

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN
NĂM HỌC 2008-2009
KHÓA NGÀY 18-06-2008
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian giao đề)**

Câu 1 (4 điểm):

- a) Tìm m để phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 17$.
- b) Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x \geq m - 1 \\ mx \geq 1 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 2(4 điểm): Thu gọn các biểu thức sau:

- a) $S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$ (a, b, c khác nhau đôi một)
- b) $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ ($x \geq 2$)

Câu 3(2 điểm): Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.
- b) $bc \geq ad$.

Câu 4 (2 điểm):

- a) Cho a, b là hai số thực thỏa $5a + b = 22$. Biết phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là hai số nguyên dương. Hãy tìm hai nghiệm đó.
- b) Cho hai số thực sao cho $x + y, x^2 + y^2, x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là các số nguyên.

Câu 5 (3 điểm): Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A và B; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Câu 6 (3 điểm): Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\angle ABD = \angle CBE = 20^\circ$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao $BN = BM$. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN.

Câu 7 (2 điểm): Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \leq 2$.

-----oOo-----

Gợi ý giải đề thi môn toán chuyên

Câu 1:

a) $\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) = 16m^2 + 33 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có: $S = -4m - 1$ và $P = 2m - 8$.

Do đó: $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 289$

$$\Leftrightarrow (-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Vậy m thỏa YCBT $\Leftrightarrow m = \pm 4$.

$$\text{b)} \begin{cases} 2x \geq m - 1 & (a) \\ mx \geq 1 & (b) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } (a) \Leftrightarrow x \geq \frac{m - 1}{2}.$$

$$\text{Xét (b): } * m > 0: (b) \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{m}.$$

$$* m = 0: (b) \Leftrightarrow 0x \geq 1 \text{ (VN)}$$

$$* m < 0: (b) \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{m}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{1}{m} = \frac{m - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } S &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \quad (a, b, c \text{ khác nhau đôi một}) \\ &= \frac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{ac - ab + ba - bc + cb - ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad (x \geq 2) \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right]}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| \right]}{|\sqrt{2x-1}+1| - |\sqrt{2x-1}-1|} \\ &= \frac{\sqrt{2} \left[\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 \right]}{\sqrt{2x-1}+1 - (\sqrt{2x-1}-1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1) \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$.

a) Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ ($h, k \in \mathbb{N}$)

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$.

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$.

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - k)^2 + b^2 + c^2 + (c + k)^2$

$$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$$

$$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$$

$= (b + c)^2 + (b - c - k)^2 + k^2$ là tổng của ba số chính phương (do $b + c$, $b - c - k$ và k là các số nguyên)

b) Ta có $ad = (b - k)(c + k) = bc + bk - ck - k^2 = bc + k(b - c) - k^2 \leq bc$ (vì $k \in \mathbb{N}$ và $b \leq c$)

Vậy $ad \leq bc$ (ĐPCM)

Câu 4:

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên dương của phương trình ($x_1 \leq x_2$)

Ta có $a = -x_1 - x_2$ và $b = x_1 x_2$ nên

$$5(-x_1 - x_2) + x_1 x_2 = 22$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_2 - 5) - 5(x_2 - 5) = 47$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 47 \quad (*)$$

Ta có: $-4 \leq x_1 - 5 \leq x_2 - 5$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 52 \end{cases}$$

Khi đó: $a = -58$ và $b = 312$ thỏa $5a + b = 22$. Vậy hai nghiệm cần tìm là $x_1 = 6$; $x_2 = 52$.

b) Ta có $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$ (1)

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \quad (2)$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 \quad (3)$$

Vì $x + y, x^2 + y^2$ là số nguyên nên từ (2) $\Rightarrow 2xy$ là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2, x^4 + y^4$ là số nguyên nên từ (3) $\Rightarrow 2x^2 y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên

$\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 2 (do 2 là nguyên tố) $\Rightarrow xy$ là số nguyên.

Do đó từ (1) suy ra $x^3 + y^3$ là số nguyên.

Câu 5: Ta có: $OC \perp DE$ (tính chất đường nối tâm)

$\Rightarrow \Delta CKJ$ và ΔCOH đồng dạng (g-g)

$\Rightarrow CK \cdot CH = CJ \cdot CO$ (1)

$\Rightarrow 2CK \cdot CH = CJ \cdot 2CO = CJ \cdot CC'$

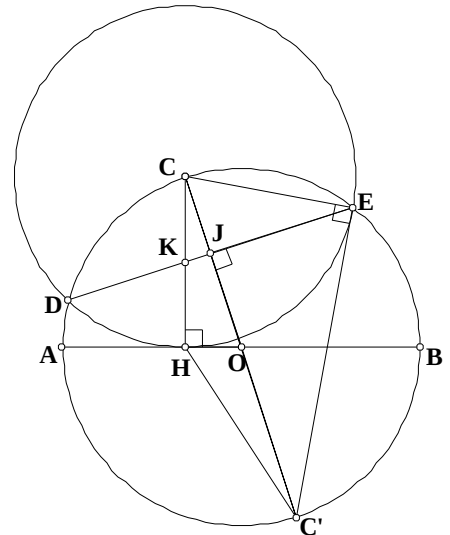
mà $\Delta CEC'$ vuông tại E có EJ là đường cao

$\Rightarrow CJ \cdot CC' = CE^2 = CH^2$

$\Rightarrow 2CK \cdot CH = CH^2$

$\Rightarrow 2CK = CH$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của CH.



Câu 6: Kẻ $BI \perp AC \Rightarrow I$ là trung điểm AC.

Ta có: $\angle ABD = \angle CBE = 20^\circ \Rightarrow \angle DBE = 20^\circ$ (1)

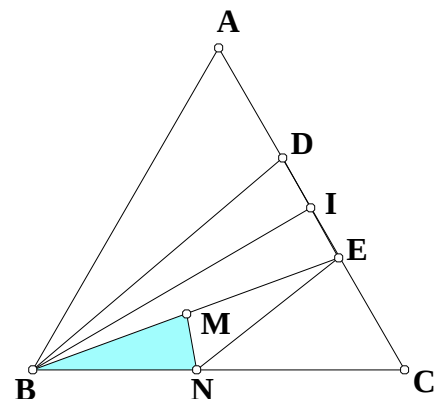
$\Delta ADB = \Delta CEB$ (g-c-g)

$\Rightarrow BD = BE \Rightarrow \Delta BDE$ cân tại B $\Rightarrow I$ là trung điểm DE.

mà $BM = BN$ và $\angle MBN = 20^\circ$

$\Rightarrow \Delta BMN$ và ΔBDE đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BED}} = \left(\frac{BM}{BE} \right)^2 = \frac{1}{4}$$



$$\Rightarrow S_{BNE} = 2S_{BMN} = \frac{1}{2} S_{BDE} = S_{BIE}$$

$$\text{Vậy } S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 7: Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \leq 2$.

Ta có: $a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0$ (1)

$$(a - b)^2(a + b) \geq 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a + b)$$

$$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \Rightarrow 8 \geq (a + b)^3 \Rightarrow a + b \leq 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a + b \leq 2$.

-----oOo-----

Người giải đề: NGUYỄN DUY HIẾU - NGUYỄN PHÚ SỸ
(Giáo viên Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM)