

Đề chính thức

Môn: Toán

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày 12 tháng 4 năm 2016

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Số báo danh

.....

Câu 1: (5,0 điểm)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right).$

b. $B = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}.$

c. $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016} \right)^0$, biết $x - y = 0.$

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \leq 0.$

2. Tìm x, y, z biết: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 18.$

Câu 3: (5,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y - 3 = 0.$

2. Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101.$ Tính $f(100).$

3. Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 4: (5,0 điểm)

1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng:

a. $AM = AN.$

b. $\triangle MON$ là tam giác đều.

2. Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

----- Hết -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

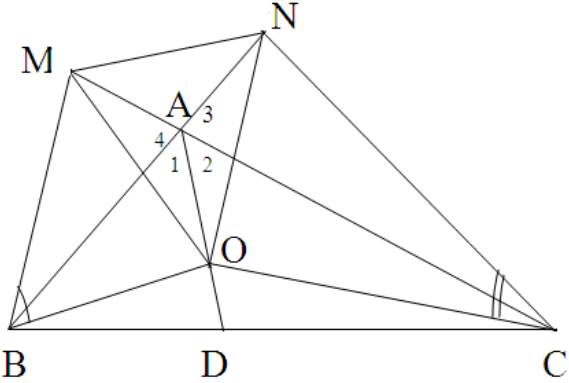
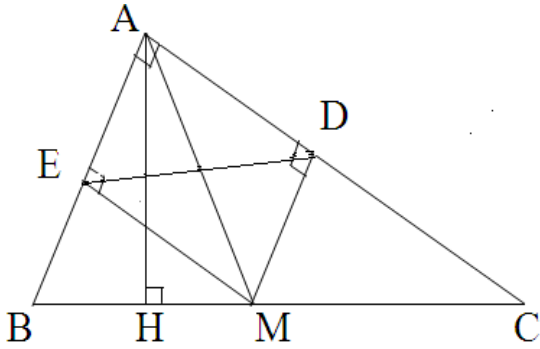
Hướng dẫn chấm

Môn: Toán

Ngày 12 tháng 4 năm 2016
(Hướng dẫn chấm có 03 trang, gồm 05 câu)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (5,0đ)	a. $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3} \right) \left(1 + \frac{1}{2.4} \right) \left(1 + \frac{1}{3.5} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{2015.2017} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017} \right) = \frac{2016}{2017}.$	0,75 0,75
	b. Vì $x = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$ Với $x = \frac{1}{2}$ thì $B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$ Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5 = 7$ Vậy $B = 4$ với $x = \frac{1}{2}$ và $B = 7$ với $x = -\frac{1}{2}$.	0,5 0,75 0,75
	c. $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016} \right)^0$ $= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (vì } x - y = 0 \text{)}.$	1,5
2 (4,0đ)	1. Vì $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 \geq 0$ với $\forall x$; $3y + 12 \geq 0$ với $\forall y$, do đó: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + 3y + 12 \geq 0 \text{ với } \forall x, y.$ Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + 3y + 12 \leq 0$. Từ đó suy ra: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + 3y + 12 = 0$ Khi đó $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \text{ và } y = -4.$ Vậy $x = \frac{1}{12}$ và $y = -4$.	0,5 0,25 0,5 0,75
	2. Ta có: $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ Suy ra: $\frac{4(3x - 2y)}{16} = \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{29} = 0$ Do đó: $\frac{3x - 2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$	0,5 0,25

	$\frac{2z - 4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 4} = \frac{18}{9} = 2.$ Suy ra: $x = 4; y = 6; z = 8$.	0,25 0,25 0,5 0,25																									
3 (5,0đ)	1. Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 5$ $\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$ Lập bảng : <table><tr><td>$2x - 1$</td><td>1</td><td>5</td><td>-1</td><td>-5</td></tr><tr><td>$1 - 2y$</td><td>5</td><td>1</td><td>-5</td><td>-1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>-2</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td></tr></table> Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (3; 0), (0; 3), (-2; 1)\}$.	$2x - 1$	1	5	-1	-5	$1 - 2y$	5	1	-5	-1	x	1	3	0	-2	y	-2	0	3	1		Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	0,75 1,0 0,25
	$2x - 1$	1	5	-1	-5																						
	$1 - 2y$	5	1	-5	-1																						
x	1	3	0	-2																							
y	-2	0	3	1																							
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn																							
2. Ta có: $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$ $= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101$ $= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101)$ Suy ra $f(100) = 1$.	0,75 0,75 0,5																										
3. Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$. Nhận thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì: $a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$ $a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$ $a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3 + 2 = 5$ $a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$ $a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$ $a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13 + 8 = 21 \text{ (trái với giả thiết).}$ Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó, trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.	0,25 0,25 0,25 0,25																										
4 (5,0đ)	1.	0,5																									

	a. ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{A} = 120^\circ$ Do AD là tia phân giác nên $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 60^\circ$. Ta lại có: $\widehat{A_3} = \widehat{A_4} = 180^\circ - \widehat{A} = 60^\circ$. Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_3} = \widehat{A_4} (= 60^\circ)$ $\Delta ABM = \Delta ABD$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = AO$ (1) $\Delta ACN = \Delta ACO$ (g.c.g) $\Rightarrow AN = AO$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$. b. $\Delta AOM = \Delta AON$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (3) $\Delta AOM = \Delta AMN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = NM$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM$. Do đó ΔMON là tam giác đều.		0,75 0,5 0,5 0,25 0,5 0,5 0,5
	2. Hướng dẫn: $DE = AM \geq AH$ (AH là đường cao của ΔABC). Vậy DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng với H.		0,5 0,5
5 (1,0đ)	Ta có: $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2(x+y)}{x} + \frac{b^2(x+y)}{y} = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y}$ $= \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$. Các số dương $\frac{a^2 y}{x}$ và $\frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1-x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}$ Suy ra $y = \frac{b}{a+b}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}$ và $y = \frac{b}{a+b}$.		0,5 0,25 0,25

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.

