

CHỦ ĐỀ 4

GTLN, GTNN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM HỢP

DẠNG 1

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP $y = f(u(x))$

Câu 1. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M + m$.

B. $2M + m$.

C. $M + 2m$.

D. $2M + 2m$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}, x \in [0; 2]$.

$$g'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Ta có:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$$

Bảng biến thiên:

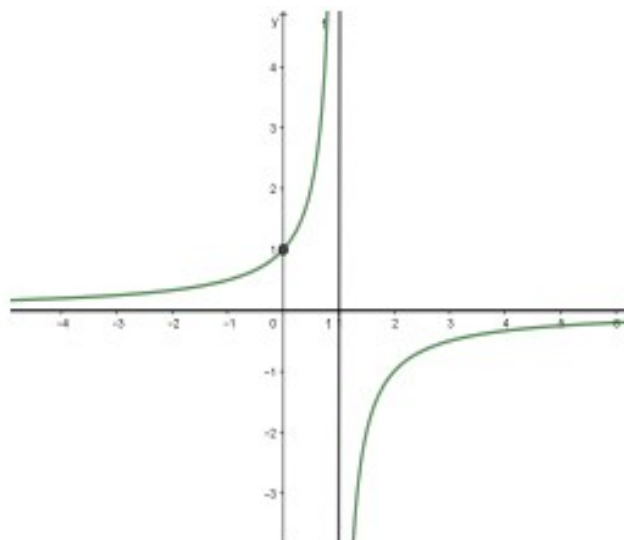
x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	2	$\frac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0 \leq g(x) \leq 2$.

Do đó: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi hàm số $y = f[g(x)]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$ là $M + m$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$.



A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. $-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y = \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

TCD là $x = -\frac{d}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\frac{b}{d} = 1 \Leftrightarrow b = d (d \neq 0)$.

Khi đó $f(x) = \frac{d}{-dx+d} = \frac{1}{-x+1} \Rightarrow g(x) = f(f(x)) = \frac{1}{-\frac{1}{-x+1}+1} = \frac{-x+1}{-x}$.

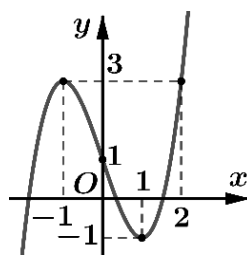
TXĐ hàm $g(x)$ là $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ xác định trên $[-3; -1]$.

$g'(x) = \frac{1}{x^2}$, với $\forall x \in [-3; -1]$.

$g(-3) = \frac{4}{3}$, $g(-1) = 2$.

Vậy $\max_{[-3; -1]} g(x) = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = 3$.

B. $m = -12$.

C. $m = -13$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn C.

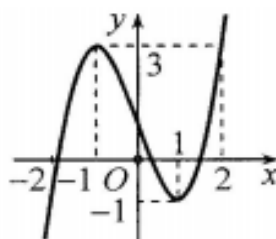
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1;2]} f(t) = 3 \Rightarrow \max_{[-1;2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y = f(\sqrt{4-x^2})$ trên nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ là

A. 3.

B. -1.

C. 0.

D. Không tồn tại

Lời giải

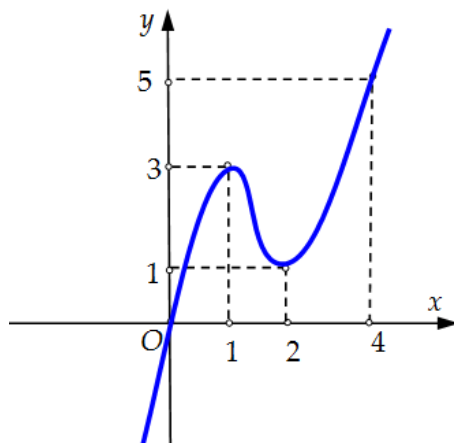
Chọn A.

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ta có: $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ do $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ nên $t \in (1;2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x), x \in (1;2]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A.

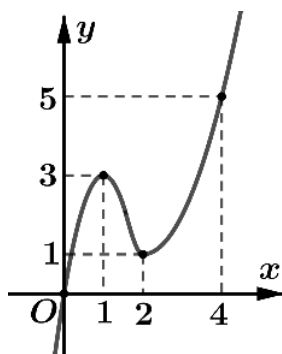
Đặt $t = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = \sin x + 3$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [2; 4]$.

$$\forall t \in [2; 4] \Rightarrow 1 \leq f(t) \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 5 \\ m = \min_{\mathbb{R}} g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6.$$

Từ đồ thị ta thấy:

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN

– GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.



Tổng $M + m$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C.

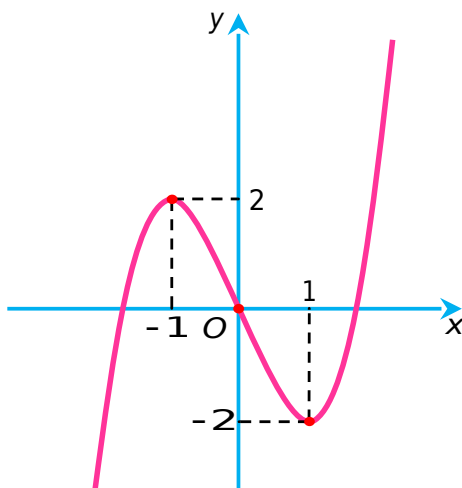
Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Vì $0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2.$

Dựa vào đồ thị suy ra
$$\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 4.$$

Câu 7. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi

M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$.



A. $M^2 + m^2 = 4$.

B. $M^2 + m^2 = 1$.

C. $M^2 + m^2 = 25$.

D. $M^2 + m^2 = 2$.

Lời giải

Chọn A.

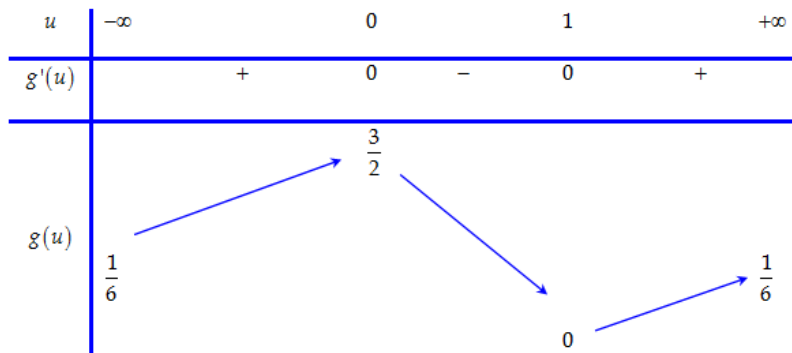
Ta có:
$$t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4} = \frac{8x^2 + 8y^2 - 16}{8x^2 - 8y^2 - 16xy + 2.16} = \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{18x^2 - 4xy + 2y^2}.$$

TH1: Xét $y = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow f(t) = m \in (0; -2).$

TH2: Xét $y \neq 0 \Rightarrow t = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 3}{18\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\frac{x}{y} + 2}$.
Đặt $u = \frac{x}{y}$, ta có: $t = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}.$

Xét $g(u) = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}; g'(u) = \frac{96u^2 - 96u}{(18u^2 - 4u + 2)^2}; g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases}$.

Ta lại có: $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \frac{1}{6}$. Từ đó lập bảng biến thiên ta có



$$0 \leq g(u) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{3}{2}.$$

Từ bảng biến ta có

$$\max P = 0; \min P = -2.$$

Quan sát đồ thị ta thấy rằng:

$$\text{Vậy } M^2 + m^2 = 4.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{21}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	2	5	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $M.m > 10$. B. $\frac{M}{m} > 2$. C. $M - m > 3$. D. $M + m > 7$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x. \text{ Ta có } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x - 1 \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2 \leq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq \frac{21}{4} \text{ nên } t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right].$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$$

$$m = \min_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2, M = \max_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2$$

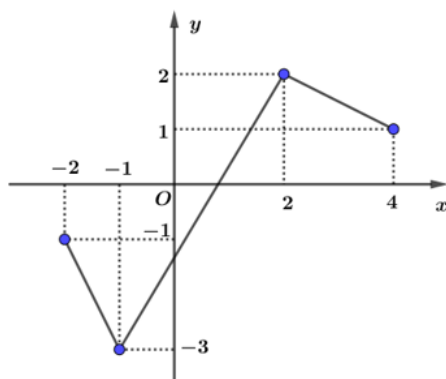
Từ bảng biến thiên suy ra:

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM HỢP CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

$$y = f(|x|), y = f(|u(x)|), y = f(|x| + b), y = f(|u(x)| + b), y = f(|x + a| + b), y = f(|u(x) + a| + b)$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.



A. $|f(0)|$.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

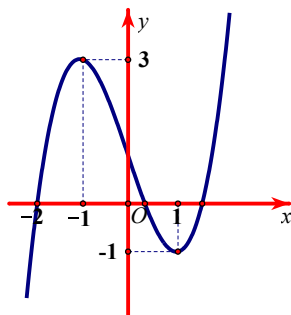
*** Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:**

$$\max_{[a; b]} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{[a; b]} f(x) \right|; \left| \min_{[a; b]} f(x) \right| \right\}$$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{[-2; 4]} f(x) = 2$ khi $x = 2$ và $\min_{[-2; 4]} f(x) = -3$ khi $x = -1$.

Vậy $\max_{[-2; 4]} |f(x)| = 3$ khi $x = -1$.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = 673M - 2019m$.

A. $T = 2019$.

B. $T = 0$.

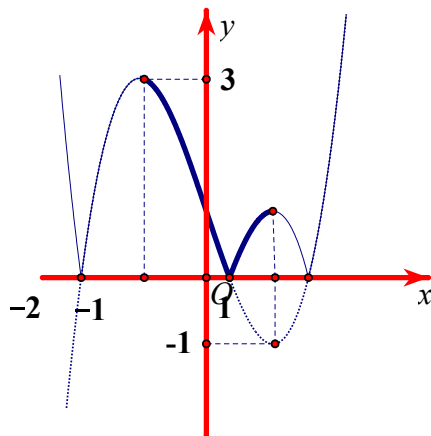
C. $T = 4038$.

D. $T = 2692$.

Lời giải

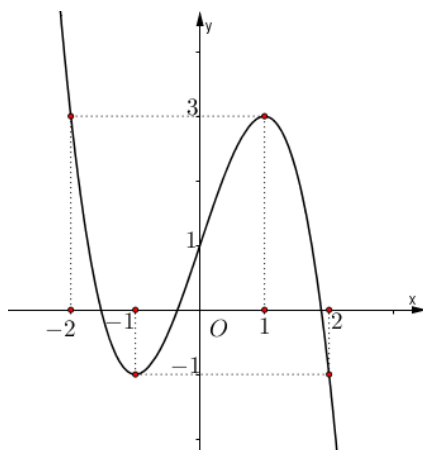
Chọn A.

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.
- Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 2019$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(2x - 1)|$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
 Tính giá trị $M - m$.

A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

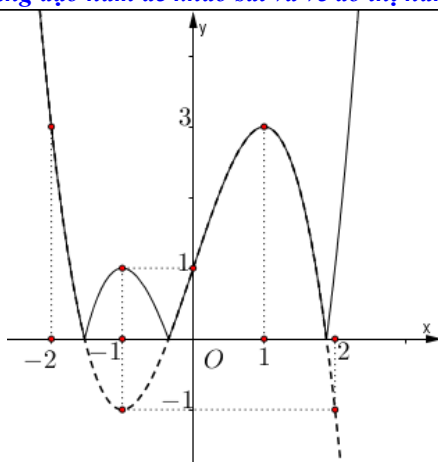
Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = 2x - 1$.

Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

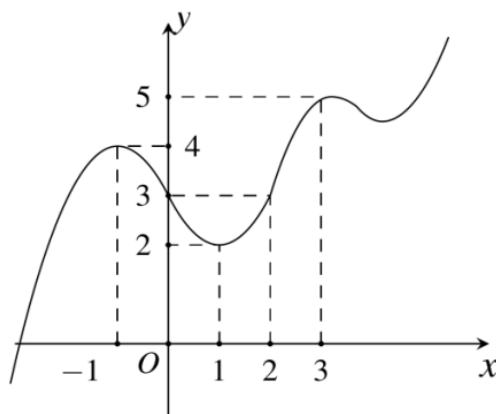
Đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ có dạng



Suy ra với $t \in [-1; 0]$ ta có $m = 0$, $M = 1$.

Vậy $M - m = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M , m theo thứ tự là GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x - 2|)$ trên đoạn $[-1, 5]$. Tổng $M + m$ bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x - 2| \leq 3$

Do đó $\forall x \in [-1; 5]$, $0 \leq |x - 2| \leq 3$.

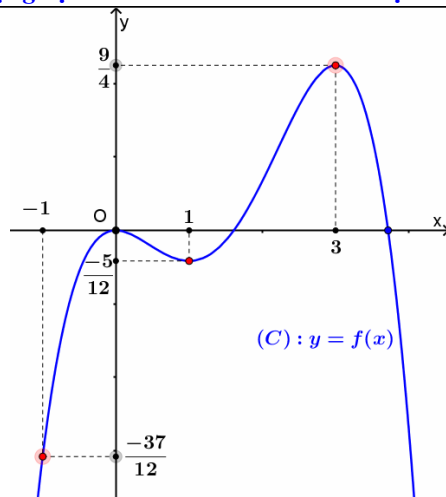
Đặt $t = |x - 2|$ với $t \in [0; 3]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục $\forall t \in [0; 3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max_{[0; 3]} f(t) = 5$, $\min_{[0; 3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2$, $M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ^(C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y = f(|-x^3 + 3x^2 - 1|)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

- A. 0. B. $\frac{-111}{16}$. C. $\frac{-45}{48}$. D. $\frac{185}{144}$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y = g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$;

$$+ g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2); \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Vì } \begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(0) = -1 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = -1 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \min_{[-1; 3]} g(x) = -1 \\ \max_{[-1; 3]} g(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 3, \forall x \in [-1; 3]$$

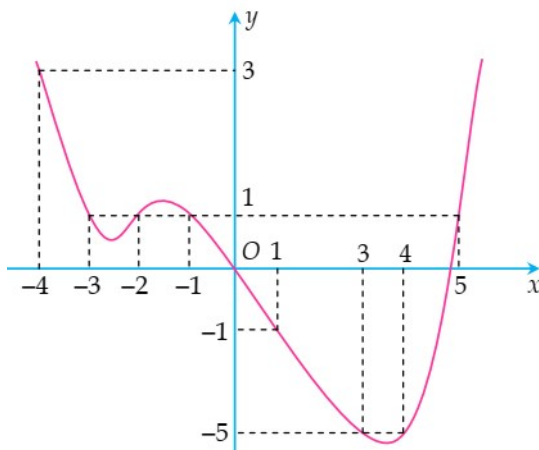
Từ đồ thị $(C): y = f(x)$;

$$+ m = \min_{[-1; 3]} f(|g(x)|) = \frac{-5}{12} \text{ khi } |g(x)| = 1 \text{ tại } x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \dots$$

$$+ M = \max_{[-1; 3]} f(|g(x)|) = \frac{9}{4} \text{ khi } |g(x)| = 3 \text{ tại } x = -1 \vee x = 2.$$

$$\text{Vậy } m.M = \frac{-45}{48}.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

- A. $T = 2$. B. $T = 0$. C. $T = -8$. D. $T = 14$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Với $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ ta có: $0 \leq \sqrt{6x - 9x^2} = \sqrt{-9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1} \leq 1$.

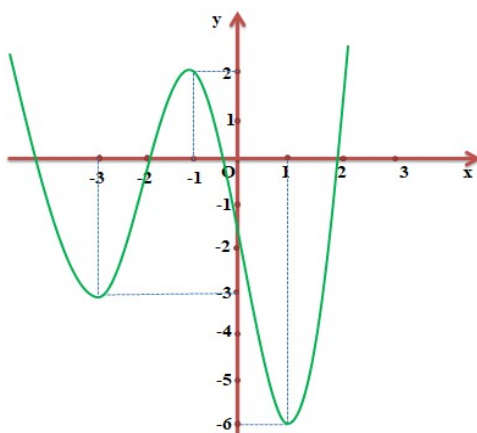
$\Rightarrow 0 \geq -2\sqrt{6x - 9x^2} \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 3 - 2\sqrt{6x - 9x^2} \geq 1$.

Đặt $u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right| \Rightarrow 1 \leq u \leq 3$.

Xét hàm số $y = f(u)$ với $u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|$ trên đoạn $[1; 3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $M = -1; m = -5 \Rightarrow T = 3M - m = -3 + 5 = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x - 1)|$ trên đoạn $[-3; 3]$. Tìm M .

- A. $M = 0$. B. $M = 6$. C. $M = 5$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = x - 1$ Do $x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-4; 2]$.

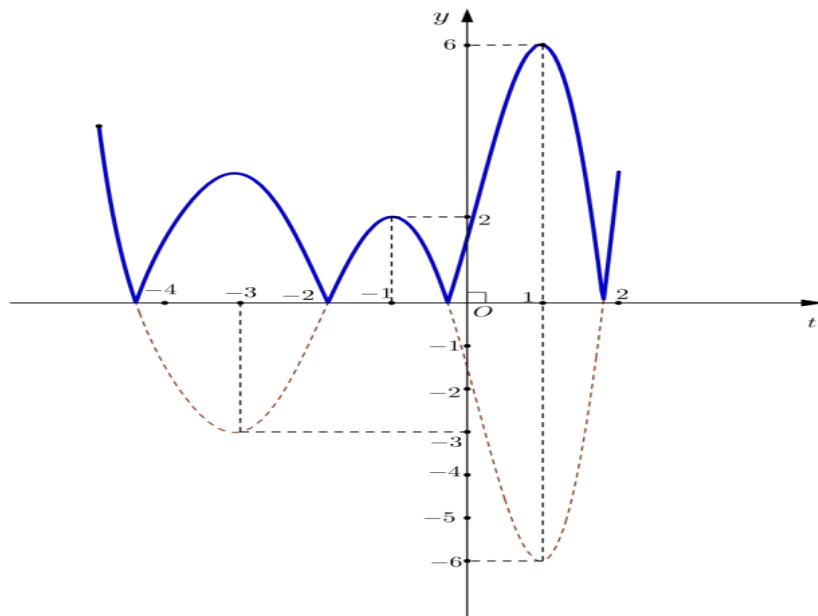
Xét hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).

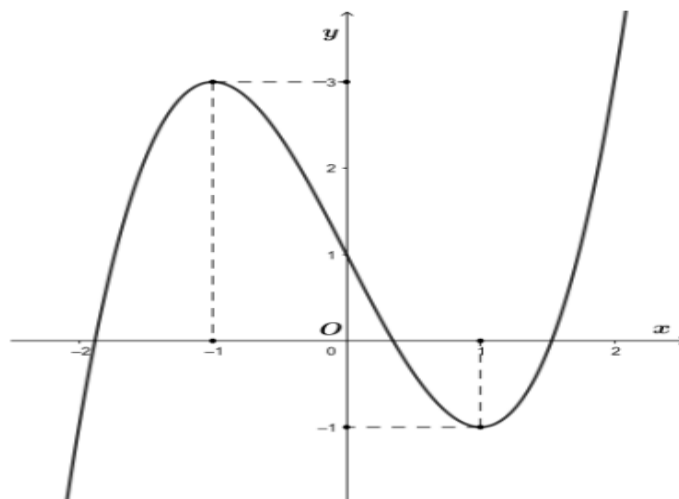
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M = 6$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max_R |f(\sin^2 2x)|, m = \min_R |f(\sin^2 2x)|$. Tổng $M + m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

$$\forall x \in R, 0 \leq \sin^2 2x \leq 1$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên R ta có $\max_{[0;1]} f(x) = 1 = f(0), \min_{[0;1]} f(x) = -1 = f(1)$.

$$\min_{[0;1]} f(x) = -1 < 0 < \max_{[0;1]} f(x) = 1$$

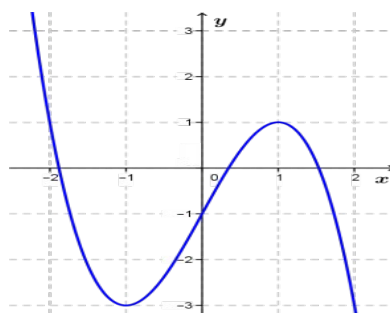
nên

Vì

$$M = \max_R |f(\sin^2 2x)| = \max_{[0;1]} |f(x)| = \max_{[0;1]} f(x) = 1, m = \min_R |f(\sin^2 2x)| = 0$$

Vậy $M + m = 1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



A. 2.

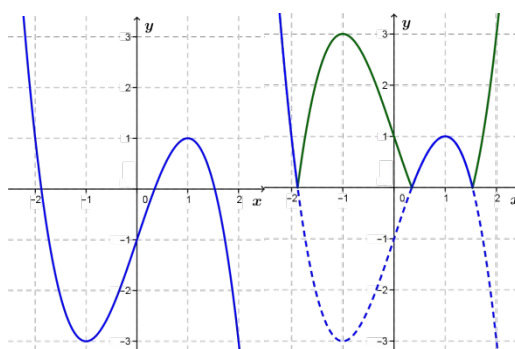
B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A.



Xét hàm số: $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$.

$$\text{Đặt } t = 2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2 = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - 2 = -4\sin^2 x \cos^2 x$$

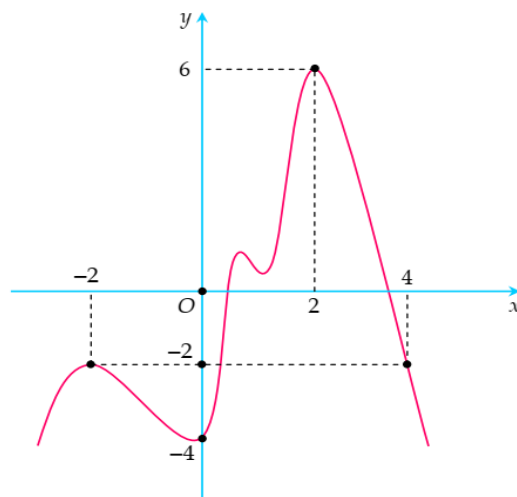
$$\Rightarrow t = -\sin^2 2x \quad (-1 \leq t \leq 0). \text{ Suy ra hàm số } g(x) \text{ có dạng } |f(t)| \quad (-1 \leq t \leq 0).$$

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, ta có:

$$\max_{t \in [-1; 0]} g(x) = \max_{t \in [-1; 0]} |f(t)| = 3 \Rightarrow M = 3 \quad \min_{t \in [-1; 0]} g(x) = \min_{t \in [-1; 0]} |f(t)| = 1 \Rightarrow m = 1$$

. Nên $M - m = 2$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3} f \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \right) \right|$. Khi đó tổng $m + M$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} |\sin x| \leq \frac{\pi}{3}$.

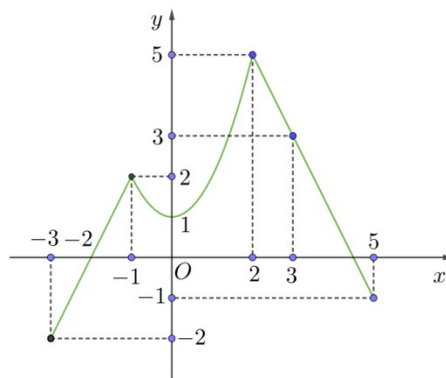
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0 \leq \sin \left(\frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \leq \sin \frac{\pi}{3}$.

Hay $0 \leq \sin \left(\frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3} f \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} |\sin x| \right) \right) \in \left[-\frac{4}{3}; 2 \right]$

Từ đó $\max y = 2; \min y = 0$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3\cos x + 4\sin x| - 2)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = |3\cos x + 4\sin x| - 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ta có: } (3\cos x + 4\sin x)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 25$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |3\cos x + 4\sin x| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq |3\cos x + 4\sin x| - 2 \leq 3$$

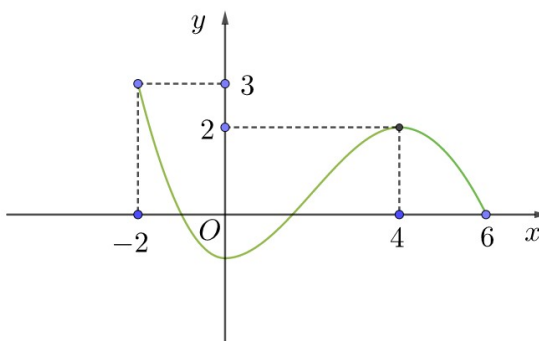
$$\text{Vậy } t \in [-2; 3]$$

Khi đó hàm số $y = f(|3\cos x + 4\sin x| - 2)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-2; 3]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3\cos x + 4\sin x| - 2)$ bằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 3]$.

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } f(x) \text{ ta có: } \min_{\mathbb{R}} f(|3\cos x + 4\sin x| - 2) = \min_{[-2; 3]} f(t) = f(-2) = 0$$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x| + 1)$ trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của M bằng

A. 3

B. -1.

C. 2.

D. 0.

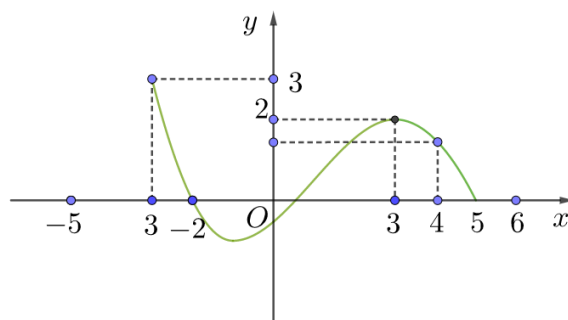
Lời giải

Chọn C.

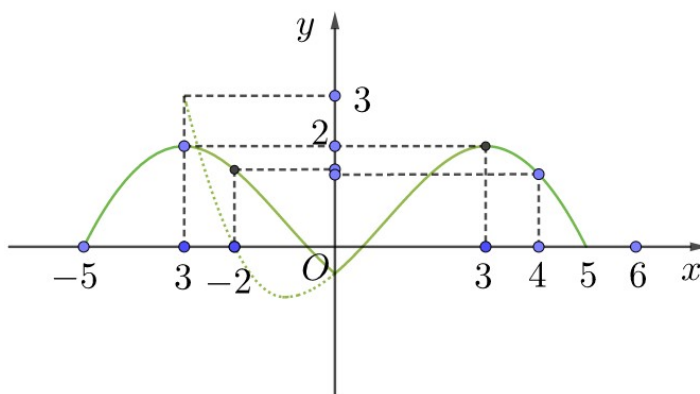
Xét hàm số $y = f(|x| + 1)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ hàm số $y = f(|x| + 1)$ trở thành $y = f(x + 1)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái (theo phương Ox) 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ như sau:

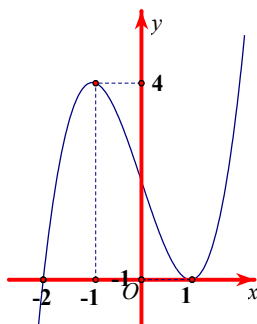


Từ đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x| + 1)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ bên phải trục Oy qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số $y = f(|x| + 1)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y = f(|x| + 1)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x| + 1)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 2.

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x^2 + 2x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

A. $T = 3$.

B. $T = -2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

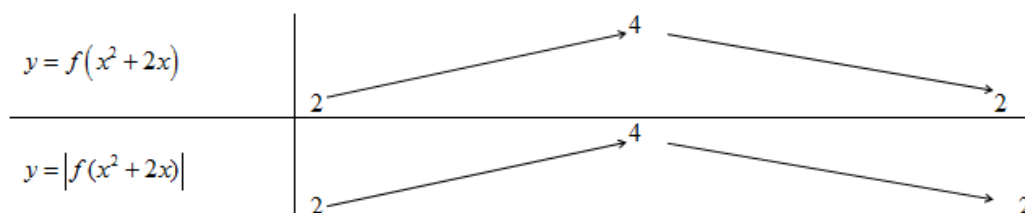
Chọn B.

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow \\ x^2 + 2x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \notin [-2; 0] \end{cases}$$

Cách 1: Tính $y(-2) = y(0) = f(0) = 2$; $y(-1) = 4$

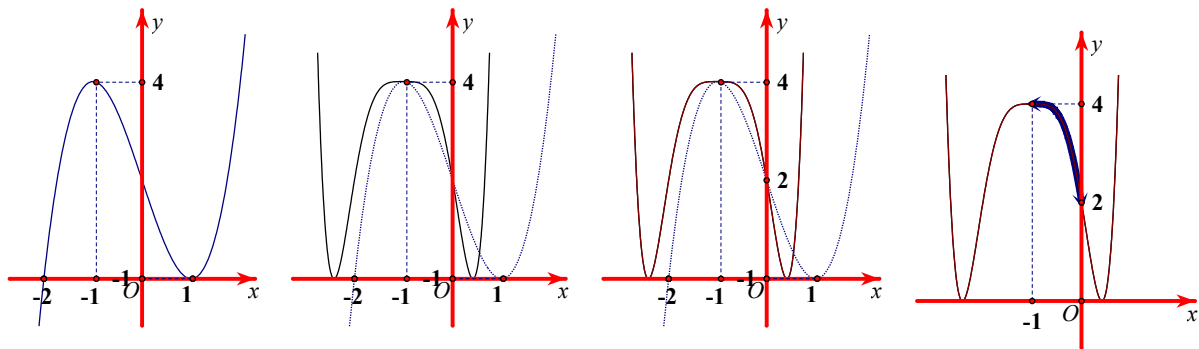


Suy ra giá trị $M = 4, m = 2$ hay $T = -2$.

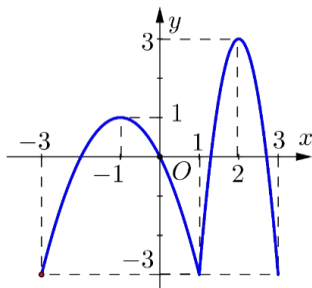
Cách 2: Lập bảng

x	-2	-1	0
$x^2 + 2x$	0	-1	0
$y = f(x^2 + 2x)$	-	0	-
$2x + 2$	-	0	+
$y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$	+	0	-
$y = f(x^2 + 2x)$	2	4	2
$y = f(x^2 + 2x) $	2	4	2

Vậy $M = 4, m = 2$ suy ra $T = -2$.



Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(\sin 3x + \sin^3 x)|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e .

B. 4.

C. 2009^{-3} .

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3 \sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 \sin x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-3; 3]$

Hàm số trở thành $y = |f(t)|$

Từ đồ thị hàm $f(t)$ trên đoạn $[-3; 3]$ ta suy ra

$$\min_{[-3; 3]} f(t) = -3, \max_{[-3; 3]} f(x) = 3 \Rightarrow \min_{[-3; 3]} |f(t)| = 0, \max_{[-3; 3]} |f(x)| = 3$$

$$\text{Vậy } e^{\ln M} + 2019^m = e^{\ln 3} + 2019^0 = 4.$$

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau