***Chuyên đề 2.***

**PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ NHỊ THỨC NEWTON**

**Chuyên đề này có hai nội dung trọng tâm.**

**Đầu tiên, chúng ta sẽ đi tìm hiểu về phương pháp quy nạp toán học, một công cụ quan trọng và hiệu quả của toán học. Chúng ta làm quen và thực hành sử dụng phương pháo này để chứng minh nhiều loại mệnh đề toán học khác nhau.**

**Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm hiểu sâu hơn và đầy đủ hơn về công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal, cũng như thực hành và vận dụng chúng trong giải toán.**



 **Sau chuyên đề này, bạn có thể:**

* Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh nhiều mệnh để toán học khác nhau.
* Sử dụng công thức nhị thức Newton và tam giác Pascal để khai triển các biểu thức dạng (a + b)n; vận dụng công thức khai triển giải một số bài toán liên quan.

**Bài 1. Phương pháp quy nạp toán học**

**Từ khoá: Quy nạp toán học: Giả thiết quy nạp.**

****Trong một trò chơi domino, các quân domino được xếp theo thứ tự từ quân đầu tiên đến quân cuối cùng. Biết rắng xảy ra hai điều sau:

1) Quân domino đầu tiên đổ;

(2) Nếu quân thứ k đồ thì quân thứ k + 1 đổ.

Có thể kết luận rằng tất cả các quân domino đều đổ

không ? Hãy giải thích.

Trò chơi domino như trên là hình ảnh mô phỏng của một nguyên lí toàn học quan trọng mà ta sẽ tìm hiểu trong bài này.

**1. Phương pháp quy nạp toán học**

Bằng cách tô màu trên lưới ô vuông như hình dưới đây.



một học sinh phát hiện ra công thức sau:

1 +3 +5 + 7+,.., + (2n - 1) = n2  (1)

a) Hãy chỉ ra công thức (1) đúng với n = 1, 2, 3, 4,5.

b) Từ việc tô màu trên lưới ô vuông như Hình 1, bạn học sinh khẳng định rằng công thức (1) chắc chắn đúng với mọi số tự nhiên n $\geq $ 1. Khắng định như vậy đã thuyết phục chưa? Tại sao?

Với mỗi số tự nhiên n $\geq $ 1, công thức (1) là một mệnh đề toán học (mệnh đề) tơi mỗi mệnh đề này phụ thuộc số tự nhiên n $\geq $ 1.

Mỗi lần tô thêm một hàng và cột những ô vuông, bạn học sinh đã kiểm nghiệm công thức (1) thêm một trường hợp của n. Tuy nhiên, bởi tập hợp N\* là vô hạn nên cách làm đó không thể chứng tỏ công thức (1) đúng với mọi n $\in N\*$. Đề đạt được điều này, ta cần dùng suy luận.

Nguyên lí quy nạp toàn học cho ta một phương pháp suy luận mạnh mẽ và hiệu quả để chứng minh nhiều mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên

**Nguyên lí quy nạp toán học**

Giả sử với mỗi số tự nhiên n $\geq $ 1 , P(n) là một mệnh đề, Giả sử hai điều kiện sau thoá mãn:

1) P(1) đúng,

2) Với mọi số tự nhiên k $\geq $ 11, nêu P(k) đúng thì *P(k+ 1)* đúng.

Khi đó, P(n) đúng với mọi số tự nhiên n $\geq $ 1.

Đề chứng minh một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên đúng với mọi n $\in $ N\* bằng phương pháp quy nạp toán học, ta cần thực hiện hai bước:

*Bước 1*. Chỉ ra mệnh đề đúng với n = 1.

*Bước 2.* Giá sử mệnh để đúng với số tự nhiên n = k $\geq $ 1 (gọi là **giả thiết quy nạp**), chứng

minh mệnh đề đúng với n = k + 1

Từ đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, ta kết luận mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên n$\in $ N\*?

***Ví dụ 1***

Bằng phương pháp quy nạp toàn học, chứng minh công thức (1) trong  đúng với n n$\in $ N\*?

**Giải**

*Bước 1*. Với n = 1, công thức (1) trở thành 1 = 12.

Đây là mệnh đề đúng, Vậy (1) đúng với n = 1.

*Bước 2*. Giả sử (1) đúng với n = k$\geq $ 1, nghĩa là ta có

1+ 3 +5 + 7 + ... + (2k - 1) = k2.

Ta cần chứng minh (1) đúng với n = k+ 1, nghĩa là cần chứng minh

 1+ 3 +5 + 7+ …. + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)2

Theo giả thiết quy nạp, ta có

l + 3 +5 + 7+.... (2k - 1) + (2k + 1) =$\left[1 +3+ 5 +7 + (2k - 1)\right]$ + (2k + 1)

= k2 + (2k + 1)

= (k + 1)2.

Vậy (1) đúng với n = k+ 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, (1) đúng với mọi n$\in $ N\*

***Chú ý*:** Đôi khi, ta cần chứng minh mệnh đề P(n) đúng với mợi số tự nhiên *n*$\geq n$*0*, với n0 là số tự nhiên nào đó: Khi đó, trong chứng minh bằng phương pháp quy nap toán học, ở Bước 1 ta chỉ ra mệnh đề đúng với n = n0, và ở Bước 2 ta giả thiết mệnh đề đúng với*n = k* $\geq $*n0.*

***Ví dụ 2***

Chứng minh rằng bất đẳng thức 2n >n2 ở đúng với mọi số tự nhiên n$\geq $5

**Giải**

*Bước 1*. Với n = 5, ta có 2n = 25 = 32 và n2 = 52 = 25. Vì 32 > 25 nên bất đằng thức đúng với

n = 5.

*Bước 2*. Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k$\geq $5, nghĩa là có

2k> k2

Ta chứng minh bắt đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh

2k+1 > (k + 1)2

Sử dụng giả thiết quy nạp, với lưu ý k$ \geq $5, ta có

2k+1 =2. 2k

> 2k2 = k2 + k2 $\geq $ k2 + 5k = k2 + 2k + 3k

> k2 + 2k + 1=(k+1)2

Vậy bất đẳng thức đúng với n= k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, bắt đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n $\geq $ 5.

Chứng minh rằng đằng thức sau đúng với mọi n $\in $ N\*

1 +2 + 3 +.....+n=$\frac{n(n+1)}{2}$

Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên n$\geq $3.

2n+1> n2+n+2

**2. Ứng dụng phương pháp quy nạp toán học**

Phương pháp quy nạp toán học được sử dụng trong nhiều lĩnh vực toàn học khác nhau (số học, đại số, hình học, giải tích, ). Dưới đây, ta xét thêm một vài ứng dụng

***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng 32n+2 - 8n -9 chia hết cho 64 với mọi n $\in $ N\*

**Giải**

Với mỗi n $\in $ N\*, xét mệnh đề (32n+2 - 8n -9 ­)$ \vdots $64. Ta cần chứng minh mệnh đề này đúng với mọi n $\in $ N\*

*Bước 1*. Với n = 1, ta có

3 2n + 2 - 8n - 9 = 34 - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64$ \vdots $ 64.

Vậy mệnh đề đúng với n = 1.

*Bước 2*. Giá sử mệnh đề đúng với n = k$\geq $ 1, nghĩa là có (3 2k+2 - 8k - 9)$ \vdots $64.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với n = k+ 1, nghĩa là cần chứng minh

$[$32(k+1)+2$- 8(k+1)- 9 ]$ $\vdots $ 64

Ta có

32(k+1)+2$- 8(k+1)- 9$= 9 . 32(k+1) - 8k – 17 = 9(32(k+1) -8k -9) $\vdots $ 64

Tổng này có số hạng đầu chia hết cho 64 (do giả thiết quy nạp) và số hạng thứ hai đương nhiên chia hết cho 64, nên nó chia hết cho 64, Vậy mệnh đề đúng với n = k+ 1.

Theo nguyên lí quy nạp toàn học, mệnh đề đúng với mọi n $\in $ N\*

**Ví dụ 4**

Trong mặt phằng, cho n (n$ \geq $ 2) đường thẳng, trong đó không có hai đường thắng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Gọi Sn, là số giao điểm của n đường thẳng này

a) Tính S2, S3, S4, S5 ứng với trường hợp có 2, 3, 4,5 đường thẳng

b) Từ đó, dự đoán công thức tính Sn, và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

**Giải**

a) Từ hình vẽ, ta có kết quả như sau.



b) Ta có:

S2 = 1,

S3 = 3 = S2 + 2 = 1+ 2;

S4 = 6 = S3 +3 = 1+2+3,

S5 = 10 = S4+ 4 = 1+ 2+3 + 4.

Từ đó, ta dự đoán rằng

Sn = 1+ 2+3 +….. + (n - 1) = $\frac{n(n-1)}{2}$ (2)

với mọi số tự nhiên n $\geq $ 2.

Ta sẽ chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học,

*Bước 1.* Với n = 2, ta có S2 = 1 và $\frac{n(n-1)}{2}$ =1 nên công thức (2) đúng với n=2

*Bước 2.* Giả sử (2) đúng với n = k$\geq $ 2 nghĩa là có Sk = $\frac{k(k-1)}{2}$ . Ta chứng minh (2) đúng với mọi n=k+ 1, nghĩa là cần chứng minh:

Sk+1 = $\frac{(k+1)k}{2}$

Gọi đường thẳng thứ *k + 1* là *d*. Theo giả thiết quy nạp, k đường thẳng đã cho cắt nhau tại

Sk = $\frac{k(k-1)}{2} $ điểm . Mặt khác,do không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy nên đường thẳng *d* cắt *k* đường thắng đó tại k điểm khác nhau và khác với Sk điểm kia. Do đó, số giao điểm của *k + 1* đường thẳng này là

Sk+1=Sk+k=$ \frac{k(k-1)}{2}$ +k =$ \frac{k^{2}-k+2k}{2}$ = $\frac{\left(k+1\right)k}{2}$

Vậy công thức (2) đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nap toán học, công thức (2) đúng với mợi số tự nhiên n$\geq $2

Chứng minh rằng n3 + 2n chia hết cho 3 với mọi n $\in $ N\*.

 Chứng minh rằng đẳng thức sau đây đúng với mọi n $\in $ N\*.

1+ q+q2+q3+q4+……qn-1= $\frac{1-q^{n}}{1-q}$

Chứng minh rằng trong mặt phẳng, *n* đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành 2n phần (n $\in $ N\*.)

**(Công thức lãi kép**) Một khoản tiền *A* đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nều không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là *r* không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi *Tn,* là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ n (n $\in $ N\*).

a) Tính T1,T2,T3

b) Từ đó, dự đoán công thức tính Tn, và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

**BÀI TẬP**

**1.** Chứng minh các đằng thức sau đúng với mọi n $\in $ N\*.

a) 1. 2 + 2.3 + 3.4+ …….. = n(n+1)=$\frac{n\left(n+1\right)(n+2)}{3}$

b) 1 + 4 + 9 +…..n2 = $\frac{n\left(n+1\right)(2n+!)}{6}$

c) 1 + 2 + 22 + 23 + 24 + …. 2n-1= 2n-1

**2**. Chứng minh rằng, với mọi n $\in $ N\*.ta có:

a) 52n - 1 chía hết cho 24; b) n3 + 5n chia hết cho 6

**3.** Chứng minh rằng nều x > - 1 thì (1 + x)n $\geq $ 1+ nx với mọi n $\in $ N\*.

**4.** Cho a, b $\geq 0. $Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi n $\in $ N\*.

$$\frac{a^{n}+b^{n}}{2}\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n}$$

**5.** Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên n$\geq $ 2:

1+ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$

**6.** Trong mặt phằng, cho đa giác *A1A2A3… An*, có n cạnh (n $\geq $ 3). Gọi S là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính S3,S4,S5, tương ứng với trường hợp đa giác là tam giác, tứ giác, ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính Sn, và chứng minh công thức đo bằng phương pháp quy nạp toán học.

**7.** Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi *a* đồng. Giả sử lãi suất hằng tháng là *r* không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi Tn (n$\geq 1) $là tổng tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng tại thời điểm ngay sau khi gửi vào khoản thứ n + 1.

a) Tính T1,T2,T3

b) Dự đoán công thức tính Tn và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

*Gợi ý*: Lưu ý công thức ở **Bạn có biết?**

**Bài toán Tháp Hà Nội**

****Bài toàn Tháp Hà Nội là một trò chơi toàn học được nhà toàn học người Pháp ÉdouardLucas (1842 - 1891) phát hiện vào năm 1883. Ngày nay bài toàn trở nên nối tiếng trên thể giới, đặc biệt trong lĩnh vực Khoa học máy tính. Tháp Hà Nội trong trò chơi này gồm ba cột A, B, C) và *n* đĩa có đường kính khác nhau.Mỗi đĩa có lỗ ở giữa để có thể luồn vào các cột (xem Hình 1). Lúc đầu các đĩa đều ở cột *A,* theo thử tự “nhỏ trên lớn dưới” Mục đích của trò chơi là chuyển tất cả các đĩa từ cột *A* sang cột *C* (cột *B* chỉ đóng vai trò trung chuyển) sao cho thoá mãn hai điều kiện:

1. Mỗi bước chỉ được chuyển một đĩa

2. Các đĩa được chuyển qua lại giữa các cột,nhưng ở bất cứ thời điểm nào các đĩa trên mỗi cột đều “nhỏ trên lớn dưới”?.

Bài toán đặt ra là:

*Làm thể nào đề chuyển các đĩa từ cột A sang cột C?*

*Số bước ít nhất bằng bao nhiêu?*

**Gọi Sn là số bước it nhất đề chuyển *n* đĩa từ cột A sang cột C (n$\in N\*$). Có thể dễ dàng chỉ ra S1=1, S2=3. Với n = 3, ta thực hiện các bước như Hình 2 dưới đây và nhận được S3=7

****

Giữa S3 và S2, có mối liên hệ . Thật vậy, để chuyển từ trạng thái đầu tiên đền trạng thái (4) ta cần S2 bước chuyển (Bước 1, 2,3), Tiếp đó, thực hiện một bước (Bước 4) đề chuyển trạng thái (4) sang trạng thái (5). Tiếp theo, thực hiện S2 (Bước 5, 6, 7) đề chuyển trạng thái (5) đến trạng thái (8), Từ đó, ta có S3=2S2+ 1.

Tổng quát hoá quá trình trên, ta có thể tìm được mối liên hệ giữa Sn và Sn-1 (n$\geq $2)

Từ đó, có thể dự đoán công thức tổng quát:

Sn=2n - 1( n=1, 2, 3,…..)

và chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

*Bạn hãy thử thực hiện điều này nhẻ*

*Các bạn có thể cùng chơi trò chơi thủ vị và bổ ích này với các vật dụng sẵn có xung quanh như đồng xu, quyển sách, . thay thể cho các đĩa ở trên.*