HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN
VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
**TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG**
**PHÚ THỌ**

**ĐỀ THI ĐỀ XUẤT MÔN TOÁN**
**KHỐI 10 - NĂM 2023**
Thời gian làm bài: 180 phút
*(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)*

**Câu 1** *(4,0 điểm).* Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $\forall x,y\in\mathbb{R},\exists a\in\mathbb{R}: f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(a-y\right)+f\left(y\right)f\left(a-x\right)$;

ii) $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$.

**Câu 2** *(4,0 điểm).* Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}=\frac{c^4}{c^4+1}$. Chứng minh rằng

$$abc\left(a+b+c\right)\geq\sqrt{2}\left(ab+bc+ca\right).$$

**Câu 3** *(4,0 điểm).* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABN$ cắt $CD$ tại $P$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $CDM$ cắt $AB$ tại $Q$. Chứng minh rằng $AC, BD, PQ$ đồng quy.

**Câu 4** *(4,0 điểm).* Cho $n\geq 5$ là số nguyên dương lẻ và có các ước nguyên tố là $p_1, p_2,..., p_k$. Chứng minh rằng $2^{\varphi(n)}-1$ có ước số nguyên tố không thuộc tập $\left\{p_1;p_2;...;p_k\right\}$.

**Câu 5** *(4,0 điểm).* Cho $p$ là một số nguyên tố và $n$ là một số nguyên dương. Tìm số bộ sắp thứ tự $\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ thỏa mãn $a_1,a_2,a_3,a_4\in\left\{0,1,2,...,p^n-1\right\}$ và $p^n\left|\left(a_1a_2+a_3a_4+1\right)\right.$ ?

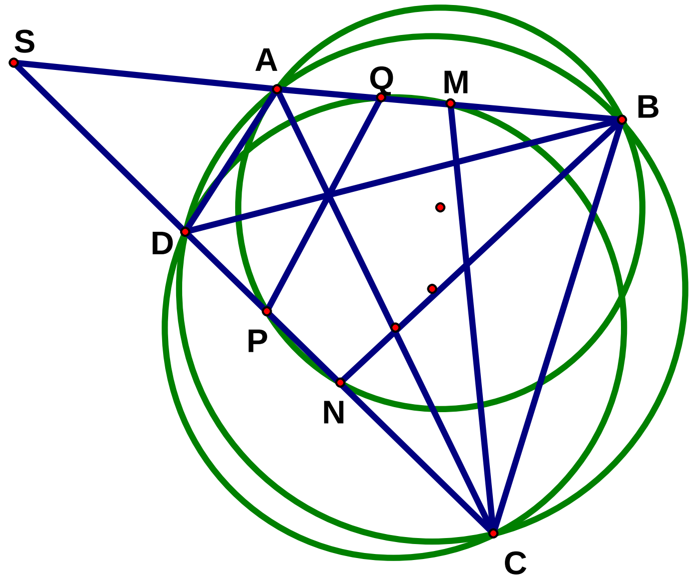
**----HẾT----**

**ĐÁP ÁN + BIỂU ĐIỂM CHẤM MÔN TOÁN KHỐI 10**

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>Câu 1. (4,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:<br>i) $\forall x,y\in\mathbb{R},\exists a: f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(a-y\right)+f\left(y\right)f\left(a-x\right)$;<br>ii) $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Cho $x=y=0$ ở i) ta được $f\left(0\right)=f\left(0\right)f\left(a\right)+f\left(0\right)f\left(a\right)$ mà $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$ nên $f\left(a\right)=\frac{1}{2}$.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Cho $y=0$ thì $f\left(x\right)=f\left(x\right)f\left(a\right)+f\left(0\right)f\left(a-x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(a-x\right)$. (1)<br>Từ đó suy ra $f\left(x+y\right)=2f\left(x\right)f\left(y\right)$ (2)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ở (2) lấy $y=a$ ta có $f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$<br>Thay $x$ bởi $-x$ vào (1) và kết hợp (2) ta có $f\left(-x\right)=f\left(a+x\right)=f\left(x\right)$.<br>Ở i) thay $y$ bởi $-y$ ta có<br>$f\left(x-y\right)=f\left(x\right)f\left(a+y\right)+f\left(-y\right)f\left(a-x\right)=2f\left(x\right)f\left(y\right)$ (3)</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Từ (2) và (3) ta có $f\left(x-y\right)=f\left(x+y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$.<br>Thay $x,y$ bởi $\frac{x}{2}$ ta có $f\left(x\right)=f\left(0\right)=\frac{1}{2}$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Học sinh có thể làm cách khác, giáo viên chấm theo thang điểm tương ứng<br>Cách 2. Tương tự đến $f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$<br>Thay $y=a-x$ ta rút ra được $\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=\frac{1}{2} \\ f\left(x\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$<br>Đặt $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\right\}$. Ta đi chứng minh $S=\varnothing$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0\in S$<br>Ta có $-\frac{1}{2}=f\left(x_0\right)=f\left(x_0+0\right)=f\left(x_0\right)f\left(a\right)+f\left(0\right)f\left(a-x_0\right)\Rightarrow f\left(a-x_0\right)=-\frac{1}{2}$<br>Tương tự suy ra $f\left(a-n.x_0\right)=-\frac{1}{2}$<br>Do đó $a-nx_0\in S,\forall n\in\mathbb{N}$<br>Tương tự</td><td></td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $f\left(a+x_0\right)=f\left(a\right)f\left(a-x_0\right)+f\left(x_0\right)f\left(0\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow a+x_0\in S\Rightarrow a+nx_0\in S,\forall n\in\mathbb{N}$<br>Vậy $a+nx_0\in S,\forall n\in\mathbb{Z}$.<br>Mặt khác $f\left(x_0+x_0\right)=2f\left(x_0\right)f\left(a-x_0\right)=\frac{1}{2}$<br>Ta có $f\left(a+2x_0\right)=f\left(a\right)f\left(a-2x_0\right)+f\left(2x_0\right)f\left(0\right)=0$ , mâu thuẫn.<br>Vậy $f\left(x\right)\equiv\frac{1}{2}$ | |
| **2** | | Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}=\frac{c^4}{c^4+1}$. Chứng minh rằng<br>$abc\left(a+b+c\right)\geq\sqrt{2}\left(ab+bc+ca\right).$ | |
| | | $\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}=\frac{c^4}{c^4+1}\Leftrightarrow\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}=1-\frac{1}{c^4+1}\Leftrightarrow\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}+\frac{1}{c^4+1}=1.$<br>Đặt $\frac{1}{1+a^4}=\frac{x}{x+y+z};\frac{1}{1+b^4}=\frac{y}{x+y+z};\frac{1}{1+c^4}=\frac{z}{x+y+z}$. | 1,0 |
| | | Khi đó ta có $a=\sqrt[4]{\frac{y+z}{x}};b=\sqrt[4]{\frac{x+z}{y}};c=\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}$<br>Ta có<br>$P=\frac{abc\left(a+b+c\right)}{ab+bc+ca}\geq\frac{abc\left(a+b+c\right)}{\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2}=\frac{3abc}{a+b+c}$ | 1,0 |
| | | Ta có<br>$\sum\sqrt{\frac{xy}{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}}\leq\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)=\frac{3}{2}$<br>Mà $\sqrt{\frac{xy}{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}}=\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{x+z}}=\frac{1}{a^2b^2}$.<br>Như vậy $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\leq\frac{3}{2}$ | 1,0 |
| | | Ta lại có<br>$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2\leq3\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\right)\leq\frac{9}{2}\Rightarrow\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)^2\leq\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$<br>Do đó $P\geq\sqrt{2}$. | 1,0 |
| **3** | | **Câu 3.** *(4,0 điểm)* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABN$ cắt $CD$ tại $P$. Đường | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | tròn ngoại tiếp tam giác $CDM$ cắt $AB$ tại $Q$. Chứng minh rằng $AC, BD, PQ$ đồng quy. | |




| | | | |
|---|---|---|---|
| | | *) Nếu $AB$ // $CD$ thì $ABCD$ là hình thang cân do đó $AC, BD, PQ$ đồng quy. | 0,5 |
| | | *) Nếu $AB$ và $CD$ không song song, gọi $S$ là giao điểm của $AB, CD$<br>Khi đó do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên ta có $\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SC}.\overline{SD}$ (1)<br>Do 4 điểm $A, B, N, P$ cùng thuộc 1 đường tròn nên $\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SN}.\overline{SP}$ (2)<br>Mặt khác 4 điểm $C, D, M, Q$ cùng thuộc 1 đường tròn nên $\overline{SM}.\overline{SQ}=\overline{SC}.\overline{SD}$ (3) | 1,5 |
| | | Từ (1), (2), (3) ta suy ra: $\begin{cases}\overline{SA}.\overline{SB}=\overline{SM}.\overline{SQ}\\ \overline{SC}.\overline{SD}=\overline{SN}.\overline{SP}\end{cases}$ | 1,0 |
| | | Mà $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$ nên theo hệ thức Maclaurin ta có:<br>$(SQAB)=-1$ và $(SPCD)=-1$<br>Vậy $AC, BD, PQ$ đồng quy. | 1,0 |
| **4** | | Cho $n\ge 5$ là số nguyên dương lẻ và có các ước nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_k$. Chứng minh rằng $2^{\varphi(n)}-1$ có ước số nguyên tố không thuộc tập $\{p_1; p_2; ...; p_k\}$. | |
| | | Đặt $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $m=\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\right)=2u$. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Ta có $u \vdots p_i - 1$ và $2^u - 1 \vdots p_i,\ \forall i = 1, 2, ..., k.$ | 1,0 |
| | | Mặt khác $2^{2u} - 1 = \left(2^u - 1\right)\left(2^u + 1\right)$ và $\left(2^u - 1; 2^u + 1\right) = 1$ | 1,0 |
| | | Suy ra $\left(p_i; 2^u + 1\right) = 1,\ \forall i = 1, 2, ..., k$ tức là $2^u + 1$ có ước nguyên tố không thuộc tập $\left\{p_1; p_2; ...; p_k\right\}$. | 1,0 |
| | | Từ đó ta có $2^{\varphi(n)} - 1$ có ước số nguyên tố không thuộc tập $\left\{p_1; p_2; ...; p_k\right\}$. | 1,0 |
| **5** | | Cho $p$ là một số nguyên tố và $n$ là một số nguyên dương. Tìm số bộ sắp thứ tự $\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ thỏa mãn $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ và $p^n \left| \left(a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1\right)\right.$ ? | |
| | | **Nhận xét.** Nếu $\left(x, p\right) = 1 \Rightarrow \left(x, p^n\right) = 1 \Rightarrow \left\{x.k \middle| k = 0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ là hệ thặng dư đầy đủ $\bmod p^n$. | 1,0 |
| | | TH1. Nếu $a_1 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right)$ và với mỗi cách chọn $a_3, a_4$ thì tồn tại duy nhất một số $a_2 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ thỏa mãn $p^n \left| \left(a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1\right)\right.$. Do đó số bộ sắp thứ tự $\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ trường hợp này là số cách chọn $a_1 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right)$ và $a_3, a_4 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ suy ra số bộ là : $\varphi\left(p^n\right).p^n.p^n = p^{3n} - p^{3n-1}$. | 1,0 |
| | | TH2. Nếu $a_1 \equiv 0 \left(\bmod p\right) \Rightarrow a_3, a_4 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right)$ và với mỗi cách chọn $a_3 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right), a_2 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ thì tồn tại duy nhất một số $a_4 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}, a_4 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right)$ thỏa mãn $p^n \left| \left(a_1 a_2 + a_3 a_4 + 1\right)\right.$. Do đó số bộ sắp thứ tự $\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ trường hợp này là số cách chọn $a_1 \equiv 0 \left(\bmod p\right)$ và $a_3 \not\equiv 0 \left(\bmod p\right), a_2 \in \left\{0, 1, 2, ..., p^n - 1\right\}$ suy ra số bộ là : $\left(p^n - \varphi\left(p^n\right)\right).p^n.\varphi\left(p^n\right) = p^{3n-1} - p^{3n-2}$. | 1,0 |
| | | Do đó số bộ sắp thứ tự thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $p^{3n} - p^{3n-1} + p^{3n-1} - p^{3n-2} = p^{3n} - p^{3n-2}$. | 1,0 |