

$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2013}{x}$$

Câu 1. (4 điểm) Cho biểu thức :

- Tìm điều kiện của x để biểu thức xác định
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
- Tìm giá trị nguyên của x để đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ chia hết cho $g(x) = x^2 + x + 1$

Câu 3. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

- b) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Câu 4. (6 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM , đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E

- Chứng minh : $EA.EB = ED.EC$ và $\angle EAD = \angle ECB$
- Cho $\angle BMC = 120^\circ$ và $S_{AED} = 36cm^2$. Tính S_{EBC}
- Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi
- Kẻ $DH \perp BC (H \in BC)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, DH . Chứng minh $CQ \perp PD$

Câu 5. (2 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Điều kiện $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2013}{x} \\ &= \frac{(x+1+x-1)(x+1-x+1) + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2013}{x} \\ &= \frac{x+2013}{x} \end{aligned}$$

b)

c) Ta có A nguyên $\Leftrightarrow (x+2013):x \Leftrightarrow x \in U(2013)$

Vậy x là ước của 2013, $x \neq \pm 1$

Câu 2.

a)
$$\begin{aligned} x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 &= (x^4 - x) + (2013x^2 + 2013x + 2013) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

b) Thực hiện phép chia $x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ cho $x^2 + x + 1$

Ta được thương là $x - 4$, dư là 3

Để $f(x):g(x)$ thì $3:(x^2 + x + 1)$ mà $x^2 + x + 1 > 0$ nên

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; x = 0 \\ x = 1; x = -2 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0; -1; 1; -2\}$ thì $f(x):g(x)$

Câu 3.

a)
$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 258$$

b) Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x+11$

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11} (x \neq -11)$

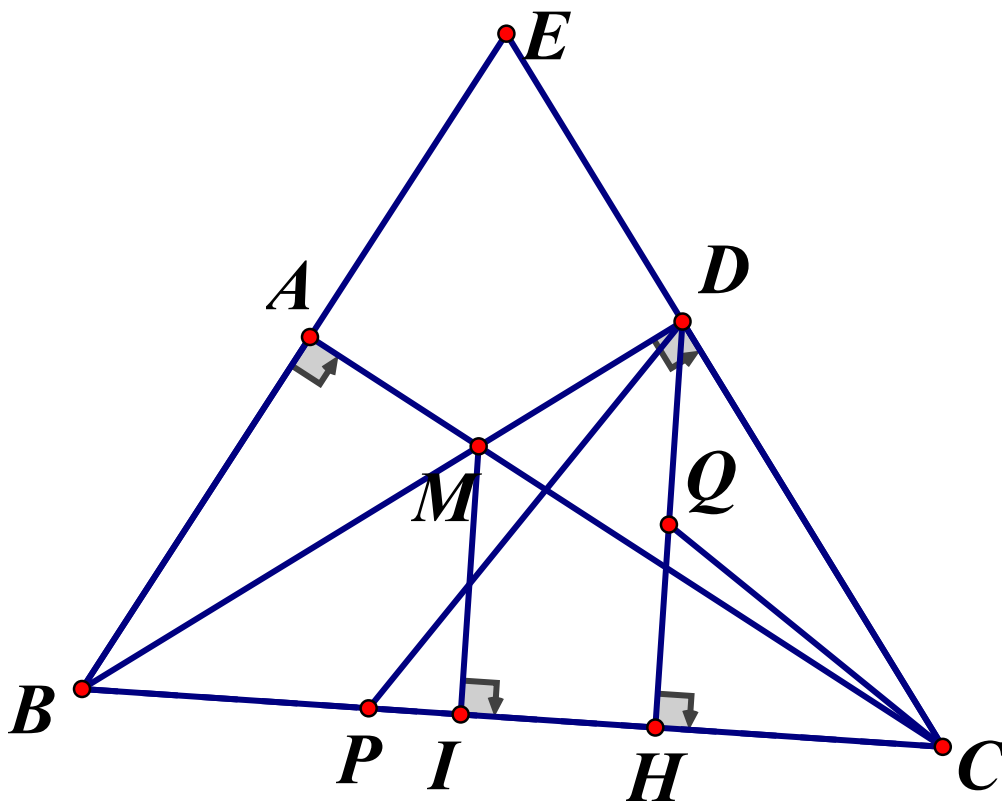
Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Giải phương trình và tìm được $x = -5$ (thỏa mãn)

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Câu 4.



a) *Chứng minh $EA.EB = ED.EC$

Chứng minh $\triangle EBA \sim \triangle ECD (gg) \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA.EB = EC.ED$

*Chứng minh $\angle EAD = \angle ECB$

Chứng minh $\triangle EAD \sim \triangle ECB (cgc) \Rightarrow \angle EAD = \angle ECB$

b) Từ $\angle BMC = 120^\circ \Rightarrow \angle AMB = 60^\circ \Rightarrow \angle ABM = 30^\circ$

Xét $\triangle EDB$ vuông tại D có $\angle B = 30^\circ \Rightarrow ED = \frac{1}{2}EB \Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{1}{2}$

Lý luận cho $\frac{S_{EAD}}{S_{ECB}} = \left(\frac{ED}{EB} \right)^2 \Rightarrow S_{ECB} = 144 \text{ cm}^2$

c) Chứng minh $\triangle BMI \sim \triangle BCD (g.g)$

Chứng minh $CM.CA = CI.BC$

Chứng minh $BM.BD + CM.CA = BC^2$ có giá trị không đổi

d) Chứng minh $\triangle BHD \sim \triangle DHC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2BP}{2DQ} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{DQ} = \frac{BD}{DC}$$

Chứng minh $\triangle DPB \sim \triangle CQD$ (cgc) $\Rightarrow \angle BDP = \angle CQD$

Mà $\angle BDP + \angle PCQ = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$

Câu 5.

$$P = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Vậy $P_{\min} = 9 \Leftrightarrow a = b = c$