ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN 8
Ngày thi: 12/04/2014

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]\vdots 7 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$
b) Cho $P=n^4+4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$
b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C $(C\neq A)$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD).

a) Chứng minh $OA^2=AC.BD$
b) Chứng minh tam giác AMB vuông.
c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN//AC$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$$

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{(x+1)-3x(x+1)}{3x}\right]:\frac{x-1}{x}$$

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2(1-3x)}{3x}\right].\frac{x}{x-1}$$

$$A=2.\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

b) Với $x\neq 0; x\neq \pm 1$. Ta có: $A=\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1\in\{\pm 1;\pm 2\}$

Xét từng trường hợp tìm x, đối chiếu điều kiện $\Rightarrow x\in\{2;3\}$

Câu 2.

a) Ta có:

$$A=\left[n^3(n^2-7)^2-36n\right]$$

$$=n\left[n(n^2-7)-6\right]\left[n(n^2-7)+6\right]=n(n^3-7n-6)(n^3-7n+6)$$

$$=n(n^3-n-6n-6)(n^3-n-6n+6)=n\left[n(n^2-1)-6(n+1)\right]\left[n(n^2-1)-6(n-1)\right]$$

$$=n(n+1)(n^2-n-6)(n-1)(n^2+n-6)=n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)$$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên $A\vdots 7 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

b)

$$P=n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)-(2n)^2$$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=\left[(n-1)^2+1\right].\left[(n+1)^2+1\right]$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2+1\geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì phải có $(n-1)^2+1=1$ hay $(n-1)^2=0\Rightarrow n=1$

Khi đó $P=5$ là số nguyên tố.

Câu 3.

a) $x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$

$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$

$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$

TXĐ: $x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -13 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$S = \{-13; 2\}$

b) Đặt $b + c - a = x > 0; c + a - b = y > 0; a + b - c = z > 0.$ Ta có $x, y, z > 0$

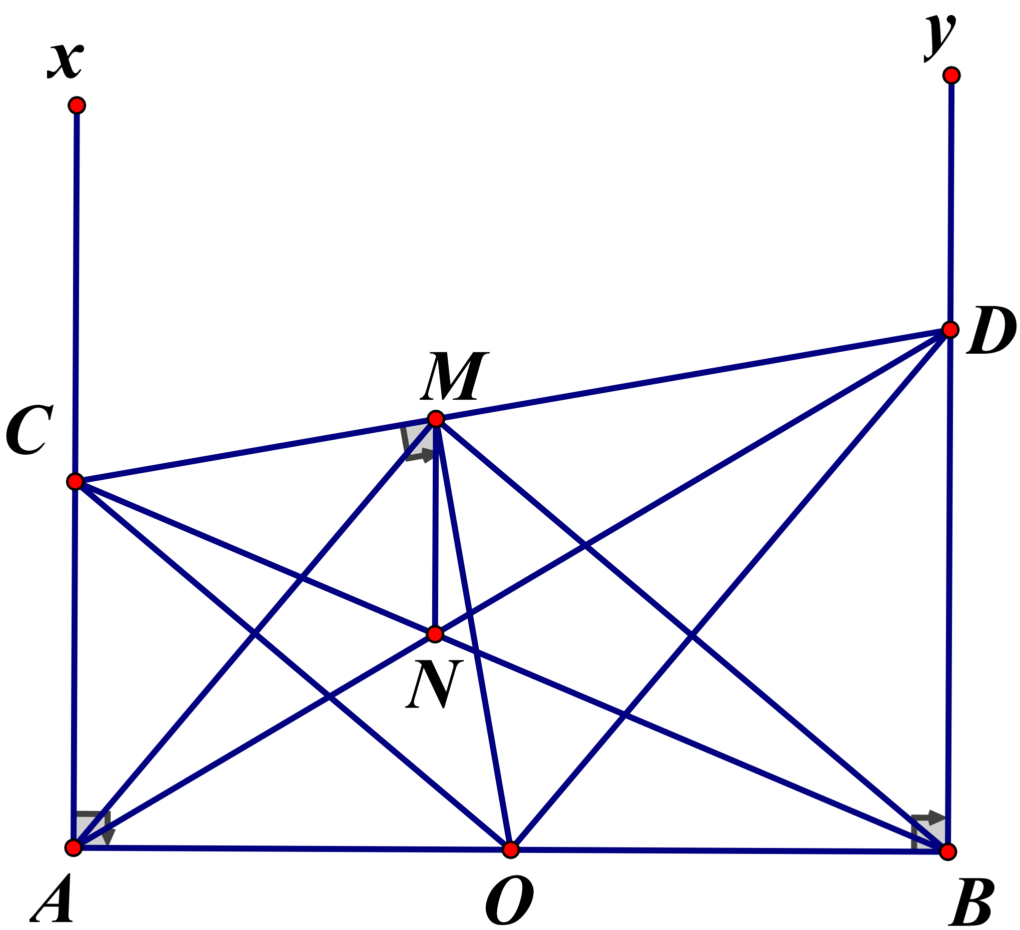
Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$

Thay vào ta được $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\right]$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) = 3 \qquad hay \quad A \geq 3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Câu 4.



a) Xét ΔACO và ΔBOD có: $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$; $\widehat{COA} = \widehat{ODB}$ (cùng phụ với $\widehat{DOB}$)

Nên $\Delta ACO \sim \Delta BOD(g.g) \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow AO.BO = AC.BD$

Mà $AO = BO$ nên $AO^2 = AC.BD$

b) Xét ΔCMO và ΔOMD có: $\widehat{CMO} = \widehat{OMD} = 90^0$; $\widehat{OCM} = \widehat{DOM}$ (cùng phụ với $\widehat{COM}$) $\Rightarrow \Delta CMO \sim \Delta OMD(g.g) \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OM}{MD}$ (1)

Mà $\Delta ACO \sim \Delta BOD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{AO}{BD} \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OB}{BD}$ (2) (Do $AO = OB$)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{OM}{MD} = \dfrac{OB}{BD} \Rightarrow \Delta OMD \sim \Delta OBD$

$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{BOD} \Rightarrow \Delta OMD = \Delta OBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow OM = OB = OA$ suy ra ΔAMB vuông tại M

c) Ta có: $AC // BD$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ (hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau)

Tương tự ta chứng minh : $AC = CM$

Nên $\dfrac{CN}{BN} = \dfrac{CM}{DM} \Rightarrow MN // BD // AC$

Câu 5.

Nhận xét có: $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự có: $b + ca = (b + a)(b + c) \quad ; c + ab = (c + a)(c + b)$

Do đó $VT = \dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \quad hay \quad VT \geq 2 \qquad (dfcm)$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$