TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I**
HÀ NỘI – AMSTERDAM	**NĂM HỌC 2020-2021**
TỔ TOÁN – TIN HỌC	**Môn: TOÁN LỚP 8**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Thời gian làm bài: 90 phút**

Bài 1 (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}\right):\frac{x-2}{x^2-1}$.

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của biểu thức P, biết rằng $|2x-1|=3$.

3) Với $a>2$, chứng minh rằng $P\ge 8$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2 (2,5 điểm)

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A(x)=x^4-5x^2+4$.

b) $B(x;y)=x^4-x^2+2xy-y^2$.

2) Tìm tất cả các số thực x biết $x^3-4x^2-x+4=0$.

Bài 3 (1,0 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(2)=1$ và $P(-2)=3$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức x^2-4.

Bài 4 (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, điểm M nằm trên đường chéo AC (M khác với A và C). Gọi H, K, P và Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CD, AD, BC và AB.

1) Chứng minh các tứ giác $MHCP$, $MQAK$ là các hình vuông.

2) Chứng minh rằng $\Delta KAB=\Delta HDA$ và $BK\perp AH$.

3) Xét điểm I thay đổi trên đoạn CO, không trùng với O. Gọi S là điểm đối xứng với B qua I. Dựng $SN\perp CD$ tại N, các đường thẳng BS và CD cắt nhau tại L. Chứng minh DL là phân giác của $\widehat{BDS}$.

4) Chứng minh rằng: $BC+SN>2DL$.

Bài 5 (0,5 điểm)

1) Dành cho các lớp 8B, 8C, 8D, 8E

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ và $a^3+b^3+c^3=8$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a^4+b^4+c^4$.

2) Dành riêng cho lớp 8A

Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4ab+2bc+ca$.

-------------------------**HẾT**-------------------------

Chú ý: - *Học sinh không sử dụng máy tính khi làm bài.*

- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

TRƯỜNG THPT CHUYÊN
HÀ NỘI – AMSTERDAM
TỔ TOÁN – TIN HỌC

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I
NĂM HỌC 2020-2021
Môn: TOÁN LỚP 8
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^2}\right):\frac{x-2}{x^2-1}$.

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của biểu thức P, biết rằng $|2x-1|=3$.

3) Với $x>2$, chứng minh rằng $P\ge 8$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

1) Ta có: $P=\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right):\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$

P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ne 0 \\ x-1\ne 0 \\ x-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -1 \\ x\ne 1 \\ x\ne 2 \end{cases}$

Khi đó: $P=\frac{x(x-1)+x+1-1}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=\frac{x^2-x+x}{x-2}=\frac{x^2}{x-2}$

Vậy ĐKXĐ là $x\ne \pm 1$; $x\ne 2$ và $P=\frac{x^2}{x-2}$.

2) Ta có: $|2x-1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=3 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 \\ 2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy khi $|2x-1|=3$ thì giá trị của biểu thức P không xác định.

3) Với $x\ne \pm 1$; $x\ne 2$. Ta có: $P=\frac{x^2}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2}=(x-2)+\frac{4}{x-2}+4$

Với a; b là hai số dương ta có: $(a-b)^2\ge 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$

$\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Rightarrow a^2+2ab+b^2\ge 2ab+2ab \Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

Áp dụng với $a=x-2$ và $b=\frac{4}{x-2}$, ta được: $\left[(a-2)+\frac{4}{a-2}\right]^2\ge 4\cdot(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}=16$

$\Rightarrow (x-2)+\frac{4}{x-2}\ge 4 \Rightarrow (x-2)+\frac{4}{x-2}+4\ge 8$ hay $P\ge 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Leftrightarrow x-2=\frac{4}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=2 \Leftrightarrow x=4 \\ x-2=-2 \Leftrightarrow x=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=4$ (do $x>2$)

Vậy với $x>2$ thì $P\ge 8$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=4$.

Bài 2 (2,5 điểm)

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A(x)=x^4-5x^2+4$.

b) $B(x;y)=x^4-x^2+2xy-y^2$.

2) Tìm tất cả các số thực x biết $x^3-4x^2-x+4=0$.

Lời giải

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A(x)=x^4-5x^2+4=x^4-x^2-4x^2+4=(x^4-x^2)-(4x^2-4)$

$=x^2(x^2-1)-4(x^2-1)=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

b) $B(x;y)=x^4-x^2+2xy-y^2=x^4-\left(x^2-2xy+y^2\right)=\left(x^2\right)^2-\left(x-y\right)^2$

$=\left[x^2-(x-y)\right]\left[x^2+(x-y)\right]=\left(x^2-x+y\right)\left(x^2+x-y\right).$

2) $x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\Leftrightarrow x=4\\x-1=0\Leftrightarrow x=1\\x+1=0\Leftrightarrow x=-1\end{array}\right.$$

Vậy $x\in\{-1;1;4\}$.

Bài 3 (1,0 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(2)=1$ và $P(-2)=3$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức x^2-4.

Lời giải

Gọi đa thức $Q(x)$ là đa thức thương và $ax+b$ là đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức x^2-4 $\Rightarrow P(x)=\left(x^2-4\right).Q(x)+ax+b$

Do đó: $\begin{cases}P(2)=1\\P(-2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1\\-2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=-2\\2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=2\end{cases}$

Vậy đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức x^2-4 là $-\dfrac{1}{2}x+2$.

Bài 4 (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, điểm M nằm trên đường chéo AC (M khác với A và C). Gọi H, K, P và Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CD, AD, BC và AB.

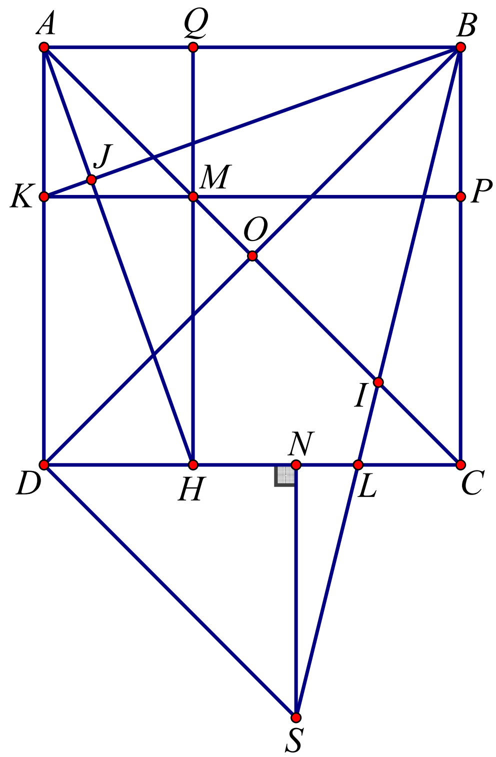
1) Chứng minh các tứ giác $MHCP$, $MQAK$ là các hình vuông.

2) Chứng minh rằng $\Delta KAB=\Delta HDA$ và $BK\perp AH$.

3) Xét điểm I thay đổi trên đoạn CO, không trùng với O. Gọi S là điểm đối xứng với B qua I. Dựng $SN\perp CD$ tại N, các đường thẳng BS và CD cắt nhau tại L. Chứng minh DL là phân giác của $\widehat{BDS}$.

4) Chứng minh rằng: $BC+SN>2DL$.

Lời giải



1) Do H, K, P và Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CD, AD, BC và AB

$\Rightarrow \widehat{MHC}=90°$; $\widehat{MPC}=90°$; $\widehat{MQA}=90°$; $\widehat{MKA}=90°$

Hình vuông $ABCD \Rightarrow \widehat{PCH}=90°$; $\widehat{QAK}=90°$; AM, CM lần lượt là phân giác của $\widehat{QAK}$; $\widehat{PCH}$

- $\widehat{PCH}=\widehat{MHC}=\widehat{MPC}=90° \Rightarrow$ Tứ giác $MHCP$ là hình chữ nhật

AM là phân giác của $\widehat{QAK} \Rightarrow$ Hình chữ nhật $MHCP$ là hình vuông

- $\widehat{QAK}=\widehat{MQA}=\widehat{MKA}=90° \Rightarrow$ Tứ giác $MQAK$ là hình chữ nhật

CM là phân giác của $\widehat{PCH} \Rightarrow$ Hình chữ nhật $MQAK$ là hình vuông.

2) $\widehat{MKD}=\widehat{MHD}=\widehat{HDK}=90° \Rightarrow$ Tứ giác $MHDK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DH=MK$
Hình vuông $MQAK \Rightarrow MK=AK \Rightarrow DH=AK$; hình vuông $ABCD \Rightarrow AB=AD$
Xét tam giác ΔKAB vuông tại A và ΔHDA vuông tại D có: $DH=AK$; $AB=AD$
$\Rightarrow \Delta KAB=\Delta HDA$ (hai cạnh góc vuông)
Gọi J là giao điểm của AH và $BK \Rightarrow \widehat{KAJ}=\widehat{KBA}$ (do $\Delta KAB=\Delta HDA$)
Mà $\widehat{KAJ}+\widehat{BAJ}=\widehat{BAD}=90° \Rightarrow \widehat{KBA}+\widehat{BAJ}=90° \Rightarrow \widehat{AJB}=90° \Rightarrow BK\perp AH$.
3) O là tâm của hình vuông $ABCD$ $\Rightarrow O$ là trung điểm của BD và $OC\perp BD$
O là trung điểm của BD, I là trung điểm của $BS \Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔBDS
$\Rightarrow OI \,//\, DS$ hay $OC \,//\, DS$, mà $OC\perp BD \Rightarrow BD\perp DS \Rightarrow \widehat{BDS}=90°$

Hình vuông $ABCD \Rightarrow DB$ là phân giác của $\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{BDC}=\dfrac{\widehat{ADC}}{2}=\dfrac{90°}{2}=45°$

$\Rightarrow \widehat{CDS}=\widehat{BDS}-\widehat{BDC}=90°-45°=45° \Rightarrow \widehat{BDC}=\widehat{CDS}$

$\Rightarrow DC$ hay DL là tia phân giác của $\widehat{BDS}$.
4) Gọi $OB=x$; $OI=y$ ($x>y>0$) $\Rightarrow OC=x$

ΔBOC vuông cân tại $O \Rightarrow BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=x\sqrt{2} \Rightarrow DC=x\sqrt{2}$

OI là đường trung bình của $\Delta BDS \Rightarrow OI=\dfrac{1}{2}DS \Rightarrow DS=2OI=2y$

ΔNDS vuông tại N, $\widehat{CDS}=45° \Rightarrow \Delta NDS$ vuông cân tại N

$\Rightarrow ND^2+NS^2=DS^2 \Rightarrow ND^2+ND^2=(2y)^2 \Rightarrow ND^2=2y^2 \Rightarrow SN=ND=\sqrt{2y^2}=y\sqrt{2}$

ΔBOI vuông tại $O \Rightarrow BI=\sqrt{OB^2+OI^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow BS=2BI=2\sqrt{x^2+y^2}$

Do $SN \,//\, BC$ (cùng $\perp DC$) $\Rightarrow \dfrac{BL}{LS}=\dfrac{BC}{NS} \Rightarrow \dfrac{BL}{LS}=\dfrac{x\sqrt{2}}{y\sqrt{2}}=\dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{BL}{BL+LS}=\dfrac{x}{x+y} \Rightarrow \dfrac{BL}{BS}=\dfrac{x}{x+y} \Rightarrow BL=\dfrac{x.BS}{x+y}=\dfrac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$

Ta có: $LC^2=BL^2-BC^2=\left(\dfrac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{2x^2(x-y)^2}{(x+y)^2}$

$\Rightarrow LC=\dfrac{x(x-y)\sqrt{2}}{x+y} \Rightarrow DL=DC-LC=x\sqrt{2}-\dfrac{x(x-y)\sqrt{2}}{x+y}=\dfrac{2xy\sqrt{2}}{x+y}$

Với x; $y>0$ ta có: $(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2\ge 2xy \Rightarrow (x+y)^2\ge 4xy$

$\Rightarrow x+y\ge \dfrac{4xy}{x+y} \Rightarrow (x+y)\sqrt{2}\ge \dfrac{4xy\sqrt{2}}{x+y} \Rightarrow BC+SN\ge 2DL$

Bài 5 (0,5 điểm)

1) Dành cho các lớp 8B, 8C, 8D, 8E

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ và $a^3+b^3+c^3=8$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a^4+b^4+c^4$.

Lời giải

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2;b^2;c^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le a;b;c \le 2 \Rightarrow 2-a;2-b;2-c \ge 0$

Ta có: $2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)=8-8=0$

$\Rightarrow \left(2a^2-a^3\right)+\left(2b^2-b^3\right)+\left(2c^2-c^3\right)=0$

$\Rightarrow a^2\left(2-a\right)+b^2\left(2-b\right)+c^2\left(2-c\right)=0$

Mà $a^2\left(2-a\right)\ge 0$; $b^2\left(2-b\right)\ge 0$; $c^2\left(2-c\right)\ge 0$

$\Rightarrow a^2\left(2-a\right)=b^2\left(2-b\right)=c^2\left(2-c\right)=0$

Mà $a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow \left(a;b;c\right)=\left(2;0;0\right)$ và các hoán vị của nó

$\Rightarrow P=a^4+b^4+c^4=2^4=16$

2) Dành riêng cho lớp 8A

Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4ab+2bc+ca$.

Lời giải

$a+b+c=1 \Rightarrow a+b=1-c$

Ta có: $\left(a-b\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow \left(a+b\right)^2 \ge 4ab$

Hay $4ab \le \left(a+b\right)^2 \Rightarrow 4ab \le \left(1-c\right)^2 \Rightarrow 4ab \le 1-2c+c^2$ $\quad(1)$

Lại có: $2bc+ca \le 2bc+2ca$ (do a; c là các số không âm)

$\Rightarrow 2bc+ca \le 2c\left(a+b\right) \Rightarrow 2bc+ca \le 2c\left(1-c\right) \Rightarrow 2bc+ca \le 2c-2c^2$ $\quad(2)$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều (1) và (2) ta được:

$4ab+2bc+ca \le 1-2c+c^2+2c-2c^2 \Rightarrow P \le 1-c^2 \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c=0$; $a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy $MaxP=1$ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$; $c=0$.

-------------------------**HẾT**-------------------------