

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG PT NGUYỄN MỘNG TUÂN**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**GÓP PHẦN PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO
TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THPT QUA CHỦ ĐỀ
GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTO VÀ
TỌA ĐỘ TRONG HÌNH HỌC PHẪNG**

**Người thực hiện: Lương Bá Tính
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc môn: Toán**

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

TT	NỘI DUNG	Trang
1	MỞ ĐẦU	1
2	NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM	2
2.1	Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm	2
2.2	Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	5
2.3	Phương pháp nghiên cứu	6
2.4	Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với học sinh	19
3	Kết luận	20

1. MỞ ĐẦU

- Lý do chọn đề tài

Ngày nay ở Việt Nam, cũng như ở nhiều nước trên thế giới, giáo dục được coi là quốc sách hàng đầu, là động lực để phát triển kinh tế xã hội. Với nhiệm vụ và mục tiêu cơ bản của giáo dục là đào tạo ra những con người phát triển toàn diện về mọi mặt, không những có kiến thức tốt mà còn vận dụng được kiến thức trong tình huống công việc.

Để làm được điều này, với lượng kiến thức và thời gian được phân phối cho môn toán bậc THPT, mỗi giáo viên phải có một phương pháp giảng dạy phù hợp thì mới có thể truyền tải được tối đa kiến thức cho học sinh, mới phát huy được tư duy sáng tạo của học sinh, không những đáp ứng cho môn học mà còn áp dụng được kiến thức đã học vào các khoa học khác và chuyển tiếp bậc học cao hơn sau này.

Vectơ có nhiều ứng dụng trong vật lý, kỹ thuật, do đó công cụ vectơ tạo điều kiện thực hiện mối liên hệ liên môn ở trường phổ thông.

Phương pháp vectơ và tọa độ cho phép học sinh tiếp cận những kiến thức hình học phổ thông một cách gọn gàng và có hiệu quả một cách nhanh chóng, tổng quát, đôi khi không cần đến hình vẽ. Nó có tác dụng tích cực trong việc phát triển tư duy sáng tạo, trừu tượng, năng lực phân tích, tổng hợp...

Từ vectơ có thể xây dựng một cách chặt chẽ phương pháp tọa độ theo tinh thần toán học hiện đại, có thể xây dựng lý thuyết hình học và cung cấp công cụ giải toán, cho phép đại số hoá hình học.

Thực tế giảng dạy áp dụng vectơ và tọa độ để giải toán ở phổ thông hiện nay đa số còn rất sơ sài. Sách giáo khoa, với lý do sự phạm cũng chỉ dừng lại ở mức độ cơ bản, do vậy học sinh cũng chưa thực sự nắm được nhiều ứng dụng của phương pháp này.

Với các lý do nêu trên, tôi đã tìm hiểu và nghiên cứu: ***"Góp phần phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh THPT qua chủ đề giải toán bằng phương pháp vectơ và tọa độ trong hình học phẳng"***.

- Mục đích nghiên cứu

- Nghiên cứu quá trình rèn luyện và phát triển tư duy sáng tạo toán học ở học sinh bậc THPT.

- Trên cơ sở lý thuyết vectơ, tọa độ trong mặt phẳng ở chương trình THPT, cùng với các kiến thức hình học tổng hợp khác, các dạng bài tập ứng dụng phương pháp vectơ và tọa độ trong hình học phẳng, góp phần phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh.

- Đối tượng nghiên cứu

- Nghiên cứu cơ sở lý luận về tư duy sáng tạo, quá trình rèn luyện và phát triển loại hình tư duy này ở bậc THPT.

- Đưa ra hệ thống các bài tập ứng dụng, hướng dẫn học sinh khai thác và phát triển các bài toán đó theo hướng sáng tạo.

- Đưa ra một số biện pháp sư phạm nhằm thực hiện mục đích nghiên cứu.

- Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu lý luận

- Nghiên cứu khai thác các tài liệu về tư duy biện chứng thông qua việc giảng dạy môn Toán ở trường phổ thông, đặc biệt ở khía cạnh tư duy sáng tạo.
- Nghiên cứu khai thác các tài liệu liên quan đến hứng thú học tập, động cơ học tập, phát huy tính tích cực học tập của học sinh qua môn Toán.
- Nghiên cứu chương trình và nội dung đổi mới sách giáo khoa và phương pháp giảng dạy bậc THPT, đặc biệt là hình học lớp 10.

Phương pháp quan sát điều tra

- Điều tra thực trạng giảng dạy và học tập của giáo viên và học sinh
- Quan sát việc học tập của học sinh, khảo sát mức độ tích cực học tập, tư duy sáng tạo trong giờ học để phát hiện nguyên nhân cần khắc phục và lựa chọn nội dung thích hợp cho đề tài.
- Thu thập kết quả thực tế của học sinh làm cơ sở thực tiễn để đưa hệ thống bài tập phù hợp có tính khả thi.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

- Khái niệm tư duy và tư duy sáng tạo

Tư duy là một quá nhận thức, phản ánh những thuộc tính bản chất, mối quan hệ có tính quy luật của sự vật và hiện tượng mà trước đó chủ thể chưa biết.

Các hình thức cơ bản của tư duy:

- + *Khái niệm*: Khái niệm là một hình thức tư duy phản ánh một lớp đối tượng
- + *Phán đoán*: Phán đoán là hình thức tư duy, trong đó khẳng định một dấu hiệu thuộc hay không thuộc một đối tượng. Phán đoán có tính chất hoặc đúng hoặc sai và nhất thiết chỉ xảy ra một trong hai trường hợp đó mà thôi.
- + *Suy luận*: Suy luận là một quá trình tư duy có quy luật, quy tắc nhất định (gọi là các quy luật, quy tắc suy luận). Muốn suy luận đúng cần phải tuân theo những quy luật, quy tắc ấy.

Các thao tác tư duy:

- + *Phân tích-tổng hợp*: Phân tích là thao tác tư duy để phân chia đối tượng nhận thức thành các bộ phận, các mặt, các thành phần khác nhau. Còn tổng hợp là các thao tác tư duy để hợp nhất các bộ phận, các mặt, các thành phần đã tách rời nhờ sự phân tích thành một chỉnh thể.
- + *So sánh-tương tự*: So sánh là thao tác tư duy nhằm xác định sự giống nhau hay khác nhau, sự đồng nhất hay không đồng nhất, sự bằng nhau hay không bằng nhau giữa các đối tượng nhận thức. So sánh liên quan chặt chẽ với phân tích-tổng hợp và đối với các hình thức tư duy đó có thể ở mức độ đơn giản hơn nhưng vẫn có thể nhận thức được những yếu tố bản chất của sự vật, hiện tượng. Tương tự là một dạng so sánh mà từ hai đối tượng giống nhau ở một số dấu hiệu, rút ra kết luận hai đối tượng đó cũng giống nhau ở dấu hiệu khác.
- + *Khái quát hoá- đặc biệt hoá*: Khái quát hoá là thao tác tư duy nhằm hợp nhất nhiều đối tượng khác nhau thành một nhóm, một loại theo những thuộc tính,

những liên hệ hay quan hệ chung giống nhau và những thuộc tính chung bản chất.

+ *Trừu tượng hoá*: Trừu tượng hoá là thao tác tư duy nhằm gạt bỏ những mặt, những thuộc tính, những liên hệ, quan hệ thứ yếu, không cần thiết và chỉ giữ lại các yếu tố cần thiết cho tư duy. Sự phân biệt bản chất hay không bản chất ở đây chỉ mang nghĩa tương đối, nó phụ thuộc mục đích hành động.

- Khái niệm tư duy sáng tạo, thành phần của tư duy sáng tạo

Tư duy sáng tạo là một dạng tư duy độc lập, tạo ra ý tưởng mới độc đáo và có hiệu quả giải quyết vấn đề cao. Ý tưởng mới thể hiện ở chỗ phát hiện vấn đề mới, tìm ra hướng đi mới, tạo ra kết quả mới. Tính độc đáo của ý tưởng mới thể hiện ở giải pháp lạ, hiếm, không quen thuộc hoặc duy nhất.

Tư duy sáng tạo gồm các thành phần sau:

+ *Tính mềm dẻo*: Là năng lực thay đổi dễ dàng, nhanh chóng trật tự của hệ thống tri thức, chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác, định nghĩa lại sự vật, hiện tượng, gạt bỏ sơ đồ tư duy có sẵn và xây dựng phương pháp tư duy mới, tạo ra sự vật mới trong mối quan hệ mới hoặc chuyển đổi quan hệ và nhận ra bản chất của sự vật và điều phán đoán. Tính mềm dẻo gạt bỏ sự cứng nhắc trong tư duy, mở rộng sự nhìn nhận vấn đề từ nhiều khía cạnh khác nhau của chủ thể nhận thức.

+ *Tính nhuần nhuyễn*: Là năng lực tạo ra một cách nhanh chóng sự tổ hợp giữa các yếu tố riêng lẻ của tình huống hoàn cảnh, đưa ra giả thuyết mới và ý tưởng mới. Tính nhuần nhuyễn của tư duy sáng tạo được đặc trưng bởi khả năng tạo ra số các ý tưởng mới khi nhận thức vấn đề.

+ *Tính độc đáo*: Là năng lực độc lập tư duy trong quá trình xác định mục đích cũng như giải pháp, biểu hiện trong những giải pháp lạ, hiếm, tính hợp lý, tính tối ưu của giải pháp.

+ *Tính hoàn thiện*: Là khả năng lập kế hoạch, phối hợp các ý nghĩ và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và chứng minh ý tưởng.

+ *Tính nhạy cảm vấn đề*: Là năng lực nhanh chóng phát hiện vấn đề, sự mâu thuẫn, sai lầm, thiếu logic, chưa tối ưu...và từ đó đề xuất hướng giải quyết, tạo ra cái mới.

- Dạy học giải bài tập ở trường phổ thông

- Vai trò của việc giải bài tập toán

- Bài tập toán học có vai trò quan trọng trong quá trình học tập môn toán ở nhà trường phổ thông. Giải bài tập toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Thông qua việc giải bài tập, học sinh phải thực hiện nhiều hoạt động như: Nhận dạng, thể hiện các khái niệm, định nghĩa, định lý, quy tắc-phương pháp, những hoạt động phức hợp, những hoạt động trí tuệ chung, những hoạt động trí tuệ phổ biến trong toán học.

- Vị trí bài tập toán: Giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học, giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kỹ năng kỹ xảo và ứng dụng toán học vào thực tiễn.

- Chức năng của bài tập toán là: Dạy học, giáo dục, phát triển và kiểm tra.

- Vai trò của bài tập toán thể hiện ở cả ba bình diện: Mục đích, nội dung và phương pháp của quá trình dạy học. Cụ thể:

+ Về mặt mục đích dạy học, bài tập toán thể hiện những chức năng khác nhau hướng đến việc thực hiện mục đích dạy học môn toán như:

. Hình thành, củng cố tri thức, kỹ năng, kỹ xảo, kỹ năng ứng dụng toán học ở những giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học.

. Phát triển năng lực trí tuệ chung: Rèn luyện các thao tác tư duy, hình thành các phẩm chất trí tuệ.

. Hình thành, bồi dưỡng thế giới quan duy vật biện chứng cũng như những phẩm chất đạo đức của người lao động mới.

+ Về mặt nội dung dạy học: Bài tập toán là một phương tiện để cài đặt nội dung dưới dạng tri thức hoàn chỉnh hay những yếu tố bổ sung cho tri thức đã học ở phần lý thuyết.

+ Về mặt phương pháp dạy học: Bài tập toán là giá mang những hoạt động để học sinh kiến tạo những nội dung nhất định và trên cơ sở đó thực hiện các mục đích dạy học khác. Khai thác tốt bài tập như vậy sẽ góp phần tổ chức tốt cho học sinh học tập trong hoạt động và bằng hoạt động tự giác, tích cực, chủ động sáng tạo được thực hiện độc lập hoặc trong giao lưu.

Trong thực tiễn dạy học, bài tập được sử dụng với những dụng ý khác nhau. Về phương pháp dạy học: Đảm bảo trình độ xuất phát, gợi động cơ, làm việc với nội dung mới, củng cố hoặc kiểm tra.... Đặc biệt về mặt kiểm tra, bài tập là phương tiện không thể thay thế để đánh giá mức độ tiếp thu tri thức, khả năng làm việc độc lập và trình độ phát triển tư duy của học sinh, cũng như hiệu quả giảng dạy của giáo viên.

- *Phương pháp giải bài tập toán*

Theo G.Pôlya, phương pháp chung giải một bài toán gồm 4 bước:

+ *Bước 1:* Hiểu rõ bài toán? Đây là dữ kiện? Có thể thoả mãn được điều kiện hay không? Điều kiện có đủ để xác định được ẩn hay không, hay chưa đủ, hay thừa, hay có mâu thuẫn?

- Hình vẽ. Sử dụng một ký hiệu thích hợp.

- Phân biệt các phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không?

Qua bước 1 ở trên, ta thấy việc đánh giá được dữ kiện có thoả mãn hay không, thừa hay thiếu... đã bước đầu thể hiện tư duy sáng tạo. Nếu làm tốt được khâu này thì việc giải bài toán đã có thể rất thuận lợi để tìm được lời giải đúng.

+ *Bước 2:* Xây dựng một chương trình giải

- Bạn đã gặp bài toán này lần nào chưa? Hay đã gặp bài toán này ở một dạng hơi khác?

- Bạn có biết một bài toán nào liên quan không? Một định lý có thể dùng được không?

- Xét kỹ cái chưa biết (ẩn) và thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay ẩn tương tự.

- Đây là một bài toán liên quan mà bạn đã có lần giải rồi. Có thể sử dụng nó không? Có thể sử dụng kết quả của nó không? Hãy sử dụng phương pháp? Có cần phải dựa thêm một số yếu tố phụ thì mới sử dụng được nó không?

- Có thể phát biểu bài toán một cách khác không? Một cách khác nữa? Quay về định nghĩa.

- Nếu bạn chưa giải được bài toán đã đề ra, thì hãy thử giải một bài toán có liên quan. Bạn có thể nghĩ ra một bài toán có liên quan và dễ hơn không? Một bài toán tổng quát hơn? Một trường hợp riêng? Một bài toán tương tự? Bạn có thể giải được một phần bài toán không? Hãy giữ lại một phần điều kiện, bỏ qua phần kia. Khi đó ẩn được xác định đến một chừng mực nào đó, nó biến đổi như thế nào? Bạn có thể từ các dữ kiện rút ra một yếu tố không? Có thể thay đổi ẩn hay khác dữ kiện, hay cả hai nếu cần thiết, sao cho ẩn và các dữ kiện mới được gần nhau hơn không?

- Bạn đã sử dụng mọi dữ kiện hay chưa? Đã sử dụng toàn bộ điều kiện hay chưa? Đã đề ý đến mọi khái niệm chủ yếu trong bài toán chưa?

Qua các phần dẫn dắt của bước 2, ta thấy rằng tư duy sáng tạo đã được thể hiện ở mức độ cao hơn. Chẳng hạn việc giải thử một bài toán có liên quan, hay tổng quát hơn...chính là sự thể hiện tư duy sáng tạo.

+ *Bước 3:* Thực hiện chương trình giải

Hãy kiểm tra lại từng bước. Bạn đã thấy rõ ràng là mỗi bước đều đúng chưa? Bạn có thể chứng minh là nó đúng không?

Qua bước này ta thấy việc thực hiện được chương trình giải và chứng minh được là đúng, tức là đã hoàn thành bài toán, các yếu tố của tư duy sáng tạo đã được thể hiện đầy đủ.

+ *Bước 4:* Trở lại cách giải

- Bạn có kiểm tra lại kết quả? Bạn có thể kiểm tra lại toàn bộ quá trình giải bài toán không?

- Có tìm ra được kết quả một cách khác không? Có thể thấy ngay trực tiếp kết quả không?

- Bạn có thể sử dụng kết quả hay phương pháp đó cho mọi bài toán nào khác không?

Trong quá trình giải toán rất nên làm cho học sinh biết các nội dung của logic hình thức một cách có ý thức, xem như vốn thường trực quan trọng để làm việc với toán học cũng như để sử dụng trong quá trình học tập liên tục, thường xuyên. Để thực hiện điều này, sau khi giải xong mỗi bài toán cần có phần nhìn lại phương pháp đã sử dụng để giải. Dần dần những hiểu biết về logic sẽ thâm nhập vào ý thức của học sinh.

Rất nên hệ thống hoá các bài toán có liên quan với một chủ đề hay mô hình nào đấy để học sinh thấy được những tính chất đa dạng thông qua các chủ đề và mô hình đó, cũng là cơ sở quan trọng để phát triển tư duy sáng tạo trong quá trình học tập và nghiên cứu.

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

- *Những khó khăn khi giải toán vector và tọa độ trong hình học phẳng của học sinh:* Từ chương trình hình học phẳng ở bậc THCS, vào lớp 10 học sinh được tiếp cận ngay hàng loạt khái niệm, phép toán hoàn toàn mới như: Mệnh đề, tập hợp, vector. Cách tư duy về các phép toán trên các đối tượng này cũng hoàn toàn khác so với tư duy về phép toán đã học trước đây. Do vậy, thời gian đầu các em thường bối ngỡ và còn hay sai lầm khi làm toán.

Có thể nói, trong sách giáo khoa chỉnh lý hiện hành, vector và tọa độ là phương pháp chủ đạo trong giải toán hình học, mức độ yêu cầu của tư duy rất cao, vì nhiều bài toán không cần đến hình vẽ, và có bài cũng không thể vẽ tường minh được. Đây cũng là một khó khăn đối với học sinh.

Hệ thống lý thuyết về vector và tọa độ trong chương trình cũng khá đầy đủ để giải quyết hầu hết các dạng toán cơ bản. Tuy vậy, hệ thống bài tập còn chưa đầy đủ. Cũng có thể do thời gian phân phối cho môn học, do yêu cầu giảm tải của chương trình. Nhưng đây cũng chính là một mâu thuẫn trong thực hành kỹ năng và phương pháp cho học sinh. Vì trong các kỳ thi Đại học, Cao đẳng, THPT quốc gia bài tập về phần hình học cũng không phải dễ lắm, dạng bài tập cũng có điều mới lạ so với dạng bài tập sách giáo khoa.

Về các đường bậc hai như đường tròn và elip, các khái niệm và tính chất khá phức tạp khi giải toán, học sinh dễ sa vào con đường phức tạp hoá bài toán nếu nhìn nhận theo góc độ thông thường, cần phải kết hợp linh hoạt được tính chất của hình học phẳng đã học ở bậc THCS thì cách bài toán mới gọn nhẹ.

Cũng vì các lý do trên, nên học sinh thường gặp các sai lầm trong khi giải toán bằng phương pháp vector và tọa độ. Chỉ rõ cho các em được những sai lầm này cũng là một cách để các em nắm lý thuyết vững hơn và tránh các sai lầm tương tự khi học hình học không gian sau này.

- *Những sai lầm thường gặp của học sinh khi giải toán vector và tọa độ*

1) *Không xét hết các trường hợp của bài toán.*

2) *Sai lầm khi định dạng các hình do nắm tính chất hình không vững.*

3) *Không nắm vững công thức góc giữa hai đường thẳng và hai vector.*

4) *Không rõ ràng khi xác định đường phân giác trong và ngoài của một góc tam giác, không nắm được phương pháp hoặc chưa nắm vững các tính chất vector hoặc hình học.*

2.3 Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề:

2.3.1 Các định hướng phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh ở trường THPT qua nội dung giải bài tập bằng vector và tọa độ trong hình học phẳng

Việc trang bị kiến thức, kỹ năng cơ bản cho học sinh đại trà, đặc biệt bồi dưỡng tư duy nói chung, tư duy sáng tạo nói riêng cho học sinh là một quá trình liên tục, trải qua nhiều giai đoạn với những mức độ khác nhau. Điều quan trọng nhất trong dạy học sáng tạo là giải phóng hoạt động tư duy của học sinh bằng cách hướng hoạt động cho các em, các em tự hoạt động, tự khám phá tìm tòi, phải kết hợp tốt giữa hoạt động học tập và hoạt động nhận thức. Bên cạnh việc

nâng dần tính tích cực theo mức độ từ thấp đến cao; Tính tích cực động não, độc lập suy nghĩ đến tích cực sáng tạo, người thầy cần rèn luyện học trò nâng dần các hoạt động từ dễ đến khó; Theo dõi cách chứng minh, đến hoạt động mò mẫm dự đoán kết quả và cuối cùng tự lực chứng minh. Việc dự đoán, mò mẫm kết quả không chỉ tập cho học sinh phong cách nghiên cứu khoa học, tập các thao tác tư duy tiền logic cần thiết, mà còn là biện pháp quan trọng nhằm nâng cao tính tích cực của học sinh. Khi tự đưa ra dự đoán, học sinh sẽ hào hứng và có trách nhiệm hơn trong quá trình tìm tòi lời giải cho kết quả dự đoán của mình.

2.3.2. Rèn luyện năng lực giải toán theo các thành phần cơ bản của tư duy sáng tạo

+ *Tính mềm dẻo*: Tính mềm dẻo của tư duy có các đặc trưng nổi bật sau:

- Dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, vận dụng linh hoạt các hoạt động phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hoá, khái quát hoá, cụ thể hoá và các phương pháp suy luận như: Quy nạp, suy diễn, tương tự; dễ dàng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác; điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ nếu gặp trở ngại.

- Suy nghĩ không dập khuôn, không áp dụng một cách máy móc những kinh nghiệm, kiến thức, kỹ năng đã có vào trong hoàn cảnh mới, điều kiện mới, trong đó có những yếu tố đã thay đổi; có khả năng thoát khỏi ảnh hưởng kìm hãm của những kinh nghiệm, những phương pháp, những suy nghĩ đã có từ trước.

- Nhận ra vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc, nhìn thấy chức năng mới của đối tượng quen biết.

Qua cơ sở lý luận tính mềm dẻo trong tư duy, ta thấy để giải một bài tập cụ thể có vướng mắc, hoặc thấy cách giải còn chưa hay, thì gợi mở cho học sinh theo các hướng trên thì hiệu quả đạt được sẽ tốt hơn.

Ví dụ: Cho $\triangle ABC$, biết $A(1;3)$ và hai trung tuyến có phương trình $(d_1): x-y+1=0$ và $(d_2): 3x+2y-2=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C .

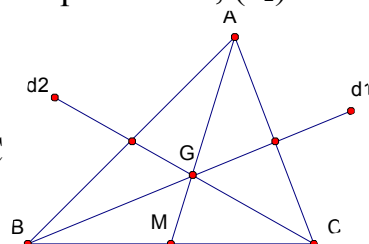
Nếu theo suy nghĩ thông thường, từ giả thiết tính được trung điểm M của BC , viết phương trình BC qua M , cho $MB=MC$ thì bài toán khá phức tạp, vì phương trình tổng quát một đường thẳng có 3 ẩn, một điểm thuộc một đường thẳng có 2 ẩn. Theo các sách hướng dẫn, đa số dùng cách đối xứng A qua trọng tâm G được A' , thì có $A'B, A'C$ song song $(d_2), (d_1)$, tìm ra B, C . Nhưng việc nghĩ ra đối xứng A qua G không tự nhiên lắm. Nếu ta mềm dẻo hơn khi tư duy về phương trình đường thẳng dưới dạng tham số, thì từ một điểm trên đường thẳng phụ thuộc 2 ẩn, ta đưa về sự phụ thuộc một ẩn:

Từ giả thiết $\Rightarrow A \notin (d_1), A \notin (d_2)$, gọi (d_1) là trung tuyến qua đỉnh B , (d_2) là trung tuyến qua đỉnh C .

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì tọa độ G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow G = (0,1). \text{ Nếu } M \text{ trung điểm của } BC$$

thì:



$$\vec{AG} = 2\vec{GM} \Rightarrow \begin{cases} x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \\ y_G - y_A = 2(y_M - y_G) \end{cases} \Rightarrow M = (-\frac{1}{2}, 0). (d_1) \text{ có dạng tham số: } x = t, \\ y = 1+t; (d_2) \text{ có dạng tham số: } x = 2t', y = 1-3t'. \text{ Vì } B \in (d_1), C \in (d_2) \text{ nên: } B = (t, 1+t), \\ C = (2t', 1-3t'). \text{ Do M trung điểm BC nên ta có: } \begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Rightarrow t = -7/5, t' = 1/5.$$

Vậy $B = (-7/5, -2/5)$, $C = (2/5, 2/5)$.

+ *Tính nhuần nhuyễn*: Được thể hiện rõ nét ở hai đặc trưng sau:

- Tính đa dạng của các cách xử lý khi giải toán: Khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau: Đứng trước một vấn đề khi giải quyết, người có tư duy nhuần nhuyễn nhanh chóng tìm và đề xuất nhiều phương án khác nhau và từ đó đưa ra được phương án tối ưu.

- Khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau, có một cách nhìn sinh động từ nhiều phía đối với sự vật và hiện tượng chứ không phải cái nhìn bất biến, phiếm diện, cứng nhắc.

Khi thực hành giải toán, để thực hiện được điều này, ta cần phân tích cho học sinh thấy rõ các bước để giải một bài toán, tìm sự quan hệ gần gũi giữa bài toán đã cho với các bài toán đã biết... Qua đó thể hiện được tính nhuần nhuyễn của tư duy, tính độc lập trong suy nghĩ.

2.3.3. Hướng vào rèn luyện các hoạt động trí tuệ của học sinh qua giải các bài tập toán

Các hoạt động trí tuệ trong môn toán có thể kể đến như: Dự đoán, bác bỏ, lật ngược vấn đề, các thao tác tư duy toán học... Rèn luyện cho học sinh những hoạt động đó là khâu quan trọng nhất trong dạy học sáng tạo.

2.3.4. Khuyến khích tìm nhiều lời giải cho một bài toán

Sau khi giải được bài toán, bước quan trọng tiếp theo là tìm thêm những lời giải khác, điều đó giúp học sinh bồi dưỡng năng lực tìm hiểu nhiều giải pháp cho một vấn đề, nhìn nhận vấn đề dưới nhiều góc cạnh khác nhau, điều này giúp học sinh phát triển năng lực giải toán ở những phương diện sau:

- Rèn luyện khả năng phân tích bài toán
- Rèn luyện khả năng định hướng và xác định đường lối giải
- Rèn luyện kỹ năng chọn lựa phương pháp và công cụ giải
- Rèn luyện khả năng kiểm tra lời giải
- Rèn luyện khả năng tìm các bài toán, các kiến thức liên quan

Cụ thể, các phương diện này được áp dụng trong ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho $M = (x, y)$ là điểm trên (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - y + 5$.

Đây là một bài toán thường gặp trong các kỳ thi tuyển sinh đại học. Rất nhiều học sinh lúng túng khi gặp loại toán này. Nhưng đây lại là bài toán khá phong phú về tư duy phương pháp. Sau đây là một số cách làm:

Cách 1: Ta có: $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) \leq |u| \cdot |v|$.

Xét $u = (\frac{x}{3}, \frac{y}{2})$ và $v = (6, -2)$. Áp dụng bất đẳng thức trên có:

$$|\frac{x}{3} \cdot 6 + \frac{y}{2} \cdot (-2)| \leq \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \cdot \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} \Leftrightarrow -2\sqrt{10} \leq 2x - y \leq 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy: } 5 - 2\sqrt{10} \leq P \leq 5 + 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Min}P = 5 - 2\sqrt{10} \text{ khi } (u, v) = \pi \Leftrightarrow x = -\frac{9}{\sqrt{10}}, y = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Max}P = 5 + 2\sqrt{10} \text{ khi } (u, v) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Trong cách trên đã thể hiện được khả năng phân tích bài toán theo phương diện vector và toạ độ, nhờ tính chất của tích vô hướng.

Cách 2: Sau khi đã có cách giải trên, loại bài toán là cho quan hệ các biến bậc hai, Biểu thức P có biến bậc nhất hoặc ngược lại, là một dạng tiêu biểu của bất đẳng thức Bunhiacôpski. Áp dụng ta có:

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{40} \left[\left(\frac{x}{3} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right] \cdot [(6)^2 + (-2)^2] \geq \frac{1}{40} \left(\frac{x}{3} \cdot 6 + \frac{y}{2} \cdot (-2) \right)^2 = (2x - y)^2$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{10} \leq 2x - y \leq 2\sqrt{10}. \text{ Vậy: } 5 - 2\sqrt{10} \leq P \leq 5 + 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{9}{\sqrt{10}} \\ y = \mp \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: Min}P = 5 - 2\sqrt{10} \text{ khi } x = -\frac{9}{\sqrt{10}}, y = \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ và Max}P = 5 + 2\sqrt{10} \text{ khi}$$

$$x = \frac{9}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Cách 3: Dùng phương pháp miền giá trị

$P = 2x - y + 5 \Rightarrow y = 2x + 5 - P$, thay vào phương trình (E), phải có nghiệm:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(2x + 5 - P)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 40x^2 + 36(5 - P)x + 9P^2 - 90P + 189 = 0$$

$$\Delta' = -9(P^2 - 10P - 15) \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{10} \leq P \leq 5 + 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Min}P = 5 - 2\sqrt{10} \text{ khi } x = \frac{18(P - 5)}{40} = -\frac{9}{\sqrt{10}}, y = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Max}P = 5 + 2\sqrt{10} \text{ khi } x = \frac{18(P - 5)}{40} = \frac{9}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

* Phương pháp miền giá trị học sinh đã được làm quen trong chương trình THCS, đây cũng là một cách để rèn luyện khả năng lựa chọn phương pháp và công cụ giải.

Cách 4: Trong giả thiết bài toán có tổng hai bình phương bằng 1, gọi cho học sinh đẳng thức lượng giác quen thuộc: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do vậy học sinh có thể rèn kỹ năng tìm kiếm các kiến thức liên quan:

Vì $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, nên có góc $\alpha \in [0, 2\pi]$ sao cho: $x = 3\sin\alpha, y = 2\cos\alpha$

$$\Rightarrow P = 6\sin\alpha - 2\cos\alpha + 5.$$

$$\text{Mặt khác: } |6\sin\alpha - 2\cos\alpha| \leq \sqrt{6^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Vậy: } 5 - 2\sqrt{10} \leq P \leq 5 + 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Min}P = 5 - 2\sqrt{10} \text{ khi } \frac{\sin\alpha}{6} = \frac{\cos\alpha}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{18} = \frac{y}{-4} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\text{Max}P = 5 + 2\sqrt{10} \text{ khi } \frac{\sin\alpha}{6} = \frac{\cos\alpha}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{18} = \frac{y}{-4} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{\sqrt{10}} \\ y = -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Chắc chắn sẽ còn nhiều lời giải khác, nếu ta tiếp tục suy nghĩ (như dùng hàm số, bất đẳng thức khác). Điều đó cho thấy, sau khi đã giải được bài toán bằng một cách nào đó, nên nhìn nhận bài toán dưới nhiều góc độ và phương diện khác nhau, có thể được nhiều lời giải khác nhau.

2.3.5. Vấn đề sáng tạo bài toán mới

Sáng tạo bài toán mới là một bước quan trọng của quá trình giải toán, một phương thức rèn luyện tư duy sáng tạo toán học, một trong các mục tiêu chính của học tập sáng tạo. Để xây dựng các bài toán mới, có thể hướng dẫn học sinh theo các con đường sau đây:

a) *Xuất phát từ các khái niệm, định nghĩa, tiên đề về những đối tượng toán học được đặt trong mối quan hệ toán học nào đó.*

Ví dụ: Từ khái niệm hai vectơ cùng phương, ta có thể xây dựng hệ thống bài tập:

BT1: Chứng minh 3 điểm $\overset{\text{uuu}}{A}, \overset{\text{uuu}}{B}, \overset{\text{uuu}}{C}$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \forall M$ ta có:

$$\alpha \overset{\text{uuu}}{MA} + \beta \overset{\text{uuu}}{MB} + \gamma \overset{\text{uuu}}{MC} = 0, \text{ với } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

BT2: Chứng minh $\overset{\text{uuu}}{AB} // \overset{\text{uuu}}{CD} \Leftrightarrow \overset{\text{uuu}}{AB} = k \overset{\text{uuu}}{CD}$

b) *Xuất phát từ những định lý, tính chất, bài toán đã biết, theo hướng này để xây dựng nên bài toán mới, có thể bằng cách:*

- Sử dụng các thao tác tư duy như: Tương tự, đặc biệt hoá hay tổng quát hoá... để đi đến bài toán tương tự, bài toán đảo, đặc biệt hoá hay tổng quát hoá.

- Nghiên cứu sâu bản chất của bài toán: Phân tích nguồn gốc cái đã cho, cái cần tìm và mối liên hệ giữa chúng, đoán nhận được cơ sở sự hình thành nên bài toán... để xây dựng các bài toán cùng dạng.

- Xét sự vận động thích hợp của giả thiết, dẫn đến sự vận động tương ứng của kết luận, được bài toán mới...

Ví dụ: Xét các bài toán sau:

BT1: Cho ΔABC , biết $A=(1,2)$, hai đường cao có phương trình (d): $x-y=0$ và (d'): $2x+y-1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác?

Giải: Dễ thấy A không thuộc (d) và (d'), gọi (d) là đường cao qua B, (d') là đường cao qua C. Do (d) $\perp AC$ nên AC có chỉ phương

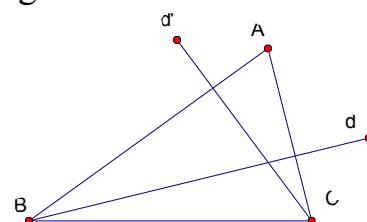
là pháp tuyến $n_d=(1,-1)$, AC qua A nên

phương trình AC là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x+y-3=0$

Tương tự có phương trình AB là: $x-2y+3=0$.

$B=AB \cap (d)$, giải hệ AB và (d) có $B=(3,3)$.

$C=AC \cap (d')$, giải hệ AC và (d') có $C=(-2,5)$.



Bài toán trên không có gì là khó khăn khi tìm lời giải. Vấn đề đặt ra là ta có khai thác được gì qua bài toán này không?

Trước hết ta thử thay đổi giả thiết 2 đường cao bằng hai đường khác của tam giác.

Chẳng hạn thay bằng 2 đường trung tuyến. Ta có bài toán mới như sau:

BT2: Cho ΔABC , biết $A=(1,3)$ và hai trung tuyến có phương trình là :

(d): $x-3y+1=0$ và (d'): $y-1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B,C.

Giải: Từ giả thiết $\Rightarrow A \notin (d)$, $A \notin (d')$, gọi (d) là trung tuyến qua B, (d') là trung tuyến qua C và G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ Tọa độ G là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow G=(2,1). \text{ Nếu M trung điểm BC thì } \overline{AG} = 2\overline{GM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \\ y_G - y_A = 2(y_M - y_G) \end{cases} \Rightarrow M=(5/2,0).$$

(d) có dạng tham số: $x=3t-1$, $y=t$; (d') có dạng tham số: $x=t'$, $y=1$.

Vì $B \in (d)$, $C \in (d')$ nên: $B=(3t-1,t)$, $C=(t',1)$. Do M trung điểm BC nên ta có:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 9 \end{cases}. \text{ Vậy } B=(-4,-1) \text{ và } C=(9,1). \text{ Thay 2 đường cao bằng}$$

hai phân giác, ta có bài toán sau:

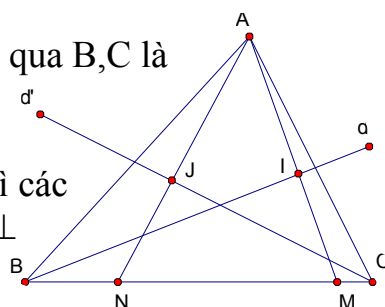
BT3: Cho ΔABC biết $A=(2,4)$, hai đường phân giác trong qua B,C là

(d): $x+y-2=0$ và (d'): $x-3y-6=0$. Viết phương trình

cạnh BC của tam giác.

Giải: Đối xứng điểm A qua (d) và (d') được M, $N \in BC$ vì các ΔABM , ΔACN cân. Vậy $BC \equiv MN$. Xác định M: $AM \perp$

(d) nên AM có chỉ phương $u = n_d(1;-1)$



$\Rightarrow$ Phương trình AM: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{1} \Leftrightarrow x-y+2=0$. Nếu I là hình chiếu của A lên

(d) thì $I=(d) \cap AM \Rightarrow I=(0,2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_M = 2x_I - x_A = -2 \\ y_M = 2y_I - y_A = 0 \end{cases} \text{ . Vậy } M=(-2,0). \text{ Tương tự ta có phương trình AN: } x-2=0.$$

Nếu J là hình chiếu của A lên AN thì $J=(18/5, -4/5)$ và $N=(26/5, -28/5)$.

Vậy phương trình $MN \equiv BC: 7x+9y+14=0$.

Mặt khác thay hai đường cao bởi hai đường bất kỳ, chẳng hạn một đường cao, một trung tuyến, hay một đường cao một phân giác; một trung tuyến một phân giác ta có các bài toán sau:

BT4: Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của ΔABC biết $B=(2,-1)$, đường cao qua A là (d): $3x-4y+27=0$ và phân giác ngoài góc C là (d'): $x+2y-5=0$.

Giải: Vì (d) $\perp$ BC, nên BC có chỉ phương

là pháp tuyến của (d): $n_d=(3,-4)$.

$$\Rightarrow \text{Phương trình BC: } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$$

$$\Leftrightarrow 4x+3y-5=0, C=BC \cap (d') \Rightarrow C=(-1,3).$$

Sử dụng tính chất phân giác như trên, đối xứng B qua (d') được $D \in AC$.

BD có chỉ phương là pháp tuyến của (d') là $n_{d'}=(1,2)$, phương

$$\text{trình BD: } \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x-y-5=0. \text{ Nếu I là hình chiếu của B lên}$$

$$(d') \text{ thì } I=BD \cap (d') \Rightarrow I=(3,1) \Rightarrow D=(4,3). \text{ Vậy phương trình AC } \equiv DC: y-3=0.$$

Vì $A=(d) \cap AC$ nên $A=(-5,3)$.

Vì $A \in (d)$ nên: $2t-1-(2-4t)=0 \Rightarrow t=1/2 \Rightarrow A=(0,0)$.

Như vậy, qua hệ thống bài toán trên ta thấy rõ sự vận động trong suy luận, nhìn vấn đề dưới góc độ vận động, ta được nhiều kết quả tương tự, nhờ đó có thể sáng tạo ra nhiều bài toán hay, phù hợp với nhận thức của học sinh.

2.3.6 Xây dựng hệ thống bài tập vector và tọa độ trong hình học phẳng nhằm phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh bậc THPT

- Những kiến thức, kỹ năng, năng lực cần thiết đối với học sinh

Về kiến thức:

- Học sinh phải nắm vững các khái niệm, tính chất, định lý về vector và tọa độ trong hình học phẳng (đã nêu ở phần trước).

- Nắm vững các khái niệm, tính chất, định lý trong hình học phẳng THCS.

Về kỹ năng:

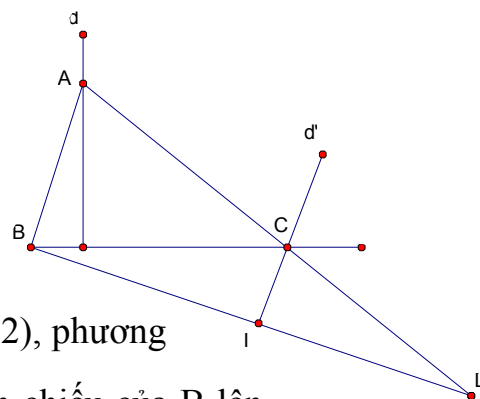
- Kỹ năng về thực hành tính toán, vẽ hình, trình bày lời giải

- Kỹ năng chung để tìm lời giải

- Kỹ năng khai thác bài toán

- Kỹ năng sử dụng vector và tọa độ trong giải toán

Về năng lực:



$CH \perp AB, B'A \perp AB \Rightarrow HC \parallel AB'$ Vậy $AHCB'$ là hình bình hành $\Rightarrow đpcm$.

b) Ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\vec{OM} = \vec{OH} - \vec{OA} \Leftrightarrow 2\vec{OM} = \vec{AH}$$

Điều này đúng vì: $2\vec{OM} = \vec{B'C} = \vec{AH}$, theo a).

c) Ta có: $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 3\vec{HO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{HO} + \vec{OH} = 2\vec{HO}$.

d) Ta có theo b): $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ và $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

$$\Rightarrow \vec{OH} = 3\vec{OG}. \text{ Vậy } OH:OG=3.$$

* Qua lời giải bài toán trên ta thấy, ngoài các thành phần của tư duy sáng tạo đã được thể hiện, trong đó tính nhuần nhuyễn được thể hiện khá rõ nét, cụ thể:

- Việc chứng minh hai vectơ bằng nhau, khi đã nắm được định nghĩa, ta đưa về chứng minh tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành, khi đó thì dễ thấy có điều phải chứng minh.

- Ở phần b) sử dụng phương pháp tương đương để biến đổi đẳng thức vectơ rồi sử dụng phép trừ cũng thể hiện được tính nhuần nhuyễn trong suy luận.

- Trong phần c), thể hiện rõ việc chèn điểm về trái để dẫn đến về phải, không những thể hiện được sự nhuần nhuyễn trong tư duy, mà còn thể hiện được tính nhạy cảm khi kết hợp được kết quả ý b).

- Ngoài ra, sự nhuần nhuyễn và nhạy cảm còn thể hiện rất rõ trong ý d) khi kết hợp được các kết quả trên với nhau.

BT2: Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G .

a) Chứng minh: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;

b) $\forall M$: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Giải: a) Gọi M trung điểm BC thì: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA} + 2\vec{GM} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC} = \\ &= 3\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 3\vec{MG}. \end{aligned}$$

BT3: Cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ. Chứng minh:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0. \text{ (Hệ thức Ôle)}$$

Suy ra định lý: Trong một tam giác thì 3 đường cao đồng quy.

Giải: Ta có: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} =$

$$= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) + \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$$

Xét $\triangle ABC$ với hai đường cao BD và CD thì: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0; \vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0$.

Vậy từ hệ thức Ôle $\Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$, hay đường cao thứ 3 là $AD \perp BC$ và 3 đường cao đồng quy tại D .

BT4: Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$.

a) Chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$

b) Gọi G và G' là trọng tâm hai tam giác, chứng minh:

Giải: a) Gọi G và G' là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$.

Ta có: $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} =$

$$= \vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{G'A'} + \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{G'B'} + \vec{CG} + \vec{GG'} + \vec{G'C'} =$$

$$= 3\vec{GG'} + (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) + (\vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{C'G'}) = 3\vec{GG'}$$

Vậy nếu: $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 0 \Leftrightarrow 3\vec{GG'} = 0 \Leftrightarrow \vec{G} \equiv \vec{G'}$.

$$\text{b) Ta có: } \vec{GG'} = \frac{1}{3}(\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}) \Rightarrow |\vec{GG'}| \leq \frac{1}{3}(|\vec{AA'}| + |\vec{BB'}| + |\vec{CC'}|)$$

Vậy: $|\vec{GG'}| \leq \frac{1}{3}(|\vec{AA'}| + |\vec{BB'}| + |\vec{CC'}|)$. Dấu bằng khi 3 vector cùng hướng.

BT5: Cho ΔABC . Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm thỏa mãn điều kiện:

$$\vec{A'A} + 2\vec{A'B} + 3\vec{A'C} = 0; 2\vec{B'A} + 3\vec{B'B} + \vec{B'C} = 0; 3\vec{C'A} + \vec{C'B} + 2\vec{C'C} = 0$$

a) Chứng minh 6 trung tuyến của ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng quy.

b) Chứng minh mỗi trung tuyến của tam giác này thì song song với một cạnh tương ứng của tam giác kia.

$$\text{Giải: a) Từ giả thiết ta có: } \vec{OA'} = \frac{1}{6}(\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC})$$

$$\vec{OB'} = \frac{1}{6}(2\vec{OA} + 3\vec{OB} + \vec{OC}); \vec{OC'} = \frac{1}{6}(3\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC})$$

$$\text{Cộng lại có: } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} \Leftrightarrow 3\vec{OG} = 3\vec{OG'} \Leftrightarrow \vec{G} \equiv \vec{G'}$$

$\Leftrightarrow \vec{G} \equiv \vec{G'}$ Điều này có nghĩa là 6 trung tuyến của 2 tam giác đồng quy tại trọng tâm $\vec{G} \equiv \vec{G'}$ của hai tam giác.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \vec{GA'} &= \vec{OA'} - \vec{OG} = \frac{1}{6}(\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}) - \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \\ &= \frac{1}{6}(\vec{OC} - \vec{OA}) \Leftrightarrow \vec{GA'} = \frac{1}{6}\vec{AC}. \text{ Vậy } \vec{A'G} \parallel \vec{AC}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\vec{B'G} \parallel \vec{BA}; \vec{C'G} \parallel \vec{CB}$.

BT6: Cho ΔABC , M trung điểm AB, $N \in AC$ thỏa mãn: $NC = 2NA$, E trung điểm MN, F trung điểm BC. Chứng minh:

$$\text{a) } \vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}; \quad \text{b) } \vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

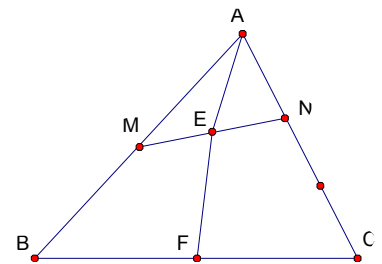
$$\text{Giải: a) Theo giả thiết có: } \vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{AN}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}.$$

b) Tương tự có:

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) - \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}\right) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

+ *Bài tập về tọa độ và vector trên trục:* Qua hệ thống bài tập này học sinh được trang bị kiến thức và kỹ năng cơ bản về tọa độ trên trục. Qua đó cũng thấy lại được nhiều kết quả hình học phẳng quen thuộc trong chương trình THCS, hơn nữa bước đầu các em được làm quen với việc đại số hoá bài toán hình học.



+ *Bài tập về hệ trục tọa độ và phương trình đường thẳng*: Hệ thống bài tập này được xây dựng dựa trên các khái niệm, tính chất của vectơ trên hệ trục, phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng. Ngoài ra, việc tạo nên cấu trúc bài tập còn dựa vào các tính chất của tam giác, tứ giác trong hình học phẳng ở THCS. Do đó, sử dụng thành thạo được các tính chất cơ bản của đường cao, đường trung bình, đường phân giác... của tam giác cũng là thể hiện tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo, tính nhạy cảm của tư duy sáng tạo.

Mặt khác việc phát triển hệ thống bài tập cũng được dựa trên cơ sở vận động của vấn đề, chẳng hạn như: Khi biết 1 đỉnh và 2 đường cao của tam giác, ta xác định được các yếu tố còn lại. Khi cho 2 đường cao thành trung tuyến, phân giác... hay một đường này một đường kia, ta được một hệ thống bài khá hoàn chỉnh về loại này.

Sau đây chỉ giải minh họa hai bài nói về tính nhuần nhuyễn và nhạy cảm vấn đề trong tư duy sáng tạo:

BT7: Cho ΔABC biết $A=(-1,3)$, $B=(-3,-2)$, $C=(4,1)$.

1) Chứng minh ΔABC vuông cân; 2) Tìm tọa độ trọng tâm G .

3) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải: 1) Ta có: $\vec{AB}=(-2,-5)$, $\vec{AC}=(5,-2) \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$ và $AB=AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A .

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = 0 \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \frac{2}{3} \end{cases} \cdot \text{ Vậy } G=(0,2/3).$$

3) Nếu $I=(x,y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác thì ta có: $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 10y = 3 \\ 10x - 4y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $I=(1/2, -1/2)$.

BT8: Cho ΔABC , biết $A=(2,6)$, $B=(-3,-4)$, $C=(5,0)$. Tìm tọa độ trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Giải 1) Nếu $H=(x,y)$ là trực tâm tam giác thì:

$$\begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \cdot 8 + (y-6) \cdot 4 = 0 \\ (x+3) \cdot 3 + (y+4) \cdot (-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow H=(5,0).$$

2) G trọng tâm: Tương tự trên được $G=(4/3, 2/3)$.

3) Tâm đường tròn ngoại tiếp I , tương tự trên có $I=(-1/2, 1)$.

4) Tâm đường tròn nội tiếp J : Gọi $D=(x,y)$ là chân đường phân giác trong góc A ,

$$\text{ta có: } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{\vec{DB}}{\vec{DC}} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \vec{DB} = -\frac{5}{3}\vec{DC} \Rightarrow D = (2, -\frac{3}{2}).$$

Vì J là chân đường phân giác trong góc C của ΔACD , nên tương tự cách làm trên ta có $J=(2,1)$.

BT 9. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AC, E là trung điểm của MH. Chứng minh $AE \perp BH$.

Giải: Vì E trung điểm MH nên ta có: $AE = \frac{1}{2}(AM + AH), BH = BM + MH$
 $\Rightarrow 2AE \cdot BH = AM \cdot BM + AM \cdot MH + AH \cdot BM + AH \cdot MH = AM \cdot MH + AH \cdot BM$
 $= AM \cdot MH + (AM + MH) \cdot BM = MH(AM + BM) =$
 $= MH(AM + MC) = MH \cdot AC = 0$. Vậy : $AE \perp BH$.

+ *Bài tập bất đẳng thức dùng vector* : Phần bài tập này đòi hỏi sự kết hợp giữa bất đẳng thức đại số với vector và tọa độ. Điều đó cũng thể hiện mọi thành phần của tư duy sáng tạo để giải toán. Hệ thống bài tập về phần này khá phong phú và độc đáo

BT10 Cho $2n$ số thực: $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Ta có:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Giải: Xét $x_1 = (a_1, b_1), x_2 = (a_2, b_2), \dots, x_n = (a_n, b_n)$

Ta có: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n, b_1 + b_2 + \dots + b_n)$

Vì $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

BT11 Cho x, y, z bất kỳ. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{x^2 - xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Xét $\vec{a} = \left(x - \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ và $\vec{b} = \left(\frac{z}{2} - x, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{z}{2} - \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

Vì: $|a| + |b| \geq |a + b| \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

BT12 Cho x, y, z bất kỳ. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Xét $\vec{a} = \left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ và $\vec{b} = \left(-x - \frac{z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

Vì: $|a| + |b| \geq |a + b| \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

BT13 Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

Giải: Xét $\vec{a} = (x, \frac{1}{x})$, $\vec{b} = (y, \frac{1}{y})$, $\vec{c} = (z, \frac{1}{z})$. Vì $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$,

$$\begin{aligned} \text{nên ta có: } \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{81}{(x+y+z)^2}} = \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{80}{(x+y+z)^2}} \geq \\ &\geq \sqrt{2\sqrt{(x+y+z)^2 \cdot \frac{1}{(x+y+z)^2}} + \frac{80}{1}} = \sqrt{82}. \text{ Dấu bằng khi } x = y = z = 1/3. \end{aligned}$$

BT 14 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

Giải: Xét $\vec{a}(1-x, y)$, $\vec{b}(x+1, y)$. Vì $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, nên ta có:

$$\begin{aligned} A &\geq \sqrt{4+4y^2} + |y-2| = \sqrt{(\sqrt{3}^2 + 1^2)(1^2 + y^2)} + |y-2| \geq \sqrt{(\sqrt{3}+y)^2} + |y-2| = \\ &= |\sqrt{3}+y| + |2-y| \geq \sqrt{3} + y + 2 - y = \sqrt{3} + 2. \end{aligned}$$

Vậy $\min A = \sqrt{3} + 2$, khi $x=0, y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

BT 15. ứng minh với mọi a, b ta đều có: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$

Giải: Xét $\vec{u} = \left(\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1-a^2}{1+a^2} \right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1-b^2}{1+b^2}, \frac{2b}{1+b^2} \right)$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{2a(1-b^2) + 2b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{2(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2} = 1; |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)^2 + \left(\frac{2b}{1+b^2}\right)^2} = 1$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2 \left| \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \right|. \text{ Vì } |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

+ *Bài tập về đường tròn và elip*: Trong các bài tập này, nếu không sử dụng được tính chất của đường tròn và elip kết hợp với phương pháp tọa độ thì bài toán trở nên rất phức tạp. Điều này cũng thể hiện đầy đủ các thành phần của tư duy sáng tạo. Bài tập phần này nhiều bài khá phức tạp. Do vậy việc sử dụng các thành phần của tư duy sáng tạo tốt sẽ giúp cách giải bài toán gọn nhẹ hơn.

BT 16: Cho đường tròn (C): $(x+2)^2+(y-3)^2=9$. Viết phương trình đường thẳng qua A=(1,1) và cắt (C) theo một dây cung có độ dài ngắn nhất.

Giải : (C) có tâm I=(2,3), R=3. Dễ thấy A nằm trong đường tròn (C).

Giả sử đường thẳng (d) qua A cắt (C) tại M,N. Gọi H là trung điểm của MN thì ta có: $AM \cdot AN = (MH-AH)(NH+AH) = MH^2 - AH^2 = R^2 - (IH^2 + AH^2) =$

$= R^2 - IA^2 = \text{const}$, vì A cố định. Vậy $MN = AM + AN$ nhỏ nhất khi $AM = AN \Leftrightarrow A$ trung điểm dây MN $\Leftrightarrow MN \perp IA$. Ta có: $\overline{AI} = (1,1)$ là pháp tuyến (d) và (d) qua A $\Rightarrow$ Phương trình (d) là: $x+y-2=0$.

BT 17. Viết phương trình đường tròn qua A=(1,0) và tiếp xúc với 2 đường thẳng (d): $x+y-2=0$ và (d'): $x+y+3=0$.

Giải: Vì (d)//(d') nên tâm I nằm trên đường song song chính giữa là (Δ): $x+y+1/2=0 \Rightarrow I=(t, -t-1/2)$ và $R=IA=d(I,d) \Leftrightarrow t=5/4$ và $t=-3/4 \Rightarrow$ Có 2 đường tròn thỏa mãn.

BT 18: Viết phương trình đường tròn qua A=(1,2) và tiếp xúc với 2 đường thẳng (d): $3x-y+3=0$ và (d'): $x-3y+9=0$.

Giải : Tâm I nằm trên phân giác của (d,d') là: $x+y-3=0$ và $x-y+3=0$. Đường tròn qua A nên $R=IA=d(I,d)$.

- Với (Δ): $x+y-3=0$ có $t=5 \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow$ Có 2 đường tròn thỏa mãn.

- Với (Δ): $x-y+3=0$ không tồn tại t.

BT 19 : Viết phương trình đường tròn qua A=(4,-1) và tiếp xúc với đường tròn (C): $x^2+y^2=5$ tại điểm B=(2,1).

Giải: Gọi tâm đường tròn là I=(x,y). Đường tròn (C) có tâm O=(0,0), ta có:

$\overline{OI} = (x,y), \overline{OB} = (2,1)$. Vì đường tròn tiếp xúc (C) tại B nên I,B,O thẳng hàng $\Leftrightarrow \overline{OI}, \overline{OB}$ cùng phương $\Rightarrow x=2y$.

Mặt khác $IA=IB$ nên $(x-4)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x-y-3=0$.

Vậy $x=6, y=3, R^2=20 \Rightarrow$ đường tròn: $(x-6)^2+(y-3)^2=20$.

BT 20: Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=4$. Tìm M trên Ox, Oy, (d): $x+y-2=0$ qua đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến tạo với nhau góc $60^\circ, 90^\circ$.

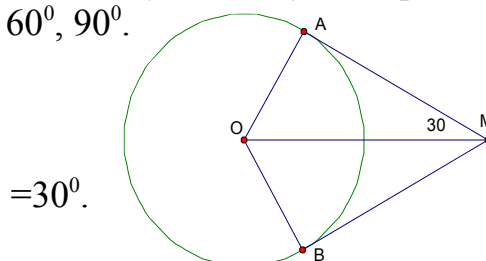
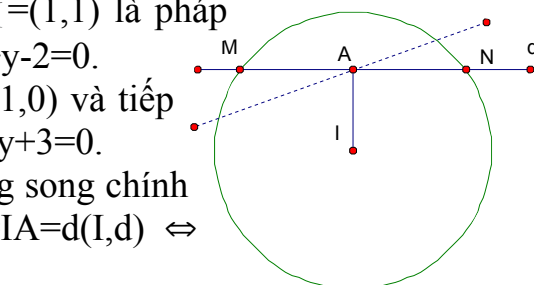
Giải: Lấy một trường hợp góc 60° :

(C) có tâm O=(0,0), bán kính R=2.

$M \in (d) \Rightarrow M=(t, 2-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến tạo với nhau góc 60° thì góc AMO

Trong Δ vuông MAO có: $OA=OM \cdot \sin 30^\circ$

$\Rightarrow t=1 \pm \sqrt{7}$. Vậy có 2 điểm M thỏa mãn.



2.4 Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với học sinh

- Qua quá trình giảng dạy và ôn luyện cho các lớp có trình độ tương đương vào buổi học thêm để so sánh tôi thấy kết quả thực nghiệm tốt hơn nhiều so với lớp đối chứng cụ thể tỉ lệ học sinh khá, giỏi nâng lên yếu, kém và trung bình giảm xuống.

Kết quả Lớp	Giỏi (%)	Khá(%)	Trung bình(%)	Yếu(%)
Đối chứng	2	10	30	10
Thực nghiệm	6	20	26	0

- Được đồng nghiệp trong trường ủng hộ, chọn làm giáo án dạy thêm cho các lớp mình dạy và cho các năm tiếp theo.

3. KẾT LUẬN

Từ quá trình nghiên cứu lý luận và thực tiễn về việc phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh lớp 10 bậc THPT qua dạy học chuyên đề vectơ và tọa độ trong mặt phẳng, có thể rút ra một số kết luận sau:

1. Việc phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh trong nhà trường phổ thông có vị trí rất quan trọng và là một mục tiêu của nền giáo dục phổ thông, đặc biệt trong giai đoạn đổi mới phương pháp dạy học hiện nay.

2. SKKN đã trình bày những khái niệm và tính chất cơ bản của vấn đề tư duy sáng tạo, cũng như những thành phần, vai trò của tư duy sáng tạo áp dụng vào thực tiễn giảng dạy bộ môn.

3. SKKN đã nêu một số biện pháp bồi dưỡng và phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh lớp 10 bậc THPT.

4. SKKN xây dựng hệ thống 20 bài tập cơ bản về hình học vectơ và tọa độ trong mặt phẳng, thể hiện được một số thành phần cơ bản của tư duy sáng tạo vào xây dựng và giải bài tập, mặc dù còn chưa đầy đủ do khuôn khổ của SKKN.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 25 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Người viết Lương Bá Tính
-----------------------------------	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. Pôlia (1975), *Giải một bài toán như thế nào*, Nxb Giáo dục Hà Nội.
2. G. Pôlia (1976), *Sáng tạo toán học*, Nxb Giáo dục Hà Nội.
3. G. Pôlia (1976), *Toán học và những suy luận có lý*, Nxb Giáo dục Hà Nội.

4. Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình (1999), *Toán nâng cao hình học 10*, Nxb Giáo dục.
5. Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình (2006), *Bài tập nâng cao một số chuyên đề hình học 10*, Nxb Giáo dục.
6. Nguyễn Văn Hiến (2006), *Phát triển tư duy sáng tạo của học sinh giỏi ở trường THCS qua chủ đề bất đẳng thức hình học phẳng*, Luận văn thạc sỹ khoa học giáo dục, Trường Đại học sư phạm Thái Nguyên.
7. Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn toán*, Nxb Đại học Sư phạm Hà Nội.
8. Nguyễn Bá Kim, Tôn Thân, Vương Dương Minh (1998), *Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn toán ở trường THCS*, Nxb Giáo dục Hà Nội.
9. Nguyễn Bá Kim, Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cầm, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Thường (1994), *Phương pháp dạy học môn toán*, Nxb Giáo dục.
10. Phan Huy Khải (1998), *Toán nâng cao hình học 10*, Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.
11. Nguyễn Cảnh Toàn, Nguyễn Văn Lê, Nhà giáo Châu An (2005), *Khơi dậy tiềm năng sáng tạo*, Nxb Giáo dục.
12. Trần Thúc Trình (2003), *Rèn luyện tư duy trong dạy học toán*, Viện khoa học giáo dục.