|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT**  **NĂM HỌC 2022-2023**  Môn thi: **TOÁN (Chuyên Toán)**  Ngày thi : 20/6/2022  Thời gian làm bài : 150 phút |

**Bài I. (2,0 điểm)**

1. Giải phương trình 
2. Cho các số thực và thỏa mãn Tính giá trị của biểu thức



**Bài II. (2,0 điểm)**

1. Chứng minh nếu là số tự nhiên lẻ thì chia hết cho 20
2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương sao cho 

**Bài III. (2,0 điểm)**

1. Tìm hai số nguyên dương và n sao cho và đều là các số nguyên tố
2. Với là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài IV. (3,0 điểm)** Cho tam giác nhọn với Đường tròn nội tiếp tam giác , tiếp xúc với ba cạnh lần lượt tại ba điểm và 

1. Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng 
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng Chứng minh tam giác là tam giác cân
3. Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng 

**Bài V. (1,0 điểm)** Cho tập hợp gồm 70 số nguyên dương không vượt quá Gọi là tập hợp gồm các số có dạng với và (x,y không nhất thiết phân biệt )

1. Chứng minh 
2. Chứng minh chứa 91 số nguyên liên tiếp

**ĐÁP ÁN**

**Bài I. (2,0 điểm)**

1. **Giải phương trình **

Điều kiện : . Phương trình đã cho có thể được viết lại thành :



Từ đây, ta có hoặc 

Giải 2 phương trình và đối chiếu ta có 

1. **Cho các số thực và thỏa mãn Tính giá trị của biểu thức**

****

Do 

Chứng minh tương tự, ta có : 

Ngoài ra cũng có nên :



Từ kết quả trên ta suy ra :



Vậy 

**Bài II. (2,0 điểm)**

1. **Chứng minh nếu là số tự nhiên lẻ thì chia hết cho 20**

Đặt với k tự nhiên, khi đó ta có :



1. **Tìm tất cả cặp số nguyên dương sao cho **

Dễ thấy 

Từ phương trình, ta suy ra chia hết cho Mà nên 

Đặt với nguyên dương. Khi đó, từ phương trình đã cho, ta suy ra :

. Do đó :

.Suy ra 

Mà là số nguyên dương nên . Thay trở lại phương trình đã cho, ta được :

. Từ đó 

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài III. (2,0 điểm)**

1. **Tìm hai số nguyên dương và n sao cho và đều là các số nguyên tố**

Không mất tính tổng quát, giả sử . Đặt với là số nguyên tố. Từ đây, ta suy ra . Kết hợp với , ta có :

hay mà p nguyên tố nên 

Như vậy, dấu đẳng thức trong dãy đánh giá trên phải xảy ra, tức là phải có . Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất 1 nghiệm 

1. **Với là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện tìm giá trị lớn nhất của biểu thức **

Sử dụng bất đẳng thức ta có :



Vậy 

**Bài IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn với Đường tròn nội tiếp tam giác , tiếp xúc với ba cạnh lần lượt tại ba điểm và **

****

1. **Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng **

Do là đường tròn nội tiếp tam giác nên ta có là các đường phân giác của tam giác 

Do là các tiếp tuyến của (I) nên tam giác cân tại B. Suy ra :



Xét tam giác , có : 

Suy ra . Do đó , tứ giác nội tiếp. Suy ra 

Vì thế 

1. **Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng Chứng minh tam giác là tam giác cân**

Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng . Chứng minh tam giác  là tam giác cân.

Chứng minh cùng thuộc một đường tròn, suy ra 

Gọi  là giao điểm của  và  là giao điểm của  và 

Ta có:

 là trung điểm của  (cân) và  là trung điểm của  (cân).

Suy ra 

Do vậy  cân

1. **Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng **

Dựng đường cao  thì ta có tứ giác  nội tiếp suy ra 

Dễ nhận thấy //  nên ta có 

Do đó tứ giác  nội tiếp

Vì là các tiếp tuyến của  nên ta có cùng thuộc đường tròn

đường kính . Suy ra cùng thuộc một đường tròn đường kính  nên

, do đó , mà suy ra thẳng hàng.

Do  (đpcm).

**Bài V. (1,0 điểm) Cho tập hợp gồm 70 số nguyên dương không vượt quá Gọi là tập hợp gồm các số có dạng với và (x,y không nhất thiết phân biệt )**

1. **Chứng minh **

Xét 34 cặp số  do tập  chứa 70 số nguyên dương không vượt quá 90 ( chỉ không chứa 20 số nguyên dương không vượt quá 90) nên có ít nhất 1 cặp số thuộc . Từ đó ta có 

1. **Chứng minh chứa 91 số nguyên liên tiếp**

Ta sẽ chứng minh mọi số nguyên dương n với , đều thuộc tập .

* Với : Giả sử 
* Nếu  là số lẻ, các cặp số ... ;  Vì nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập . Suy ra có ít nhất  số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập , mâu thuẫn vì tập  gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.
* Nếu  là số chẵn, xét các cặp số (... ;  và số  Vì  nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập , ngoài ra  Suy ra có ít nhất  số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A, mâu thuẫn vì  gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với , đều thuộc tập .

* Với Giả sử 
* Nếu  là số lẻ: xét các cặp số  Vì nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập . Suy ra có ít nhất  số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập , mâu thuẫn vì tập  gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.
* Nếu  là số chẵn, xét các cặp số ... ;  và số  Vì  nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập , ngoài ra  Suy ra có ít nhất  số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập , mâu thuẫn vì  gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với , đều thuộc tập .

* Từ hai kết quả trên, ta suy ra điều phải chứng minh.