

Bài 13. Hai đường thẳng song song

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

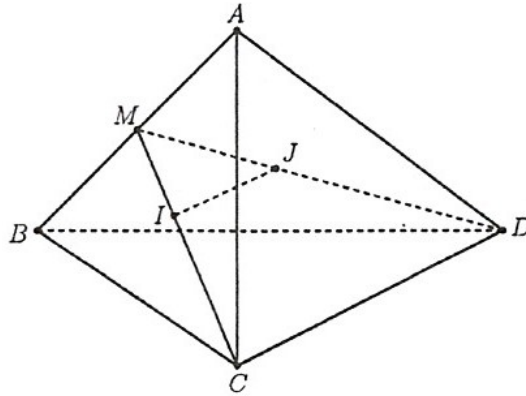
Số báo danh:

PHẦN E. CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD . Xác định vị trí tương đối của đường thẳng IJ và CD

Lời giải

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó I thuộc CM và J thuộc DM .

Xét tam giác ABC có: $\frac{MI}{MC} = \frac{1}{3}$ (do I là trọng tâm của tam giác ABC).

Xét tam giác ABD có: $\frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$ (do J là trọng tâm của tam giác ABD).

Xét tam giác MCD , ta có: $\frac{MI}{MC} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel CD$ (Định lý Thales).

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại điểm G . Vậy G là điểm nào?

Lời giải

Lời giải

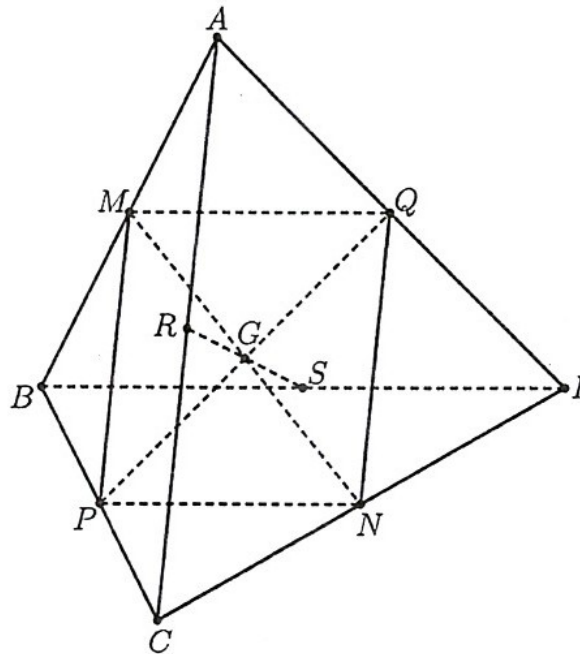
Ta có: MQ là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow \begin{cases} MQ \parallel BD \\ MQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ (1)

NP là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow \begin{cases} NP \parallel BD \\ NP = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $NP \parallel MQ$ và $NP = MQ$.

Vậy $MPNQ$ là hình bình hành.

Gọi G là giao điểm của MN và PQ thì G là trung điểm của mỗi đoạn MN, PQ .



$$\begin{cases} QR // CD, QR = \frac{1}{2}CD \\ PS // CD, PS = \frac{1}{2}CD \end{cases}$$

Tương tự, ta có:

Suy ra $QR // PS, QR = PS$.

Do vậy $PRQS$ là hình bình hành, khi đó PQ và RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Suy ra RS nhận G làm trung điểm.

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD .

Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ để $MNPQ$ là hình thoi.

Lời giải

Lời giải

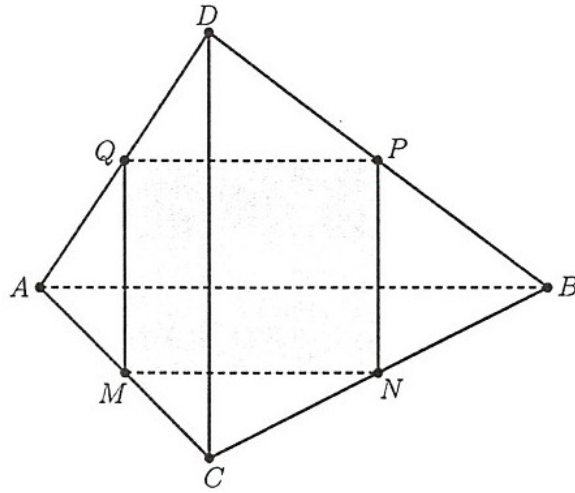
Chúng ta chứng tỏ $MNPQ$ là hình bình hành:

Vì MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN // AB, MN = \frac{1}{2}AB$.

Vì PQ là đường trung bình tam giác ABD nên $PQ // AB, PQ = \frac{1}{2}AB$.

Vì vậy $MN // PQ, MN = PQ$.

Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.



Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi:

Vì MQ là đường trung bình của tam giác ACD nên $MQ \parallel CD, MQ = \frac{1}{2}CD$.

Từ câu a), ta có $MNPQ$ là hình bình hành.

$MNPQ$ là hình thoi khi và chỉ khi $MQ = MN \Leftrightarrow \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow CD = AB$.

Vậy điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi là tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó $ABCD$ là một hình thang với đáy AB và CD . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC , G là trọng tâm của tam giác SAB .

Giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (GIJ) . Biết d cắt SA tại M và cắt SB tại N . Tứ giác $MNJI$ là hình bình hành thì $AB = kCD$. Khi đó $k = ?$

Lời giải

Lời giải

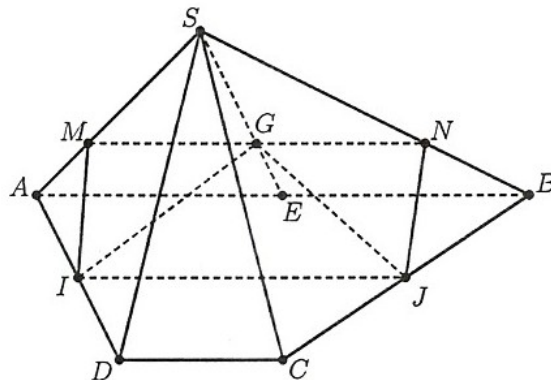
-Tìm giao tuyến d của (SAB) và (GIJ) :

Dễ thấy $G \in (SAB) \cap (GIJ) \Rightarrow G \in d$ với $d = (SAB) \cap (GIJ)$.

IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ \parallel AB$.

Ta có:
$$\begin{cases} d = (SAB) \cap (GIJ) \\ AB \parallel IJ \\ AB \subset (SAB), IJ \subset (GIJ) \end{cases} \Rightarrow d \parallel AB \parallel IJ$$

Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (GIJ) là đường thẳng d qua G và song song với đường thẳng AB .



- Tìm điều kiện của AB và CD để $MNJI$ là hình bình hành: Gọi E là trung điểm AB .

Ta có:

$MN \parallel IJ; MNJI$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MN = IJ$. (1)

Vì $MG \parallel AE \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAB).

Vì $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}AB$. (2)

Vì IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ = \frac{AB+CD}{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3), ta có:

$$\frac{2}{3}AB = \frac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow 4AB = 3AB + 3CD \Leftrightarrow AB = 3CD$$

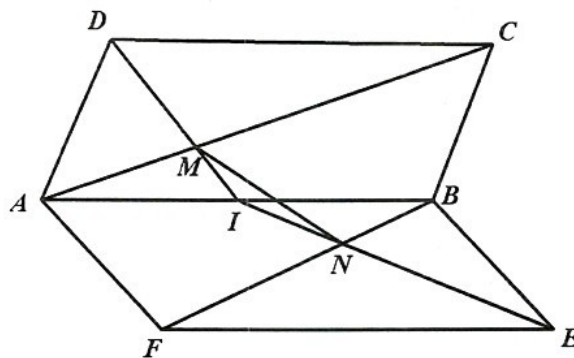
Vậy với hình chóp ban đầu có $AB = 3CD$ thì $MNJI$ là hình bình hành

Câu 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên cạnh AC lấy điểm M và trên cạnh BF lấy điểm N sao cho

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k. \text{ Tìm } k \text{ để } MN \parallel DE.$$

Lời giải

Lời giải



Ta có: $MN \parallel DE$ nên bốn điểm M, N, D, E đồng phẳng.

Trong mặt phẳng (MNE) , gọi $I = DM \cap NE \Rightarrow I \in AB, AB = (ABCD) \cap (ABEF)$,

$$\frac{IM}{DM} = \frac{IN}{NE}.$$

khi đó: $\frac{IM}{DM} = \frac{IN}{NE}$.

Theo giả thiết, ta có:

$$\frac{AM}{AC} = k(1) \Rightarrow \frac{AC - MC}{AC} = k \Rightarrow 1 - \frac{MC}{AC} = k \Rightarrow \frac{MC}{AC} = 1 - k(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{MC} = \frac{k}{1-k}$; tương tự ta chứng minh được $\frac{BN}{FN} = \frac{k}{1-k}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{IM}{DM} = \frac{IA}{DC} = \frac{AM}{MC} = \frac{k}{1-k}$;

Vì $AB \parallel EF$ nên $\frac{IN}{NE} = \frac{BI}{EF} = \frac{BN}{NF} = \frac{k}{1-k}$.

$$\frac{AI}{DC} + \frac{BI}{EF} = \frac{AI}{FE} + \frac{BI}{EF} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{k}{1-k} = 1$$

Mặt khác

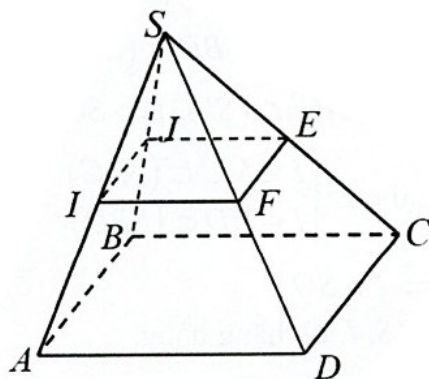
$$\Rightarrow 2k = 1 - k \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Vậy với $k = \frac{1}{3}$ thì $MN \parallel DE$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng IJ, EF .

Lời giải

Lời giải



Ta có:

$IJ \parallel AB$ (IJ là đường trung bình tam giác SAB)

$EF \parallel CD$ (EF là đường trung bình tam giác SCD)

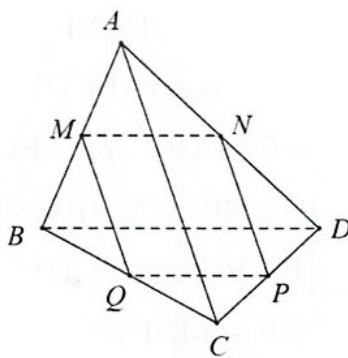
$AB \parallel CD$ ($ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$)

Suy ra $IJ \parallel EF$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

Lời giải

Lời giải



$$\begin{cases} MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD \\ PQ \parallel BD, PQ = \frac{1}{2}BD \end{cases}$$

Ta có MN, PQ lần lượt là đường trung bình tam giác ABD, BCD nên

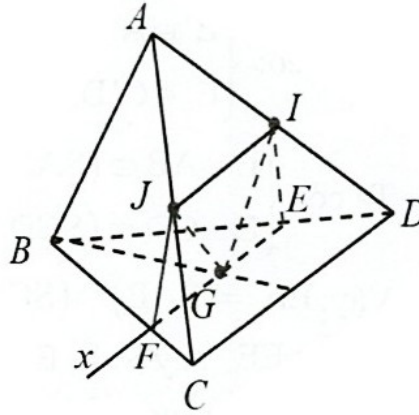
Nên $MN \parallel PQ, MN = PQ$.

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) . Tìm thiết diện của mặt phẳng (GIJ) với hình chóp $A.BCD$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải

Lời giải



IJ là đường trung bình ΔACD nên $IJ // CD$.

$$\begin{cases} IJ // CD \\ IJ \subset (GIJ) \\ CD \subset (BCD) \\ G \in (IJG) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Gx = (GIJ) \cap (BCD) \\ Gx // IJ // CD \end{cases}$$

Ta có:

Trong (BCD) gọi E, F lần lượt là giao điểm của Gx với BD và BC .

Tứ giác $IJFE$ có $IJ // FE$ nên là hình thang.

$$\begin{cases} IJ = (GIJ) \cap (ACD) \\ JE = (GIJ) \cap (ABD) \\ EF = (GIJ) \cap (BCD) \\ FJ = (GIJ) \cap (ABC) \end{cases}$$

Ta có:

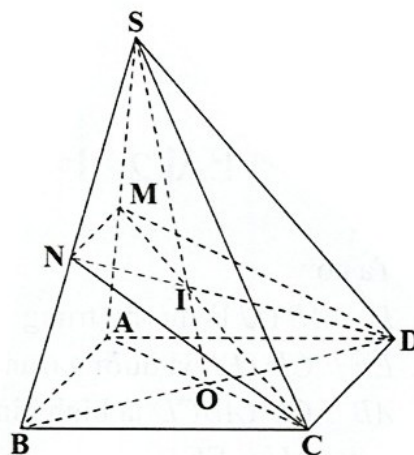
Vậy thiết diện của mặt phẳng (GIJ) với hình chóp $A.BCD$ là hình thang $IJFE$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O .

Gọi (α) là mặt phẳng qua DC cắt SA và SB tại M, N . Tứ giác $CDMN$ là hình gì?

Lời giải

Lời giải



$$\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (SAB) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (\alpha) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$$

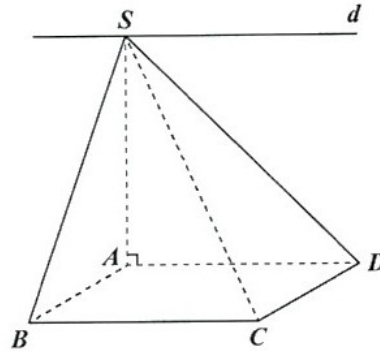
Ta có

Vậy tứ giác $CDMN$ là hình thang.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải

Lời giải



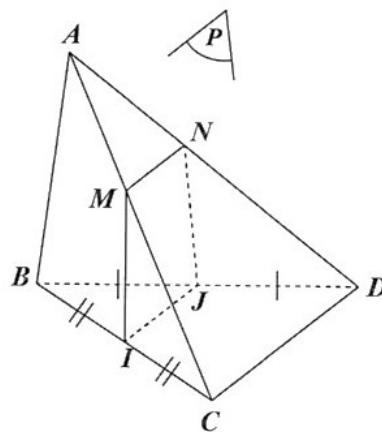
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD , suy ra theo hệ quả của định lý 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

Lời giải

Lời giải



- Ba mặt phẳng $(ACD), (BCD),$

(P) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến CD, IJ, MN .

Vì $IJ \parallel CD$ (IJ là đường trung bình của tam giác BCD) nên theo định lý 3 ta có $IJ \parallel MN$.

Vậy tứ giác $IJNM$ là một hình thang.

- Để tứ giác $IJNM$ là hình bình hành thì $\begin{cases} MN = IJ \\ MN \parallel IJ \end{cases}$.

$$\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}CD \\ IJ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{1}{2}CD \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow M, N$$

Mặt khác lần lượt là trung điểm của AC, AD .

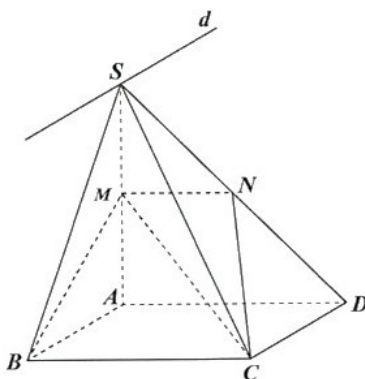
Vậy M là trung điểm AC thì tứ giác $IJMN$ là hình bình hành.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Lời giải

Lời giải



$$\begin{cases} M \in (BCM) \cap (SAD) \\ BC \subset (BCM), AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

Ta có

$\Rightarrow$ giao tuyến của (BCM) và (SAD) là đường thẳng d' đi qua M và song song với BC và AD .

Gọi N là giao điểm của SD và d' .

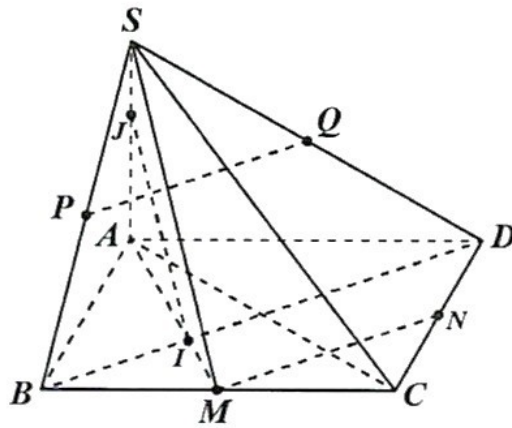
Khi đó $MN \parallel BC$, suy ra tứ giác $CBMN$ là hình thang.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm

BC, CD, SB, SD . Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC, J thuộc SA sao cho $\frac{JS}{JA} = \frac{1}{2}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng IJ, SM

Lời giải

Lời giải



b) Ta có $\frac{AJ}{AS} = \frac{2}{3}; \frac{JS}{JA} = \frac{1}{2}; \frac{AI}{AM} = \frac{2}{3}$ (I là trọng tâm của ΔABC).

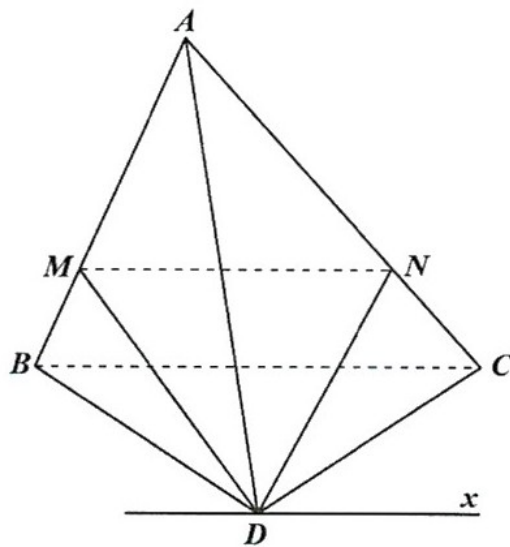
Suy ra $\frac{AJ}{AS} = \frac{AI}{AM}$.

Theo định lí Viet đảo ta có $IJ \parallel SM$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Lời giải

Lời giải



Trong tam giác ABC ,

theo giả thiết $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ suy ra $MN \parallel BC$.

Ta có $\begin{cases} D \in (DBC) \cap (DMN) \\ BC \subset (DBC), MN \subset (DMN) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel MN$ suy ra $(DBC) \cap (DMN) = Dx \parallel BC \parallel MN$.
---HẾT---