

Lời nói đầu

Có lẽ “tam thức bậc hai” là một khía cạnh khá quen thuộc đối với chúng ta: những người học toán, nghiên cứu toán... Nó xuyên suốt trong chương trình Trung học phổ thông, tam thức bậc hai có rất nhiều ứng dụng, việc sử dụng công cụ này giúp chúng ta giải quyết một loạt các bài toán trong giải tích, hình học, cũng như trong lượng giác.

“Tam thức bậc hai” xuất hiện trong nhiều cuốn sách. Tuy nhiên các tác giả chỉ đề cập một cách tổng quan, chung chung, chứ chưa đi sâu vào từng vấn đề, ứng dụng cụ thể của nó.

Vì vậy nhóm nghiên cứu chúng tôi đã lựa chọn đề tài “Ứng dụng tam thức bậc hai vào việc tìm cực trị của hàm số” _ Đây là một trong những ứng dụng đặc sắc của tam thức bậc hai. Nhằm cụ thể hóa các dạng bài tập trên cơ sở ứng dụng tam thức bậc hai vào việc tìm cực trị của hàm số.

Trong đề tài này, chúng tôi chia làm hai phần chính:

Phần 1: Nêu ra những cơ sở lý thuyết trọng tâm.

Phần 2: Đưa ra hệ thống bài tập bao gồm 6 dạng từ dễ đến khó.

Dạng 1: **Hàm số** $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Dạng 2: **Hàm số** $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Dạng 3: **Hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và hàm số chứa căn thức**

Dạng 4: **Hàm số lượng giác**

Dạng 5: **Tìm** $\min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |ax^2 + bx + c| + mx + n \right\}$
và $\max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |ax^2 + bx + c| + mx + n \right\}$

Dạng 6: **Tìm** $\min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ ax^2 + bx + c + |mx + n| \right\}$
và $\max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ ax^2 + bx + c + |mx + n| \right\}$

Trong mỗi dạng, chúng tôi đã lựa chọn để đưa ra một số bài tập có giải mẫu từ đơn giản đến phức tạp và một số bài tập tự giải. Đặc biệt ở dạng 5 và 6 là những dạng bài tập rất hay vì mặc dù nó công kênh nhưng với việc ứng dụng tam thức bậc hai ta thấy lời giải thật gọn nhẹ.

Vì thời gian và khả năng còn hạn chế nên chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các bạn để đề tài chúng tôi được hoàn thiện hơn.

Chúng tôi cung xin bày tỏ lòng biết ơn đến thầy giáo Dương Thanh Vũ đã hướng dẫn chúng tôi trong quá trình làm đề tài này.

Phần I: MỘT SỐ KIẾN THỨC TRANG BỊ

Xét dấu tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$

Khi $\Delta \geq 0$ ta đặt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ta có $f(x_1) = f(x_2) = 0$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức bậc hai (cũng là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$)

- Định lý Viét thuận:

Nếu phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{(giả sử } x_1 < x_2 \text{) thì } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Mệnh đề: $|x_1 - x_2| = \frac{\Delta}{|a|}$

- Hệ quả (Định lý Viét đảo):

Nếu hai số có tổng là S, có tích là P thì hai số đó là nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - Sx + P = 0$ (với $S^2 - 4P \geq 0$)

Chú ý

Nếu $P = \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu)

Ta có hai trường hợp nhỏ:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow |x_1| < |x_2| \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} P = \frac{c}{a} < 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < x_2 < 0 \text{ (hai nghiệm đều âm)}$$

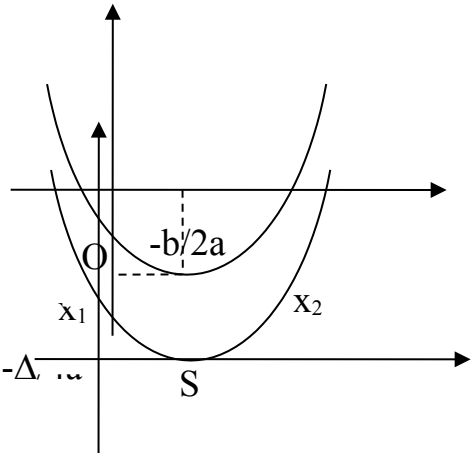
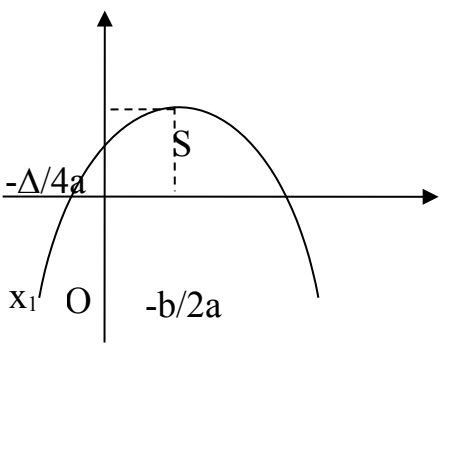
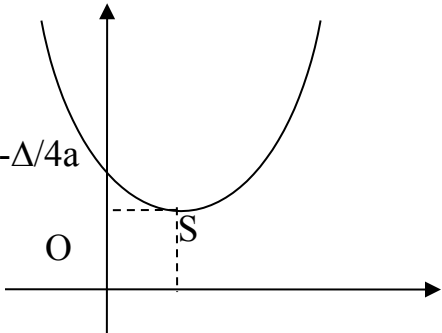
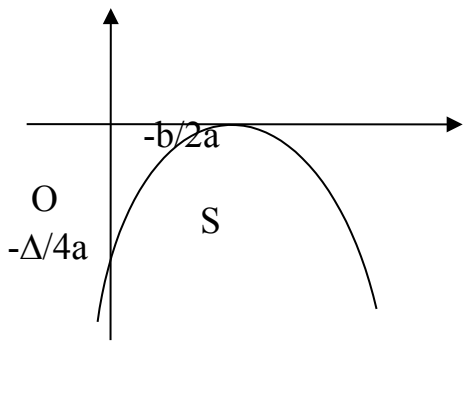
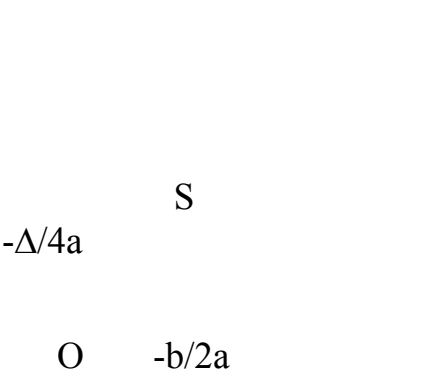
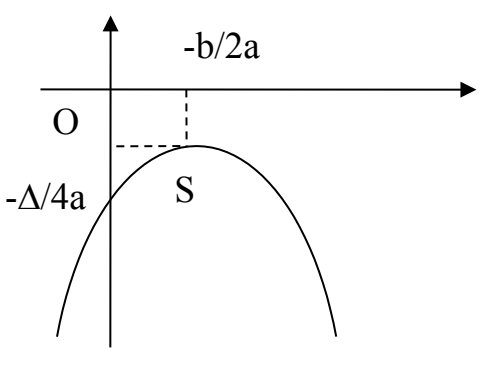
$$\text{Nếu } \begin{cases} P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 > x_2 > 0 \text{ (hai nghiệm đều dương)}$$

Tính chất đồ thị (P): $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ là một parabol có đỉnh $S = (-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a})$

Trong đó $x_s = -\frac{b}{2a}$ là nghiệm kép của tam thức bậc hai

(d) $x = -\frac{b}{2a}$ là trục đối xứng của (P)

Bằng đồ thị chúng ta vẫn có thể ghi nhớ được định lý trên và còn tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai như sau:

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		
max	GTNN $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$	GTLN $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$
min	Khi $x = -\frac{b}{2a}$	Khi $x = -\frac{b}{2a}$

I/ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

▮ Định lý thuận

Tam thức bậc hai luôn có dấu của hệ số a ; với mọi giá trị của x ; và chỉ loại trừ hai trường hợp :

$$+ \text{ Nếu } \Delta = 0 \Rightarrow af\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$$

$$+ \text{ Nếu } \Delta > 0 \Rightarrow af(x) < 0; \forall x \in (x_1; x_2)$$

▮ Định lý đảo

Nếu tồn tại số thực α thỏa mãn $af(\alpha) < 0$ thì tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 < \alpha < x_2$

▮ Hệ quả

Nếu tồn tại hai số α và β sao cho $f(\alpha)f(\beta) < 0$, thì tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 và có một nghiệm nằm ngoài khoảng (α, β) (với $\alpha < \beta$)

▮ Cách nhớ

Với $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a

Với $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	cùng dấu a	0	cùng dấu a

Với $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	cùng dấu a	cùng dấu a

▮ So sánh nghiệm của tam thức bậc hai với một số α cho trước

- TH1: $af(\alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1 < \alpha < x_2$

Không cần xét dấu Δ và luôn có $\Delta > 0$

- TH2: $\Delta < 0$ việc so sánh không đặt ra

- TH3:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha < x_1 < x_2 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ TH4: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \alpha \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$$

II/ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTLN và GTNN)

Tìm GTLN – GTNN của hàm số bằng cách áp dụng tam thức bậc hai

Cơ sở của phương pháp này là sự dụng sự đánh giá của hàm số bằng ba công cụ sau đây của tam thức bậc hai

Thứ nhất là:

$$\text{i, } f(x) = [u(x)]^2 + a \geq a \Rightarrow \exists u(x_0) = 0 : f(x_0) = a \\ \Rightarrow \min_{x \in R} f(x) = f(x_0) = a$$

$$\text{ii, } f(x) = b - [u(x)]^2 \leq b \Rightarrow \exists u(x_0) = 0 : f(x_0) = b \\ \Rightarrow \max_{x \in R} f(x) = f(x_0) = b$$

Thứ hai là: Để tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện từng bước như sau

Bước 1: Tìm tập xác định

Bước 2: Chuyển (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = [a(y)]x^2 + [b(y)]x + c(y) = 0 \quad (\square)$$

Trong (□) ta xem y như là một tham số, x là ẩn số và xét các trường hợp sau:

• TH1: $a(y) = 0$

• TH2: $a(y) \neq 0$

Để tìm điều kiện của y để phương trình (□) có nghiệm trên tập xác định

Thứ ba là: sử dụng tính chất định tính, định hình của tam thức bậc hai để xác định GTLN – GTNN

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$

* Giả sử $a > 0$ ta cần xét ba trường hợp

TH1: Hoành độ đỉnh của parabol $x_0 = -\frac{b}{2a} \in [\alpha, \beta]$ thì

GTNN của hàm số là $f_{\min} = f(x_0)$ đạt được khi $x = x_0$

GTLN của hàm số là $f_{\max} = f_{\max} \leq [f(\alpha), f(\beta)]$

TH2: Nếu $x_0 = -\frac{b}{2a} < \alpha < \beta$ thì GTNN là: $f_{\min} = f(\alpha)$ đạt được khi $x = \alpha$

GTLN là: $f_{\max} = f(\beta)$ đạt được khi $x = \beta$

TH3: Nếu $x_0 = -\frac{b}{2a} > \beta > \alpha$ thì GTNN là: $f_{\min} = f(\beta)$ đạt được khi $x = \beta$

GTLN là: $f_{\max} = f(\alpha)$ đạt được khi $x = \alpha$

* Giả sử $a < 0$, xét tương tự

Lưu ý

Ngoài phương pháp đánh giá trên đây không loại trừ khả năng áp dụng bất đẳng thức Cauchy, Schwartz... để làm giảm bớt khối lượng tính toán.

Trên đây chúng tôi đã tóm tắt lại một số kiến thức cơ bản và cơ sở của phương pháp sử dụng tam thức bậc hai để tìm GTLN và GTNN của hàm số. Để minh họa cho phương pháp này chúng tôi xin đưa ra một số bài tập điển hình trong phần tiếp theo.

Phần II: MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP ĐIỂN HÌNH

Dạng 1: HÀM SỐ $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Bài 1[1]

Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ trên tập $D = [-2; 0]$.

Tìm a để GTNN của $f(x)$ bằng 2.

Giải:

Vì hệ số $a = 4 > 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là parabol quay bề lõm lên trên, đỉnh $S = \left(\frac{a}{2}; -2a\right)$

Bây giờ ta xét 3 vị trí của $x_s = \frac{a}{2}$ so với đoạn $[-2; 0]$

- TH1: $-2 < \frac{a}{2} < 0$

Quan sát đồ thị ta thấy

$$\min_{[-2; 0]} f(x) = f(x_s) = -2a = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -4 < a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$$

- TH2: $x_s = \frac{a}{2} < -2 \Leftrightarrow a < -4$

Quan sát đồ thị ta thấy

$$\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = a^2 + 6a + 16 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a^2 + 6a + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset$$

- TH3: $x_s = \frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Quan sát đồ thị ta thấy

$$\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = a^2 - 2a = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 2a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{3}$$

Vậy kết hợp ba trường hợp ta thấy $a = -1; a = 1 + \sqrt{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2: HÀM SỐ CÓ DẠNG $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Bài 1:[1]

Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \quad (1)$$

Giải:

Ta nhận thấy $4x^2 - 3x + 1 > 0, \forall x$ nên việc tìm GTLN của y quy về việc tìm GTNN(M) thỏa

$$y = \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \leq M, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow 4(M - 1)x^2 - 3(M + 1)x + M - 1 \geq 0, \quad \forall x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } F(x) = 4(M - 1)x^2 - 3(M + 1)x + M - 1$$

+ Khi $M = 1$ thì (1) trở thành: $-6x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$: không thỏa $F(x) \geq 0, \forall x$

$$+ \text{ Khi } M \neq 1 \text{ thì (1) trở thành: } \begin{cases} M - 1 > 0 \\ \Delta_F \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M - 1 > 0 \\ 9(M + 1)^2 - 16(M - 1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M > 1 \\ -7M^2 + 50M - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \geq 7$$

Vậy GTLN (y) = GTNN (M) = 7

Tương tự việc tìm GTNN của y ta quy về việc tìm GTLN của m thỏa điều kiện

$$y = \frac{4x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 3x + 1} \geq m, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow 4(M - 1)x^2 - 3(M + 1)x + M - 1 \leq 0, \quad \forall x \quad (2)$$

$$\text{Đặt } G(x) = 4(m - 1)x^2 - 3(m + 1)x + m - 1$$

+ Khi $m = 1$ thì (2) trở thành: $-6x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$: không thỏa $G(x) \leq 0, \forall x$

$$+ \text{ Khi } m \neq 1 \text{ thì (2) trở thành: } \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta_G \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ 9(m + 1)^2 - 16(m - 1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -7m^2 + 50m - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{Vậy GTNN (y) = GTLN (m) = } \frac{1}{7}$$

Kết luận: GTLN (y) = 7 và GTNN (y) = $\frac{1}{7}$

Bài 2:[2]

Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (1)$$

Giải

Trên tập xác định: $D = \mathbb{R}$ của hàm số ta viết (1) $\Leftrightarrow y(x^2 + 1) = x^2 - 1$

$$\text{Đặt } g(x) = (y - 1)x^2 + y + 1 = 0 \quad (2)$$

+ Khi $y = 1$ thì (2) trở thành: $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ (vô lí) (3)

$$+ \text{ Khi } y \neq 1 \text{ thì (2) có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta_g = -(y - 1)(y + 1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) cho ta GTNN $f(x) = 1$ và không tồn tại GTLN.

Bài 3: [2]

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$, p, q là tham số. Tìm GTNN và GTLN của hàm số.

Giải

y_0 là một giá trị của hàm số

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình sau có nghiệm } y_0 = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)x^2 - px + y_0 - q = 0 \quad (*) \text{ có nghiệm}$$

- **TH1:** $y_0 = 1$

$$(*) \Leftrightarrow -px = q - 1$$

Do đó phương trình có nghiệm $\begin{cases} p = 0, q = 1 \\ p \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_0 = 1 \text{ là 1 giá trị của hàm số } (**)$$

- **TH2:** $y_0 \neq 1$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = p^2 - 4(y_0 - 1)(y_0 - q) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4y_0^2 + 4qy_0 + 4y_0 - 4q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2 - 4(q+1)y_0 + 4q - p^2 \leq 0$$

$$\text{Đặt } F(y_0) = 4y_0^2 - 4(q+1)y_0 + 4q - p^2 \leq 0$$

Vì $a = 4 > 0$ và $F(y_0) \leq 0$ nên không thể xảy ra trường hợp $\Delta_F < 0$ nên $\Delta_F \geq 0$

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình $F(y_0) = 0$

$$\text{Khi đó } F(y_0) \leq 0 \Leftrightarrow y_1 \leq y_0 \leq y_2 \quad (***)$$

$$\text{Hơn nữa } F(1) = 4 - 4(q+1) - 4q - p^2 = -p^2$$

$$\Leftrightarrow y_1 \leq 1 \leq y_2$$

Từ (**) và (***) ta suy ra $y_1 \leq y_0 \leq y_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = y_2 = \frac{q+1 + \sqrt{p^2 + q^2 - 2q+1}}{2} \\ \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = y_1 = \frac{q+1 - \sqrt{p^2 + q^2 - 2q+1}}{2} \end{cases}$$

Bài 4: [1]

Tìm giá trị của a và b để hàm số

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} \text{ có GTNN bằng 1 và GTLN bằng 3}$$

Giải

$$\text{Ta có } \max \left(\frac{ax + b}{x^2 + x + 1} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 : \begin{cases} \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} \leq 3, \forall x \\ \frac{ax_0 + b}{x_0^2 + x_0 + 1} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 3x^2 + (3-a)x + 3-b \geq 0, \forall x \\ 3x_0^2 + (3-a)x_0 + 3-b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (3-a)^2 - 4.3.(3-b) \leq 0 \\ 3x_0^2 + (3-a)x_0 + 3-b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_g = a^2 - 6a - 12b - 27 = 0$$

$$\text{Tương tự } \min \left(\frac{ax+b}{x^2+x+1} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 : \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+x+1} \geq 1, \forall x \\ \frac{ax_0+b}{x_0^2+x_0+1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = x^2 + (1-a)x + 1-b \geq 0, \forall x \\ x_0^2 + (1-a)x_0 + 1-b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_h = (1-a)^2 - 4(1-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 4b - 3 = 0$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán cho ta hệ } \begin{cases} a^2 - 6a + 12b - 27 = 0 \\ a^2 - 2a + 4b - 3 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 6 \\ (2b-6)^2 - 2(2b-6) + 4b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 6 \\ r(b) = 4b^2 - 24b + 45 = 0 \end{cases}$$

Ta nhận thấy $\Delta_r = -36 < 0$

Vậy không tồn tại a, b để $\max f(x) = 3$ và $\min f(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Dạng 3: HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC

Bài 1:[3] Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = f(x) = , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Giải: Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm đặc trưng $y = g(x) =$ trên $\mathbb{R}$

Gọi $M(x_0, y_0)$ là 1 điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y_0 = \Leftrightarrow y_0 x_0^2 - y_0 x_0 + y_0 = 2x_0^2 + x_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 2)x_0^2 - (y_0 + 1)x_0 + y_0 + 1 = 0$$

Xét tam thức bậc 2 $F(x_0)$ trong các trường hợp sau:

- TH 1: $y_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow -3x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Vậy $y_0 = 2$ là một giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$

- TH 2: $y_0 \neq 2$: Tam thức $F(x_0)$ có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \max \{1, 3\} = 3$$

Hơn nữa $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f(-1) = 0$. Do đó $f(x) = 0$

Bài 2:[3]

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$y =$$

Giải: Từ điều kiện $-3 \leq x \leq 1$ và do $(t)^2 + (t)^2 = 4$ ta có thể đặt
 $0 \leq t \leq 1$

Khi đó $y =$

Trước hết, ta cần tìm các giá trị của y để phương trình

$$F(t) = (7 - 5y)t^2 + 2(8y - 6)t + 7y - 9 = 0 \text{ có nghiệm thuộc } [0, 1]$$

1) $y =$ không là giá trị của biểu thức vì phương trình chỉ có nghiệm
 $t = - \notin [0, 1]$

2) $y \neq$

$$\Delta' = (8y - 6)^2 - (7y - 5)(7y - 9) = 99y^2 - 190y + 99 > 0 \quad \forall y$$

$$f(0) = 7y - 9$$

$$f(1) = 18y - 14$$

$$- =$$

$$a) f(0).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow \leq y \leq$$

$$b) \Leftrightarrow \text{không tồn tại } y$$

$$\text{Vậy } \max y = \text{ khi } t = 0 \Rightarrow x = -8.$$

$$\min y = \text{ khi } t = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Bài 3:[4]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$y = f(x) = x + \text{ trên khoảng } (0, +\infty)$$

Giải: y_0 là một giá trị của hàm số $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \text{pt sau } y_0 = x + (1) \text{ có nghiệm } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - x)^2 = x^2 + \text{ có nghiệm } x > 0$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 - 2y_0x + x^2 = x^2 + \text{ có nghiệm } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2y_0x^2 - y_0^2x + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Tam thức bậc hai } F(x) = 2y_0x^2 - y_0^2x + 1 = 0 \text{ có nghiệm } x > 0$$

$$\text{Ta có } \Delta_F = y_0^4 - 8y_0 = y_0(y_0^3 - 8)$$

$$\text{Vì } y_0 = x + \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0 \text{ nên } \Delta_F \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y_0^3 - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y_0 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$\Rightarrow$ Tam thức bậc 2 $F(x)$ có 2 nghiệm khi $y_0 \geq 2$ và lúc đó 2 nghiệm đều dương

$$\Rightarrow f(x) = 2 \text{ tại } x =$$

Dạng 4: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1:[1]

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = (3\sin x + 4\cos x)(3\cos x - 4\sin x) + 1$$

Giải: $y = 12\cos^2 x - 7\sin x \cos x - 12\sin^2 x + 1$

$$\Leftrightarrow y = 12\cos^2 x - \sin 2x + 1$$

y_0 là một giá trị của hàm số $\Leftrightarrow 24\cos^2 x - 7\sin 2x + 2 - 2y = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 24^2 + (-7)^2 \geq (2y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow (2y - 2)^2 \leq 25^2$$

$$\Leftrightarrow -25 \leq 2y - 2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow -11.5 \leq y \leq 13.5$$

Lúc đó

Bài 2:[4]

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = f(x) = \sin x + \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Giải: Xét hàm số: $y = g(x), x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ phương trình sau có nghiệm:

$$y_0(\sin x + 2) = \sin x + \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow \text{phương trình: } (y_0 - 1)\sin x - \cos x + 2y_0 - 1 = 0 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1)^2 + 1 \geq (2y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3y_0^2 - 2y_0 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y_0 \leq 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 1; g(x) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 \text{ tại } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vì $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

Bài 3:[2]

Tùy theo m, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$y = f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + m \sin x \cos x; \forall x, \forall m.$$

Giải: Ta có: $y = f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + m \sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow y = f(x) = 1 - \sin^2 2x + \frac{m}{2} \sin 2x$$

$$\text{Đặt: } \sin 2x = t \Rightarrow |t| \leq 1$$

Yêu cầu bài toán bây giờ quy về việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$g(t) = 1 - t^2 + \frac{m}{2} t; \forall |t| \leq 1, \forall m.$$

$$g'(t) = -2t + \frac{m}{2}$$

Xét 3 trường hợp:

- TH 1: $m \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -2$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-		-		
$g(t)$							
$\Rightarrow$							
$\Rightarrow$							

- TH 2: $-2 < m < 2$

t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$g'(t)$			+	0	-	
$g(t)$						
$\Rightarrow$						
$\Rightarrow$						
• TH 3: $\geq 2 \Rightarrow m \geq 4$						
t	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$g'(t)$			+	+	0	-
$g(t)$						
$\Rightarrow$						
$\Rightarrow$						

Dạng 5: TÌM

$$\forall \lambda \max_{x \in \mathbb{R}} \{ |ax^2 + bx + c| + mx + n \}$$

PHƯƠNG PHÁP :

Xét hàm số : $f(x) = \{ |ax^2 + bx + c| + mx + n \}$ trên $\mathbb{R}$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Gọi : $g(x) = ax^2 + bx + c$ là đa thức cơ sở có:

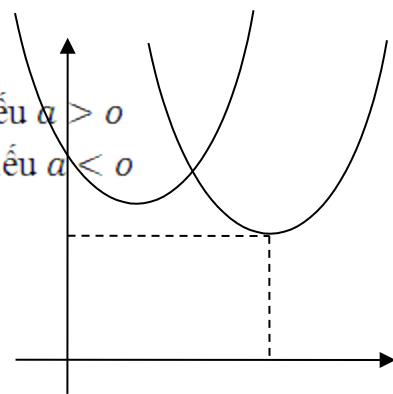
$$\begin{cases} \Delta_g = b^2 - 4ac \\ x_1, x_2 (x_1 < x_2) \text{ là hai nghiệm nếu xảy ra} \end{cases}$$

Trước hết, để đơn giản ta giải quyết bài toán thứ nhất : tìm min

$\{ |ax^2 + bx + c| + mx + n \}$ qua hai trường hợp:

• TH1: $\Delta_g = b^2 - 4ac \leq 0$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} f_1(x) = ax^2 + (b+m)x + c+n: \text{ nếu } a > 0 \\ f_2(x) = -ax^2 + (m-b)x - c+n: \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$



Đây là bài toán tầm thường ,ta có ngay kết quả :

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f_1\left(-\frac{m+b}{2a}\right) & (\text{tung đỉnh của } S) \\ \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f_2\left(\frac{m-b}{2a}\right) & (\text{tung đỉnh của } S) \end{cases}$$

y_s

S

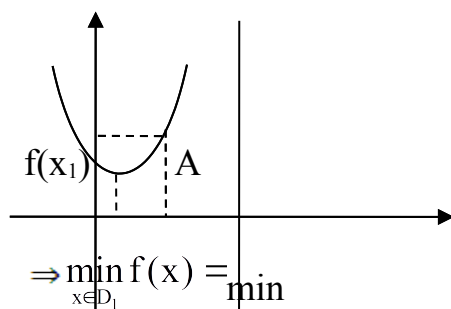
x_s

• TH2: $\Delta_g = b^2 - 4ac > 0$ và xét bài toán với $a_g \geq 0$

(khi $a_g < 0$, lập luận tương tự)

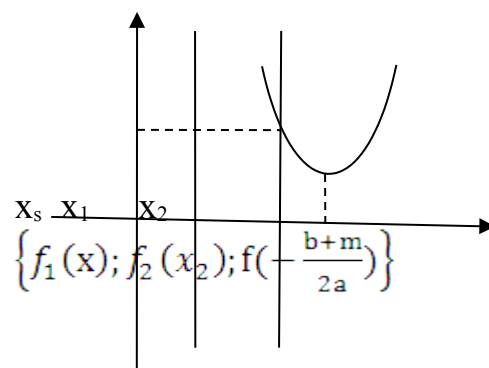
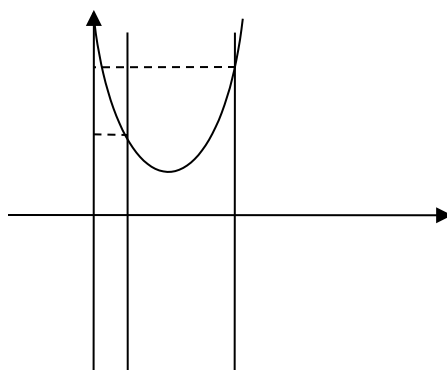
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} f_1(x) = ax^2 + (b+m)x + c + n; & \text{với } x \leq x_1 \vee x \geq x_2 \\ f_2(x) = -ax^2 + (m-b)x - c + n; & \text{với } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Khi : $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$; ta xét ba khả năng cho $f_1(x)$ như sau :



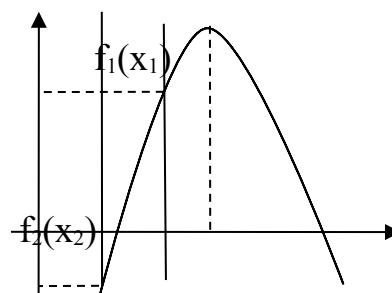
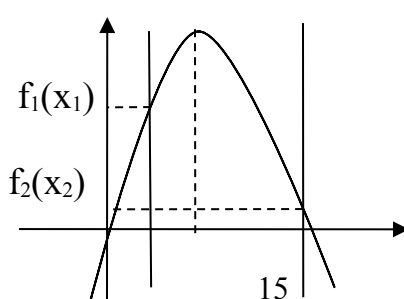
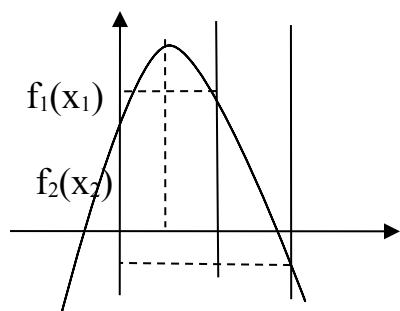
Với

$$D_1 = (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$$



$$\Rightarrow \min_{x \in D_1} f(x) = \min \left\{ mx_1 + n; mx_2 + n; f\left(-\frac{b+m}{2a}\right) \right\} \quad (I)$$

Khi : $x_1 < x < x_2$; ta xét khả năng cho $f_2(x)$ như sau :



$$\Rightarrow \min_{x \in D_2} f(x) = \min \{f_1(x); f_2(x_2)\} \text{ với } D_2 = [x_1; x_2]$$

$$\Rightarrow \min_{x \in D_2} f(x) = \min \{mx_1 + n; mx_2 + n\} \quad (II)$$

Kết hợp (I) và (II) cho ta trong mọi trường hợp :

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min \left\{ \min_{x \in D_1} f(x), \min_{x \in D_2} f(x) \right\}$$

BÀI TẬP :

Bài 1:[4]

Với những giá trị nào của tham số m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = |x^2 - 5x + 4| + mx \text{ lớn hơn } 1?$$

Giải:

$$\text{Đề ý rằng : } f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(x) \geq m \\ x = 4 \Rightarrow f(x) \geq 4m \end{cases}$$

$$\text{Ta viết : } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 5x + 4 + mx; \text{ với } x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ f_2(x) = -x^2 + 5x - 4 + mx; \text{ với } 1 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + (m - 5)x + 4; \text{ với } x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ f_2(x) = -x^2 + (5 + m)x - 4; \text{ với } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Áp dụng phương pháp trên ($a_g = 1 > 0$).ta có :

$$= \min \left\{ m; 4m; f_1 \left(\frac{5-m}{2} \right) \right\} > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 4m > 1 \\ \frac{(m-5)^2}{4} + 4 > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > 1/4 \\ 5 - 2\sqrt{3} < m < 5 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$1 < m < 5 + 2\sqrt{3} \quad (\text{ycbt})$$

Bài 2: [3]

Tìm các giá trị của tham số a để cho giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = 4ax + |4x - 3 - x^2|; \text{ lớn hơn } 2.$$

Giải:

$$\text{Ta viết: } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 4(a-1)x + 3; & \text{với } x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ f_2(x) = -x^2 + 4(a+1)x - 3; & \text{với } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow = \min\{f_1(1); f_2(3); f_1[-2(a-1)]\} > 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a > 2 \\ 12a > 2 \\ (a-1)^2 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Nhưng a nên chọn trong (1); $a = 1$ là số nguyên thỏa ycbt

Bài 3: [4]

Tìm những giá trị của tham số m để hàm số

$$y = |x^2 - 5x + 4| + mx \quad \text{có giá trị lớn nhất bằng } 1$$

Giải:

Yêu cầu bài toán tương đương việc quy về tìm sao cho

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx - 1 > 0; \forall x \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } g(x) = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{khi } x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{khi } x \in (1; 4) \end{cases}$$

$$\text{nên } \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f_1(x) = x^2 + (m-5)x + 3 > 0 & \text{với } (-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \\ f_2(x) = x^2 - 4(m+5)x + 5; & \text{với } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp:

- TH1: xác định m để:

$$f_1(x) = x^2 + (m-5)x + 3 > 0 \quad \text{với } (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f_1} < 0 \\ 1 < x_1 \leq x_2 < 4 \quad (\text{với } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của } f_1(x) = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-5)^2 - 4.1.3 < 0 \\ (m-5)^2 - 4.1.3 \geq 0 \\ f_1(4) = 4.4 + (m-5).4 + 3 > 0 \\ f_1(1) = 1 + (m-5) + 3 > 0 \\ 1 < \frac{S}{2} = \frac{5-m}{2} < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2\sqrt{3} < m < 5 + 2\sqrt{3} \\ 5 - 2\sqrt{3} \geq m \vee m \geq 5 + 2\sqrt{3} \\ m > 1 \\ m > \frac{1}{4} \\ -3 < S < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2\sqrt{3} < m < 5 + 2\sqrt{3} \\ 1 < m \leq 5 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$$

• TH2: Xác định m để: $f_2(x) = x^2 - 4(m+5)x + 5$; với $1 < x < 4$

$\Leftrightarrow x_3 \leq 1 < 4 \leq x_4$ (với x_3, x_4 là hai nghiệm của $f_2(x) = 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_2(1) \leq 0 \\ f_2(4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 1 \leq 0 \\ -4m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

TH1 $\cap$ TH2 :cho ta : $1 \leq m < 5 + 2\sqrt{3}$

Dạng 6: TÌM $\min_{x \in \mathbb{R}} \{ax^2 + bx + c + |mx + n|\}$

VÀ $\max_{x \in \mathbb{R}} \{ax^2 + bx + c + |mx + n|\}$

PHƯƠNG PHÁP:

Cũng như ở dạng trước, Ở đây trình bày phương pháp tìm :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \{ax^2 + bx + c + |mx + n|\} \quad \text{với } \forall a > 0 \text{ và } m > 0 (*)$$

Các trường hợp khác với (*) cũng lập luận tương tự :

Đề ý rằng khi đặt : $f(x) = ax^2 + bx + c + |mx + n|$

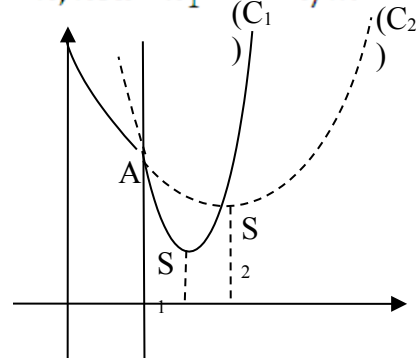
$$\Rightarrow f(x) \geq ax^2 + bx + c \quad (1)$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi: $x = -\frac{n}{m} \Rightarrow f\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{an^2}{m} - \frac{bn}{m} + c$

Ta xét : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = ax^2 + (b+m)x + c + n; & \text{nếu } x_1 \geq -n/m \\ f_2(x) = ax^2 + (b-m)x + c - n; & \text{nếu } x_1 < -n/m \end{cases}$

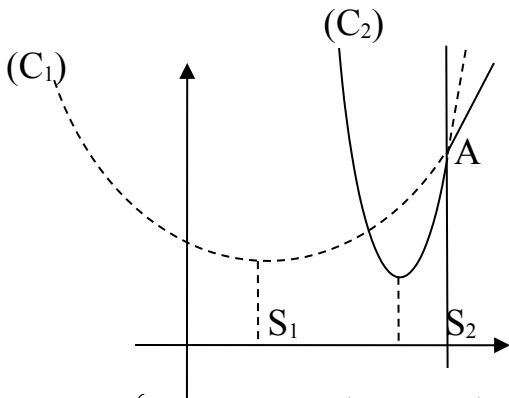
Qua các trường hợp sau:

$$\oplus -\frac{n}{m} \leq -\frac{(b+m)}{2a} \Leftrightarrow m^2 + bm \leq 2na$$



$$\text{Thì : } \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f_1\left(-\frac{b+m}{2a}\right) \\ m^2 + bm \leq 2na \end{cases}$$

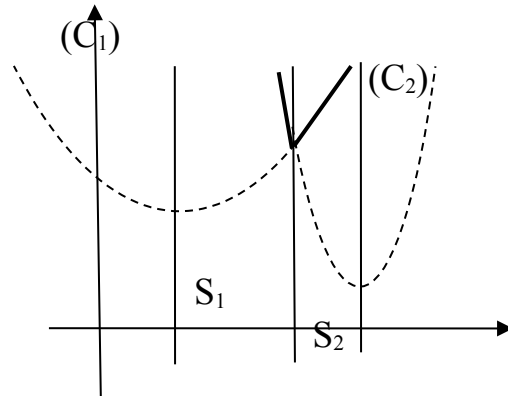
$$\oplus -\frac{n}{m} \geq -\frac{(b-m)}{2a} \Leftrightarrow m^2 + bm \geq 2na$$



$$\text{Thì : } \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f_1\left(-\frac{b-m}{2a}\right) \\ m^2 + bm \geq 2na \end{cases}$$

$$\oplus \frac{-(b+m)}{2a} < -\frac{n}{m} < -\frac{(b-m)}{2a}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - bm < 2na < m^2 + bm$$



$$\text{Thì : } \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \frac{an^2}{m} - \frac{bn}{m} + c \\ m^2 + bm \geq 2na \geq -m^2 + bm \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min \left\{ f\left(-\frac{n}{m}\right); f\left(-\frac{b-m}{2a}\right); f\left(-\frac{b+m}{2a}\right) \right\}$$

BÀI TẬP:

Bài 1: [4]

Tìm m để với mọi x , ta có: $f(x) = x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$

Giải:

$$\text{Xét : } f(x) = x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 \geq f(m) = 2 - m^2$$

$$\Rightarrow y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 2(m-1)x - 2(m-1); \text{ nếu } x \geq m \\ f_2(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2(m+1); \text{ nếu } x \leq m \end{cases}$$

Gọi S_1, S_2 là đỉnh của Parabol $(P_1): y = f_1(x)$; $(P_2): y = f_2(x)$. ta có

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x_{S_1}) = f_1(m-1) = 1 - m^2 \\ f_2(x_{S_2}) = f_2(m+1) = 1 - m^2 \end{cases}$$

Đề ý rằng : $x_{S_1} = m-1 < m < m+1 = x_{S_2}$

$$\min_{x \in \mathbf{R}} y > 0 \Leftrightarrow \min\{2 - m^2; 1 - m^2\} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \quad (\text{ycbt})$$

Bài 2: [3]

Tìm giá trị của tham số sao cho GTNN của hàm số ≤ 2 . Biết rằng :

$$y = f(x) = |x^2 - 2x + 1| + 2|x - m|$$

Giải:

Đề ý rằng : $y = f(x) = (x-1)^2 + 2|x - m|$

$$\Rightarrow y = f(x) \geq (x-1)^2 \quad (\text{đẳng thức xảy ra khi } x=m)$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \geq (m-1)^2$$

Gọi S_1, S_2 là đỉnh của các Parabol : $(P_1): y = f_1(x)$; $(P_2): y = f_2(x)$. Như sau:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 1 - 2m; & \text{nếu } x \geq m \\ f_2(x) = x^2 - 4x + 1 + 2m & ; \text{nếu } x \leq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x_{S_1}) = f_1(0) = 1 - 2m & (x \geq m) \\ f_2(x_{S_2}) = f_2(2) = 2m - 3 & (x \leq m) \end{cases}$$

Để $\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) \leq 2$ ta xét:

• TH1: $m \leq 0 = x_{S_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f(0) = 1 - 2m \leq 2 \\ m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$$

• TH2: $m \geq 2 = x_{S_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f(2) = 2m - 3 \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5/2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 5/2$$

• TH3: $x_{S_1} = 0 < m \leq 2 = x_{S_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f(m) = (m - 1)^2 \leq 2 \\ 0 < m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2} \\ 0 < m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Kết hợp cả ba trường hợp ta được: $-1/2 \leq m \leq 5/2$ (ycbt)

Bài 3: [2]

Tìm các giá trị của tham số m sao cho: $x^2 + (m + 1)^2 + 2|x - m + 1| \leq 3$ (1)

Giải:

Xét tam thức bậc hai đặc trưng cho (1), ta có:

$$f(x) = x^2 + (m + 1)^2 + 2|x - m + 1|$$

Suy ra $f(x) \geq x^2 + (m + 1)^2$ (dấu đẳng thức xảy ra khi $x = m - 1$)

Suy ra $f(x) \geq (m - 1)^2 + (m + 1)^2 = 2(m^2 + 1)$

$$\text{Xét: } f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 + 2x + m^2 + 3 & \text{nếu } x \geq m - 1 \\ f_2(x) = x^2 - 2x + m^2 + 4m - 1 & \text{nếu } x \leq m - 1 \end{cases}$$

Gọi S_1, S_2 là các đỉnh của Parabol $(P_1): y = f_1(x); (P_2): y = f_2(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x_{S_1}) = f_1(-1) = m^2 + 2 \\ f_2(x_{S_2}) = f_2(1) = m^2 + 4m - 2 \end{cases}$$

Ta xét 3 trường hợp $\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) \leq 3$ như sau:

• TH1: $m - 1 \leq -1 = x_{S_1} \Leftrightarrow m \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) \leq 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2 + 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -1 \leq m \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0 \end{aligned}$$

• TH2: $m - 1 \geq 1 = x_{S_2} \Leftrightarrow m \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) \leq 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^2 + 4m - 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ -5 \leq m \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m \in \emptyset \end{aligned}$$

• TH3: $-1 < m - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 2$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) \leq 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 2 \\ 2(m^2 + 1) \leq 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Bài4: [1]

Tìm các giá trị của tham số để: $2|x - m| - (x - 2)^2 \leq 3, \forall x$

HD:

Bạn có thể giải bài này bằng cách làm tương tự như những bài trên.

▣ MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO

1/ Tìm GTLN VÀ GTNN của các hàm số sau:

a. $y = \frac{3x+1}{4x^2-3x+1}$

b. $y = \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$

c. $y = \cos^4 x + \sin^4 x + a \cos x \sin x$

2/ Giả sử x, y liên hệ với nhau bằng hệ thức

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2 y^2 - x^2 - y^2 = 0$$

Hãy tìm GTLN và GTNN của biểu thức $S = x^2 + y^2$

3/ Giải và biện luận nghiệm của bất phương trình theo tham số a như sau

a. $|x^2 - 3x + 2| < a$

b. $2|x - a| - (x - 2)^2 \leq 3, \forall x$

CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] 15 PHƯƠNG PHÁP CHUYÊN ĐỀ TAM THỨC BẬC HAI VÀ CÁC ỨNG DỤNG ĐẶC SẮC

NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG _ NGUYỄN VĂN VĨNH

[2] TAM THỨC BẬC HAI – ỨNG DỤNG

LÊ HỒNG ĐỨC

[3] BÁC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

[4] TRANG WED: BOXMATH.VN