac{432}{a}}=216$.

Vậy chi phí thấp nhất là $216.500000=108$ triệu đồng.

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Bài 1. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{50x}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{50}{1+\frac{4}{x}}=50$

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Bài 2.

a) Sau 20 phút, số gam muối trong bể là: $20\times30\times20=12000$ (gam).

Sau 20 phút, số lít nước trong bể là: $1000+30\times20=1600$ (lít).

Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể là: $\frac{12000}{1600}=\frac{15}{2}\approx7,5$ (gam/lít).

b) Sau t phút, số gam muối trong bể là: $20\times30t=600t$ (gam).

Sau t phút, số lít nước trong bể là: $1000+30t$ (lít).

Sau t phút, nồng độ muối trong bể là: $f(t)=\frac{600t}{1000+30t}=\frac{60t}{100+3t}$ (gam/lít).

c) Xét hàm số $f(t)=\frac{60t}{100+3t}$ Với t có đơn vị là phút và $t\geq0$.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{60t}{100+3t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{60}{\frac{100}{t}+3}=20$.

Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=20$.

Vậy nồng độ muối trong bể luôn nhỏ hơn và ngày càng gần 20 (gam/lít).

Bài 3. Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\bar{F}(x)=\frac{60000+250x}{x}$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{60000+250x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{60000}{x}+250\right)=250$

Vậy chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm là không quá 250000 đồng.

Bài 4. Ta có: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{26t+10}{t+5}=26$.

Vậy số dân tối đa của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.