

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

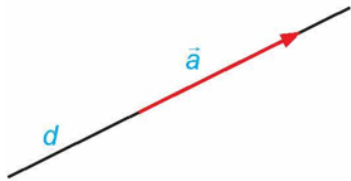
Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $a, b, x, y, \dots$

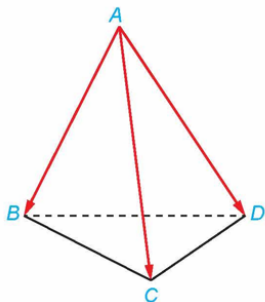
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ a được kí hiệu là $|a|$.

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ



được gọi là giá của vectơ đó.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1.



a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.

Giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

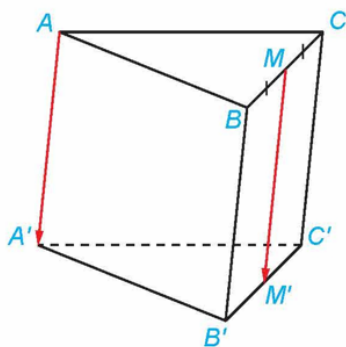
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ a và b được gọi là bằng nhau, kí hiệu $a = b$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ a cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = a$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.



a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{BB'}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BB'}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BB'}$ không bằng nhau.

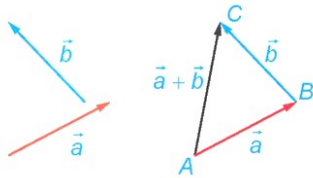
b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BB'}$. Hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, suy ra $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

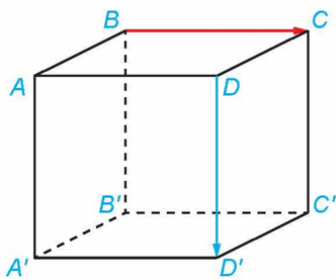
Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$;
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\vec{BC} + \vec{DD'}$.



Giải

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\vec{BC} = \vec{AD}$.

Do đó $\vec{BC} + \vec{DD'} = \vec{AD} + \vec{DD'} = \vec{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $|\vec{BC} + \vec{DD'}| = \sqrt{2}$.

Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

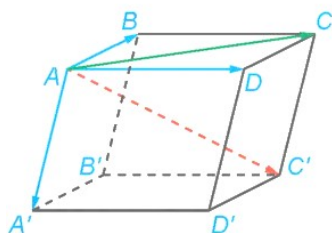
Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
Giải

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vector trong không gian, ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Quy tắc hình hộp.



Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
Giải

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vector trong không gian

Trong không gian, vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector a được gọi là vector đối của vector a , kí hiệu là $-a$.

Chú ý

- Hai vector là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

- Vector $\overrightarrow{BA}$ là một vector đối của vector $\overrightarrow{AB}$.

- Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó.

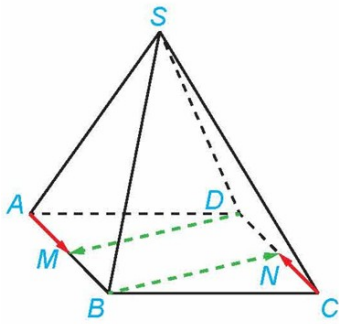
Tương tự như hiệu của hai vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vector trong không gian:

Vector $a + (-b)$ được gọi là hiệu của hai vector a và b và kí hiệu là $a - b$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng:



a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vector đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.

Giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM \parallel CN$. Hai vector $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vector đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}$.

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vector trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vector trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vector $a \neq 0$ là một vector, kí hiệu là ka , được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector a nếu $k > 0$; ngược hướng với vector a nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |a|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vector được gọi là phép nhân một số với một vector.

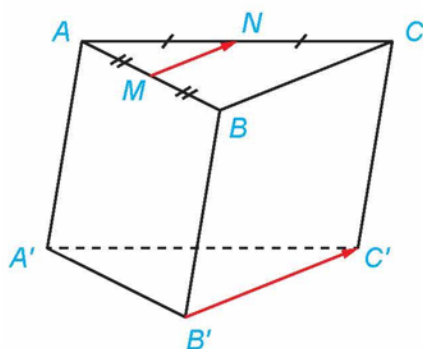
Chú ý

- Quy ước $ka = 0$ nếu $k = 0$ hoặc $a = 0$.

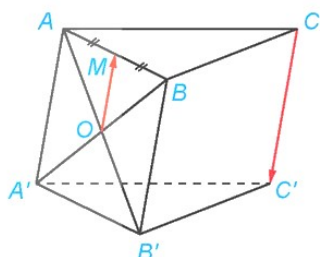
- Nếu $ka = 0$ thì $k = 0$ hoặc $a = 0$.

- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vector a và $b (b \neq 0)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $a = kb$.

Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .



Gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$.



Chúng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Giải

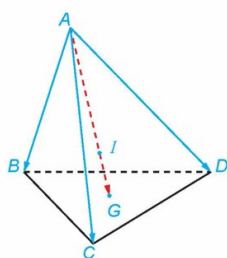
Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B \parallel OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B \parallel CC'$ và $B'B = CC'$.

Do đó $CC' \parallel OM$ và $CC' = 2OM$. Vì hai vector $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vector trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và a là một vector bất kì thì $h(ka) = (hk)a$.
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và a, b là hai vector bất kì thì $(h+k)a = ha + ka$ và $k(a+b) = ka + kb$.
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu a là một vector bất kì thì $1a = a$ và $(-1)a = -a$.

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Giải

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

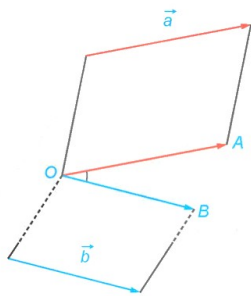
Do đó ta có: $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AG} + \vec{GB} + \vec{AG} + \vec{GC} + \vec{AG} + \vec{GD}$
 $= 3\vec{AG} + (\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) = 3\vec{AG} + \vec{0} = 3\vec{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

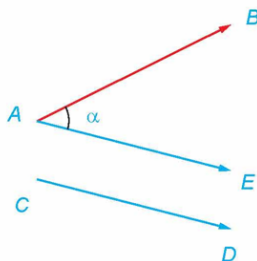
Trong không gian, cho hai vectơ a, b khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$. Khi đó, góc $\angle AOB$ ($0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vectơ a và b , kí hiệu là (a, b) .



Nếu góc giữa hai vectơ a và b là 90° thì ta nói hai vectơ a và b vuông góc với nhau và kí hiệu là $a \perp b$.

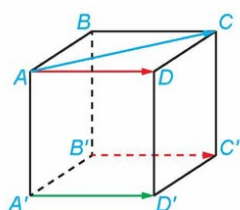
Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{CD}$, khi đó $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \angle BAE$.



- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .

Ví dụ 9: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:



a) $\vec{AD}$ và $\vec{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

Giải

a) Hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}) = 0^\circ$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = \angle A'DC$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\angle A'DC = 45^\circ$, vì vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$.

b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng.

Trong không gian, cho hai vector a, b đều khác 0 . Tích vô hướng của hai vector a và b là một số, kí hiệu là $a \cdot b$, được xác định bởi công thức:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$$

Chú ý

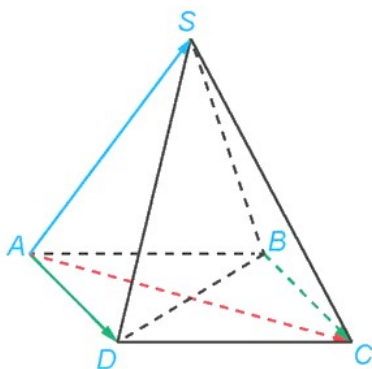
- Quy ước nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì $a \cdot b = 0$.

- Cho hai vector a, b đều khác 0 . Khi đó: $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

- Với mọi vector a , ta có $a^2 = |a|^2$.

- Nếu a, b là hai vector khác 0 thì $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng sau:



a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\angle SAD = 60^\circ$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \angle SAD = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Do đó

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra $\angle SAC = 45^\circ$. Do đó

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle SAC = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

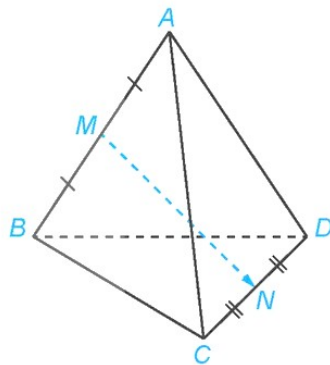
Nhận xét. Tích vô hướng của hai vector trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vector trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu a, b, c là các vector trong không gian và k là một số thực thì ta có:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb).$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

a)

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

b)

Giải

$$\text{a) Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \text{ và } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}.$$

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

$$\text{Vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD \text{ nên } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}, \text{ hay } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

$$\text{b) Từ giả thiết, ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Vì vậy,
$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$