

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức
$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

- Rút gọn P
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
- Tìm x để $P \leq 1$

Câu 2. (4,5 điểm)

- Giải phương trình: $x^3 - 6x - x + 30 = 0$

- Giải bất phương trình sau:
$$x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$$

- Cho biết $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức:
$$Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$$

Câu 3. (5,0 điểm)

- Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

- Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^5 + b^5 + c^5 \vdots 30$

- Chứng minh rằng:
$$\left(a - \frac{1}{b} \right) \left(b - \frac{1}{c} \right) \left(c - \frac{1}{a} \right) \geq \left(a - \frac{1}{a} \right) \left(b - \frac{1}{b} \right) \left(c - \frac{1}{c} \right)$$
, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Câu 4. (4,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

- Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC

- $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

- $$AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$$

- Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC . Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC . Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường

thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh $AB = CK$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

Ta có:

$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

Vậy $P = \frac{2x}{x-1}$

b) Ta có: $P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Kết hợp với ĐKXĐ được $x \in \{2; 3\}$

c) $P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$

Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \geq -1$

Kết hợp với ĐKXĐ được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$

Câu 2.

a) Ta có: $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

$$x-1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 6x-6 - 2x+2 \leq 6x+9+2x-6$$

b) $\Leftrightarrow 4x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \frac{-7}{4}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{ x/x \geq \frac{-7}{4} \right\}$

c) Từ $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq 0$, do đó: $\frac{x^2-x+1}{x} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\text{Lại có: } \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\text{Suy ra } Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{4}{21}$$

Câu 3.

a)

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 40xy + 10y - 10x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 4y - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 0$$

Do $(5x + 4y - 1)^2 \geq 0$ và $9(y + 1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Nên } (5x + 4y - 1)^2 = 9(y + 1)^2 = 0$$

Suy ra $x = 1; y = -1$

b)

$$\text{Ta có: } a^5 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5)$$

$$= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1)$$

Do $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho cả $2; 3; 5$, do đó chia hết cho 30

Lại có $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 6 nên $5(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 30

Từ đó suy ra $a^5 - a$ chia hết cho 30

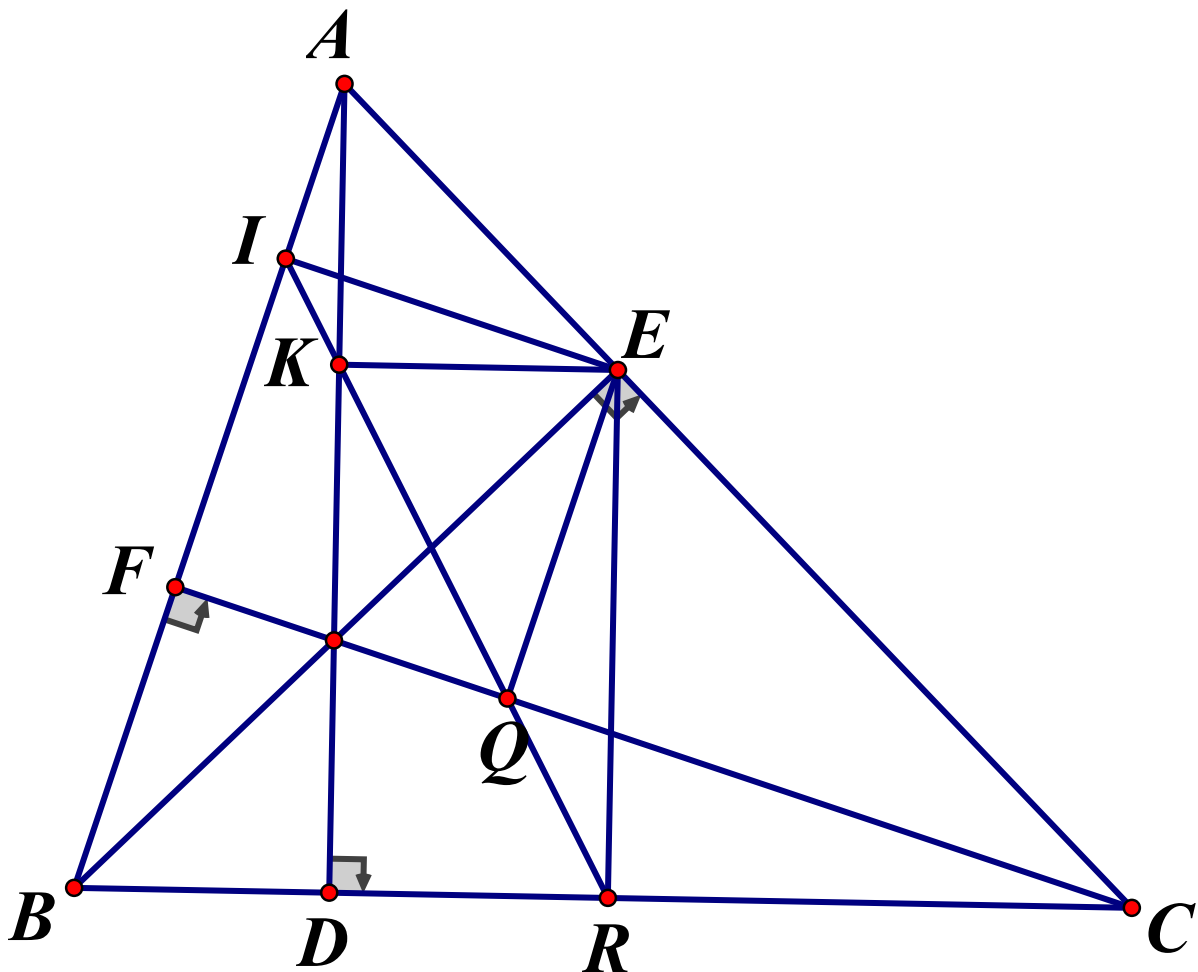
Tương tự $b^5 - b$ chia hết cho 30 và $c^5 - c$ chia hết cho 30.

Từ đó suy ra $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$ chia hết cho 30

Mà $a + b + c = 0$ nên $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

$$\begin{aligned}
& c) \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right) \\
& \Leftrightarrow \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} \geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc} \\
& \Leftrightarrow (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \\
& \Leftrightarrow a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
& \Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\
& \Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\
& \Leftrightarrow (a-c)^2(b^2-1) + (b-a)^2(c^2-1) + (c-b)^2(a^2-1) \geq 0 \quad (\text{đúng với mọi } a, b, c \geq 1)
\end{aligned}$$

Câu 4.



a) Ta có: $\Delta AEB \sim \Delta AFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Từ đó suy ra $\Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c)$

b) $\Delta BDH \sim \Delta BEC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD \quad (1)$

$\Delta CDH \sim \Delta CFB (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC^2$

c) Chứng minh được $\Delta DBH \sim \Delta DAC (g.g) \Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH \cdot DA = DC \cdot DB$

Lại có: $DC \cdot DB \leq \frac{(DC + DB)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$

Do đó: $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$

d) Từ giả thiết suy ra $EI \parallel CF, EK \parallel BC, EQ \parallel AB, ER \parallel AD$

Áp dụng định lý Talet ta có:

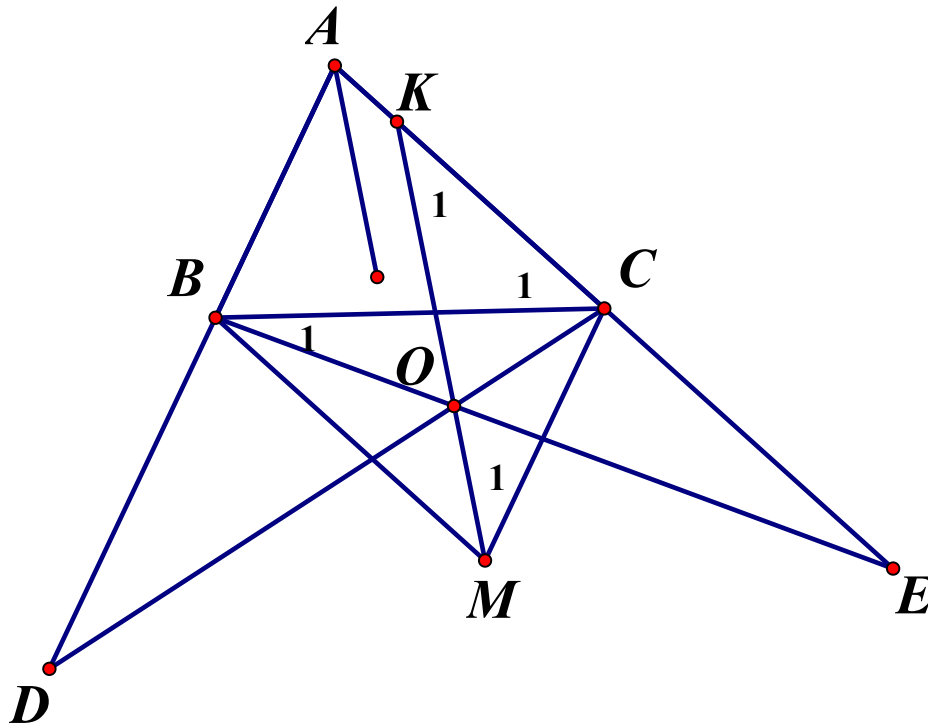
* $\frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow IK \parallel DF \quad (3)$

* $\frac{BF}{BI} = \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{BR} \Rightarrow IR \parallel DF \quad (4)$

* $\frac{CR}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{CQ}{CF} \Rightarrow RQ \parallel DF \quad (5)$

Từ (3);(4);(5) suy ra bốn điểm I, K, Q, R thẳng hàng

Câu 5.



Vẽ hình bình hành $ABMC \Rightarrow AB = CM$ (1)

Ta có: $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{CMB}$ nên BO là tia phân giác của \widehat{CMB}

Tương tự CO là tia phân giác của \widehat{BCM}

Do đó MO là tia phân giác của \widehat{BMC}

Suy ra OM song song với tia phân giác của \widehat{A} , suy ra K, O, M thẳng hàng

Ta có: $\widehat{M}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{K}_1$

Nên tam giác KMC cân tại $C \Rightarrow CK = CM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CK = AB$