

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT**  
**NĂM HỌC 2025 – 2026**  
**MÔN TOÁN**

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: tháng năm 2025

Đề gồm có 03 trang, 18 câu

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM ( 3 điểm gồm 12 câu, mỗi câu 0,25 điểm)**

**Câu 1:** Trong các biểu thức sau đâu là phương trình bậc nhất 1 ẩn

- A.  $2x+3=-6$  .      B.  $x^2-3x=0$  .      C.  $\frac{3}{x}+5=1$  .      D.  $0x+10=-3$  .

**Câu 2.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$  có nghiệm là

- A.  $(2;1)$  .      B.  $(-2;1)$  .      C.  $(-2;-1)$  .      D.  $(2;-1)$  .

**Câu 3.** Căn bậc hai số học của  $25$  là

- A.  $-5; 5$  .      B.  $5$  .      C.  $-5$  .      D.  $\sqrt{5}$  .

**Câu 4.** Biểu thức  $\sqrt{(3-2x)^2}$  (với  $x \leq \frac{3}{2}$ ) bằng

- A.  $|2x-3|$  .      B.  $2x-3$  .      C.  $3-2x$  .      D.  $2x-3$  và  $3-2x$  .

**Câu 5.** Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng  $y=-2x+1$ ?

- A.  $y=2x-1$  .      B.  $y=6-2(x+1)$  .      C.  $y=2x+1$  .      D.  $y=1-(-2x)$  .

**Câu 6.** Đường thẳng  $y=2x-3$  đi qua điểm nào sau đây?

- A.  $N(-1;1)$  .      B.  $Q(-1;-1)$  .      C.  $M(1;1)$  .      D.  $P(1;-1)$  .

**Câu 7.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB=3$ ,  $BC=6$ . Số đo của  $\sphericalangle ACB$  bằng

- A.  $90^\circ$  .      B.  $45^\circ$  .      C.  $60^\circ$  .      D.  $30^\circ$  .

**Câu 8.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH=6\text{cm}$ ,  $BH=4\text{cm}$ . Độ dài cạnh  $BC$  bằng

- A.  $10\text{cm}$  .      B.  $\sqrt{52}\text{cm}$  .      C.  $9\text{cm}$  .      D.  $13\text{cm}$  .

**Câu 9.** Hộp sữa có dạng hình trụ với đường kính đáy là  $12\text{cm}$ , chiều cao của hộp sữa là  $18\text{cm}$ . Thể tích của hộp sữa bằng

- A.  $648\pi\text{cm}^3$  .      B.  $432\pi\text{cm}^3$  .      C.  $216\pi\text{cm}^3$  .      D.  $2592\pi\text{cm}^3$  .

**Câu 10.** Điểm kiểm tra đầu vào môn toán của lớp 9A năm học 2023-2024 được thống kê trong bảng sau:

7	3	5	2	4	8	5	4	8	7	9	8	5	4	8	6	9	6
10	9	3	5	6	6	5	7	5	6	3	7	9	7	8	4	5	7

Tần số ghép nhóm  $[2;4]$  là:

- A. 8      B. 9      C. 10      D. 11

**Câu 11.** Cho 2 túi I và II mỗi túi chứa 3 tấm thẻ được đánh số 2; 3; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra 1 tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất của biến cố “Số tạo thành là số chia hết cho 3”

A.  $\frac{2}{3}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{5}{9}$

D.  $\frac{7}{9}$

**Câu 12.** Gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối đồng chất. Xác suất để “ Tổng số chấm trên 2 con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10” là:

A.  $\frac{5}{6}$

B.  $\frac{1}{6}$

C.  $\frac{11}{36}$

D.  $\frac{7}{36}$

## PHẦN II. TỰ LUẬN ( 7,0 điểm)

**Câu 13:** ( 1,0 điểm )

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

**Câu 14:** ( 1,0 điểm)

Rút gọn biểu thức : 
$$P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4} \right) : \left( 2 - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \right)$$

**Câu 15:** (1,5 điểm) Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$  (1) (m là tham số)

1. Giải phương trình (1) với  $m = 3$

2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}$$

**Câu 16:** (1,0 điểm)

Một chiếc kem ốc quế gồm 2 phần: Phần phía dưới dạng hình nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính đáy của nửa hình nón phía dưới. Thể tích phần kem phía trên bằng  $210\text{cm}^3$ . Tính thể tích của cả chiếc kem?



**Câu 17:** (2,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm C nằm ngoài đường tròn (O). Từ C kẻ các tiếp tuyến CA, CB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng d qua C cắt (O) tại hai điểm phân biệt M, N (M nằm giữa C và N). Đường thẳng AB cắt MN tại K. Gọi I là trung điểm của đoạn MN.

1. Chứng minh rằng tứ giác AOBC nội tiếp trong một đường tròn.

2. Chứng minh rằng  $CM \cdot CN = CI \cdot CK$ .

3. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt CA và CB lần lượt tại E và F. Đường thẳng vuông góc với CO tại O cắt các tia CA và CB lần lượt tại P và Q. Xác định vị trí của

điểm M sao cho  $\frac{PE + QF}{PQ}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 18:** (0,5 điểm).

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z + xy + yz + xz = 6$ .

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 3$$

Chứng minh rằng:

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm)**

Mỗi ý đúng được 0,25 điểm.

<b>Câu</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Đáp án</b>	A	D	B	C	B	D	D	D	A	A	B	B

**Câu 1:** Trong các biểu thức sau đâu là phương trình bậc nhất 1 ẩn

- A.**  $2x+3=-6$       **B.**  $x^2-3x=0$       **C.**  $\frac{3}{x}+5=1$       **D.**  $0x+10=-3$

**Lời giải:**

Phương trình bậc nhất 1 ẩn là phương trình  $2x + 3 = -6$ . **Chọn đáp án A**

**Câu 2.** Hệ phương trình  $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$  có nghiệm là

- A.**  $(2;1)$       **B.**  $(-2;1)$       **C.**  $(-2;-1)$       **D.**  $(2;-1)$

**Lời giải:**

Cộng từng vế của 2 phương trình ta được:  $3x = 6$   
 $x = 2$

Thay  $x = 2$  vào phương trình  $x - y = 3$  ta được:  $2 - y = 3$   
 $y = -1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(x, y) = (2; -1)$ . **Chọn đáp án D**

**Câu 3.** Căn bậc hai số học của  $25$  là

- A.**  $-5; 5$       **B.**  $5$       **C.**  $-5$       **D.**  $\sqrt{5}$

**Lời giải:**

Căn bậc hai số học của  $25$  là  $5$ . **Chọn đáp án B**

**Câu 4.** Biểu thức  $\sqrt{(3-2x)^2}$  (với  $x \leq \frac{3}{2}$ ) bằng

- A.**  $|2x-3|$       **B.**  $2x-3$       **C.**  $3-2x$       **D.**  $2x-3$  và  $3-2x$

**Lời giải:**

Biểu thức  $\sqrt{(3-2x)^2} = 3-2x$  (với  $x \leq \frac{3}{2}$ ). **Chọn đáp án C**

**Câu 5.** Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng  $y = -2x + 1$ ?

- A.**  $y = 2x - 1$       **B.**  $y = 6 - 2(x+1)$       **C.**  $y = 2x + 1$       **D.**  $y = 1 - (-2x)$

**Lời giải:**

Ta có  $y = 6 - 2(x+1) = -2x + 4$

Vậy đường thẳng song song với đường thẳng  $y = -2x + 1$

là đường thẳng  $y = 6 - 2(x + 1)$ . Chọn đáp án B

**Câu 6.** Đường thẳng  $y = 2x - 3$  đi qua điểm nào sau đây?

- A.  $N(-1; 1)$       B.  $Q(-1; -1)$       C.  $M(1; 1)$       D.  $P(1; -1)$

**Lời giải:**

Thay  $x = 1$  vào phương trình  $y = 2x - 3$ , ta được

$$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

Vậy đường thẳng  $y = 2x - 3$  đi qua điểm  $P(1; -1)$ . Chọn đáp án D

**Câu 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ . Số đo của  $\angle ACB$  bằng

- A.  $90^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $30^\circ$

**Lời giải:**

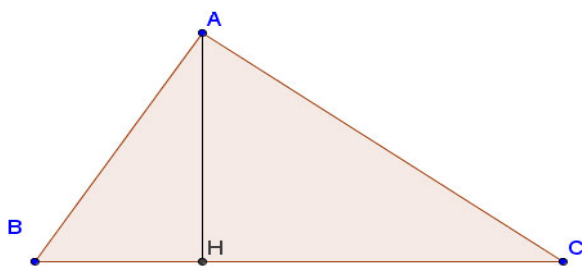
Trong  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , có  $\sin \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Vậy số đo của  $\angle ACB = 30^\circ$ . Chọn đáp án D

**Câu 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH = 6\text{cm}$ ,  $BH = 4\text{cm}$ . Độ dài cạnh  $BC$  bằng

- A.  $10\text{cm}$       B.  $\sqrt{52}\text{cm}$       C.  $9\text{cm}$       D.  $13\text{cm}$

**Lời giải:**



Trong  $\triangle ABH$  vuông tại H, có  $BA^2 = AH^2 + BH^2$

$$BA^2 = 6^2 + 4^2$$

$$BA^2 = 52$$

Mà  $BA^2 = BH \cdot BC$  (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

$$52 = 4 \cdot BC$$

Suy ra  $BC = 52 : 4$

$$BC = 13 \text{ cm. Chọn đáp án D}$$

**Câu 9.** Hộp sữa có dạng hình trụ với đường kính đáy là  $12\text{cm}$ , chiều cao của hộp sữa là  $18\text{cm}$ . Thể tích của hộp sữa bằng

- A.  $648\pi\text{cm}^3$       B.  $432\pi\text{cm}^3$       C.  $216\pi\text{cm}^3$       D.  $2592\pi\text{cm}^3$

**Lời giải:**

Bán kính đáy của hộp sữa là:  $12 : 2 = 6 \text{ cm}$

Thể tích hộp sữa hình trụ là:  $\pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 18 = 648\pi\text{cm}^3$ . Chọn đáp án A

**Câu 10.** Điểm kiểm tra đầu vào môn toán của lớp 9A năm học 2023-2024 được thống kê trong bảng sau:

7	3	5	2	4	8	5	4	8	7	9	8	5	4	8	6	9	6
10	9	3	5	6	6	5	7	5	6	3	7	9	7	8	4	5	7

Tần số ghép nhóm [2;4] là:

**B.** 8

**B.** 9

**C.** 10

**D.** 11

**Lời giải:**

Tần số ghép nhóm [2;4] là: 8 .Chọn đáp án A

**Câu 11.** Cho 2 túi I và II mỗi túi chứa 3 tấm thẻ được đánh số 2; 3; 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra 1 tấm thẻ và ghép thành số có hai chữ số với chữ số trên tấm thẻ rút từ túi I là chữ số hàng chục. Tính xác suất của biến cố “ Số tạo thành là số chia hết cho 3”

**A.**  $\frac{2}{3}$

**B.**  $\frac{1}{3}$

**C.**  $\frac{5}{9}$

**D.**  $\frac{7}{9}$

**Lời giải:**

Không gian mẫu  $\Omega$  là

$$\Omega = \{ 22; 23; 24; 32; 33; 34; 42; 43; 44 \}$$

Do đó, số phần tử của không gian mẫu là 9.

Vì việc lấy mỗi tấm thẻ từ túi I và II là ngẫu nhiên nên các kết quả có thể là đồng khả năng. Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố “ Số tạo thành là số chia hết cho 3” là 24; 33; 42.

Vậy xác suất của biến cố “ Số tạo thành là số chia hết cho 3” là  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

**Chọn đáp án B**

**Câu 12.** Gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối đồng chất. Xác suất để “ Tổng số chấm trên 2 con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10” là:

**A.**  $\frac{5}{6}$

**B.**  $\frac{1}{6}$

Chọn B

**C.**  $\frac{11}{36}$

**D.**  $\frac{7}{36}$

**Lời giải:**

Không gian mẫu là  $6.6 = 36$ . Các giá trị tổng thể lớn hơn hoặc bằng 10 là:

$$\{ 4; 6 \}; \{ 5; 5 \}; \{ 5; 6 \}; \{ 6; 4 \}; \{ 6; 5 \}; \{ 6; 6 \}$$

Do đó xác suất để “ Tổng số chấm trên 2 con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10” là:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

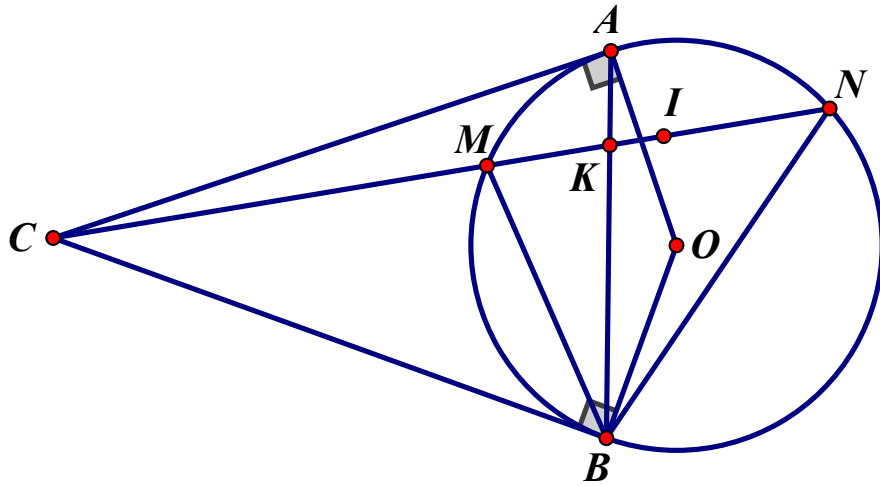
**Chọn đáp án B**

**PHẦN II. TỰ LUẬN ( 7,0 điểm)**

Câu	Nội dung	Điểm
<b>13</b> <b>(1đ)</b>	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$	<b>1,00</b>
	Cộng từng vế của 2pt ta đc $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ suy ra	0,75
	Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2; -2)$	0,25
	Rút gọn biểu thức : $P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4} \right) : \left( 2 - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \right)$	<b>1,00</b>

	$P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4} \right) : \left( 2 - \frac{2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}} \right)$	
	$= \left( \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} + \frac{8\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} \right) : \left( \frac{2(\sqrt{x+2}) - 2\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x+2})} \right)$	0,25
	$= \frac{3x - 6\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} : \frac{2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x+2})}$	0,25
	$= \frac{2x}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{1}$	0,25
	$= \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$	0,25
<b>15</b> <b>(1,5đ)</b>	Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$ (1) (m là tham số) 1. Giải phương trình (1) với $m = 3$ 2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn: $\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}$	<b>1,50</b>
	1. Giải phương trình (1) với $m = 3$ Với $m = 3$ phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$	<b>0,75</b>
	Phương trình có $a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0$	0,5
	nên có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 3$	0,25
	Vậy với $m = 3$ phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 3\}$	0,25
2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn: $\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}$	<b>0,5</b>	
$\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (2m - 3) = 4 - 2m + 3 = 7 - 2m$ Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thì $\Delta' > 0$ Khi $7 - 2m > 0$ suy ra $m < \frac{7}{2}$ (1)	0,25	
Vì $x_1, x_2$ nằm trong các căn bậc hai nên phải có điều kiện $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$ Vì $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ nên $x_1 x_2 \geq 0$ khi $2m - 3 \geq 0$ suy ra $m \geq \frac{3}{2}$ (2)	0,25	
Kết hợp (1) và (2) ta được $\frac{3}{2} \leq m < \frac{7}{2}$		
Theo bài ra: $\sqrt{3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{x_1 x_2 + 17}$	0,25	

	$3(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}) = x_1x_2 + 17$ $4(4 + 2\sqrt{2m-3}) = 2m - 3 + 17$ $6\sqrt{2m-3} = 2m + 2$ $3\sqrt{2m-3} = m + 1$ $\begin{cases} m \geq -1 \\ 9(2m-3) = m^2 + 2m + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} m \geq -1 \\ m^2 - 16m + 28 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m \geq -1 \\ m = 2 \\ m = 14 \end{cases}$ <p>So sánh với điều kiện trên ta được giá trị <math>m = 2</math>          Vậy <math>m = 2</math> là giá trị cần tìm.</p>	
<b>16</b> <b>(1đ)</b>	<p>Một chiếc kem ốc quế gồm 2 phần: Phần phía dưới dạng hình nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính đáy của nửa hình nón phía dưới. Thể tích phần kem phía trên bằng <math>210\text{cm}^3</math>. Tính thể tích của cả chiếc kem?</p>	<b>1,00</b>
	<p>Thể tích phần kem phía trên là : <math>S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3</math> với R là bán kính của hình cầu.</p>	0,25
	<p>Thể tích phần hình nón phía dưới là: <math>S_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot (2R) = \frac{2}{3} \pi R^3</math> với R là bán kính hình tròn đáy.</p>	0,25
	<p>Suy ra <math>S_1 = S_2 = 210(\text{cm}^3)</math></p>	0,25
	<p>Vậy thể tích cả chiếc kem là: <math>S = S_1 + S_2 = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot 210 = 420(\text{cm}^3)</math></p>	0,25
<b>17</b> <b>(2đ)</b>	<p>Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm C nằm ngoài đường tròn (O). Từ C kẻ các tiếp tuyến CA, CB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng d qua C cắt (O) tại hai điểm phân biệt M, N (M nằm giữa C và N). Đường thẳng AB cắt MN tại K. Gọi I là trung điểm của đoạn MN.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Chứng minh rằng tứ giác AOBC nội tiếp trong một đường tròn.</li> <li>2. Chứng minh rằng <math>CM \cdot CN = CI \cdot CK</math>.</li> <li>3. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt CA và CB lần lượt tại E và F. Đường thẳng vuông góc với CO tại O cắt các tia CA và CB lần lượt tại P và Q. Xác định vị trí của điểm M sao cho <math>\frac{PE + QF}{PQ}</math> đạt giá trị nhỏ nhất.</li> </ol>	<b>2,00</b>



1. Chứng minh rằng tứ giác AOBC nội tiếp trong một đường tròn.

Giả sử D là trung điểm của CO

0,25

Xét  $\triangle CAO$  vuông tại A,  $\triangle CBO$  vuông tại B có D là trung điểm của CO

Suy ra  $DA = DC = DB = DO$

0,5

Hay 4 điểm A, O, B, C thuộc đường tròn tâm D đường kính CO

Do đó, tứ giác AOBC là tứ giác nội tiếp.

0,25

2. Chứng minh rằng  $CM \cdot CN = CI \cdot CK$ .

Xét hai tam giác  $\triangle CBM$  và  $\triangle CNB$ , có:

$\hat{C}$  chung

$\hat{M} = \hat{N}$  ( góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và dây cùng chắn một cung)

Do đó:  $\triangle CBM \sim \triangle CNB$  (g.g)

$$\frac{CB}{CN} = \frac{CM}{CB}$$

Suy ra:  $CB^2 = CN \cdot CM$  (1)

Mặt khác,  $OI \perp MN$  ( đường kính đi qua trung điểm của dây)

Suy ra A, I, B cùng nhìn đoạn CO dưới một góc vuông

Do vậy 5 điểm A, O, I, B, C cùng thuộc đường tròn đường kính CO.

Suy ra

$\hat{I} = \hat{B}$  ( hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét hai tam giác  $\triangle CIB$  và  $\triangle CBK$  có:

$\hat{I} = \hat{B}$  ( cm trên)

$\hat{C}$  chung

$\triangle CIB \sim \triangle CBK$  (g.g)

$$\frac{CI}{CB} = \frac{CB}{CK}$$

Suy ra  $CB^2 = CI \cdot CK$  (2)

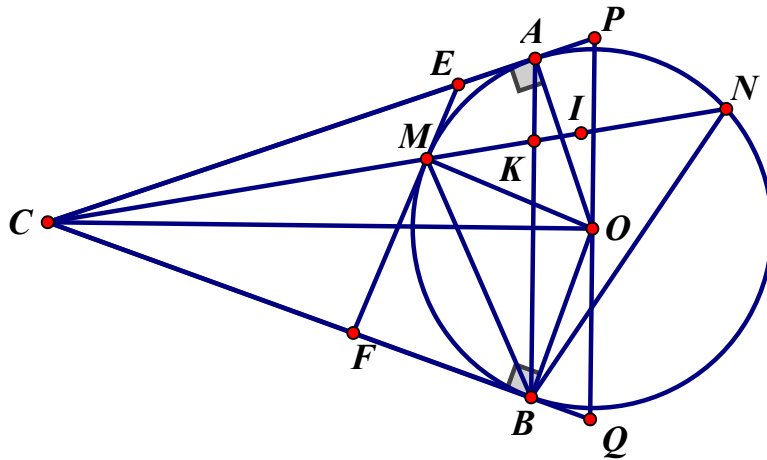
Từ (1) và (2) suy ra:  $CM \cdot CN = CI \cdot CK$  (đpcm).

0,25

0,25



3. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt CA và CB lần lượt tại E và F. Đường thẳng vuông góc với CO tại O cắt các tia CA và CB lần lượt tại P và Q.  
 Xác định vị trí của điểm M sao cho  $\frac{PE + QF}{PQ}$  đạt giá trị nhỏ nhất.



Ta có:  $\angle PEF + \angle QFE + \angle EPQ + \angle FQP = 360^\circ$  (tổng 4 góc trong tứ giác PEFQ)  
 Vì  $\angle PEF = 2\angle PEO$ ;  $\angle QFE = 2\angle QFO$ ;  $\angle EPQ + \angle FQP = 2\angle EPO$   
 Suy ra  $2\angle PEO + 2\angle QFO + 2\angle EPO = 360^\circ$ ;  $\angle PEO + \angle QFO + \angle EPO = 180^\circ$   
 Lại có,  $\angle PEO + \angle POE + \angle EPO = 180^\circ$  (tổng 3 góc trong tam giác)  
 $\angle POE = \angle QFO$

Xét hai tam giác POE và QFO có:

$\angle POE = \angle QFO$  (cm trên)  
 $\angle OPE = \angle OQF$  ( $\triangle CPQ$  cân tại C)  
 $\triangle POE \sim \triangle QFO$  (g.g)

$$\frac{PE}{QO} = \frac{PO}{QF}$$

Suy ra  $PE \cdot QF = OP \cdot OQ = OP^2$  (không đổi)

$$\frac{PE + QF}{PQ} \geq 2 \cdot \frac{\sqrt{PE \cdot QF}}{PQ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{OP^2}}{PQ} = 2 \cdot \frac{PO}{PQ} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $PE = QF$ ;  $CE = CF$ ;  $EF \parallel PQ$ .

Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ  $\overset{\frown}{AB}$ .

Vậy  $\frac{PE + QF}{PQ}$  nhỏ nhất khi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

18

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z + xy + yz + zx = 6$

(0,5đ)

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 3$$

Chứng minh rằng:

0,5

	$P = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x}$ <p>Đặt</p> <p>Vì <math>x, y, z</math> là các số thực dương, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:</p> $\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy \geq 2x^2 \\ \frac{y^3}{z} + yz \geq 2y^2 \\ \frac{z^3}{x} + xz \geq 2z^2 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)$ <p>mà <math>x + y + z + xy + yz + zx = 6</math></p> $P \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - 6$	0,25
	<p>Mặt khác: <math>(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0</math></p> $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$ $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ <p>Suy ra <math>P \geq \frac{2}{3}(x + y + z)^2 + (x + y + z) - 6</math></p> <p>mà <math>xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2</math></p> <p>Do đó</p> $6 = x + y + z + xy + yz + zx \leq x + y + z + \frac{1}{3}(x + y + z)^2$ $\frac{1}{3}(x + y + z)^2 + (x + y + z) - 6 \geq 0 \Rightarrow (x + y + z) \geq 3 \quad (x + y + z)^2 \geq 9$ <p>Suy ra <math>P \geq \frac{2}{3} \cdot 9 + 3 - 6 = 3</math></p> <p>Dấu đẳng thức xảy ra khi <math>x = y = z = 1</math>.</p> $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 3$ <p>Vậy <math>\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq 3</math> (đpcm).</p>	0,25

**(Lưu ý: Nếu học sinh có cách giải đúng khác đáp án vẫn cho điểm tối đa)**

