

**Bài 1: (3,5 điểm)**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  ta có:

$$A = 7.5^{2n} + 12.6^n \text{ chia hết cho } 19$$

**Bài 2: (2,5 điểm)**

Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho:  $n + 24$  và  $n - 65$  là hai số chính phương

**Bài 3: (3,0 điểm)**

Cho  $a, b > 0$  và  $a + b = 1$ .

Chứng minh rằng : 
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq 12,5$$

**Bài 4: (3,0 điểm)**

Cho  $x, y$  là hai số dương thỏa mãn :  $x^2 + y^2 = 4$ .

$$E = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

**Bài 5: (4,0 điểm)**

Cho tam giác ABC có D là trung điểm cạnh BC, điểm M nằm trên trung tuyến AD. Gọi I, K lần lượt là các trung điểm tương ứng của MB, MC và P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia DI, DK với các cạnh AB, AC.

Chứng minh: PQ // IK.

**Bài 6: (4,0 điểm)**

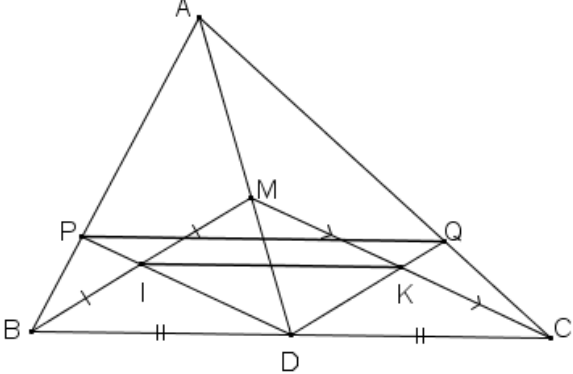
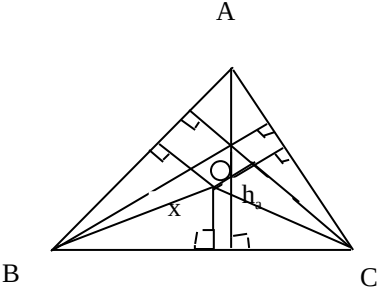
Cho tam giác ABC có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C xuống các cạnh BC, CA và AB tương ứng là  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$ . Gọi O là một điểm bất kỳ trong tam giác đó và khoảng cách từ O xuống ba cạnh BC, CA và AB tương ứng là  $x$ ,  $y$  và  $z$ .

Tính 
$$M = \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}$$

---

**HƯỚNG DẪN CHẤM**  
**ĐỀ THI HSG LỚP 9 CẤP HUYỆN - MÔN TOÁN**

<p><b>Bài 1</b> <b>(3,5đ)</b></p>	<p>Với <math>n = 0</math> ta có <math>A(0) = 19 \div 19</math>            Giả sử <math>A</math> chia hết cho <math>19</math> với <math>n = k</math> nghĩa là: <math>A(k) = 7.5^{2k} + 12.6^k \div 19</math>            Ta phải chứng minh <math>A</math> chia hết cho <math>19</math> với <math>n = k + 1</math> nghĩa là phải chứng minh:  <math>A(k + 1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} \div 19</math>            Ta có: <math>A(k + 1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1}</math>  <math>= 7.5^{2k}.5^2 + 12.6^n.6</math>  <math>= 7.5^{2k}.6 + 7.5^{2k}.19 + 12.6^n.6</math>  <math>= 6.A(k) + 7.5^{2k}.19 \div 19</math>            Vậy theo nguyên lý quy nạp thì <math>A = 7.5^{2n} + 12.6^n</math> chia hết cho <math>19</math> với mọi số tự nhiên <math>n</math></p>	<p>0,5 0,75 0,75   1,0 0,5</p>
<p><b>Bài 2</b> <b>(2,5đ)</b></p> <p>1</p>	<p>Ta có: <math>n+24=k^2</math>  <math>\Leftrightarrow k^2 - 24 = h^2 + 65</math>  <math>\Leftrightarrow (k-h)(k+h) = 89 = 1.89</math>  <math>\Leftrightarrow k+h = 89</math>  <math>n = 45^2 - 24 = 2001</math></p> <p style="text-align: right;">Vậy:</p>	<p>0,5 0,5 0,5 0,5 0,5</p>
<p><b>Bài 3</b> <b>(3,0đ)</b></p>	<p>Nhận xét rằng với mọi <math>x, y</math> ta có:</p> $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ $\Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2xy$ $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ <p>Đặt <math>\left(a + \frac{1}{a}\right) = x; \left(b + \frac{1}{b}\right) = y</math> ta được:</p> $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2$ <p>Vì <math>1 = (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}</math></p> $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2 = 12,5$ <p>Do đó:</p>	<p>0,5 0,5 0,75 0,5 0,75</p>
<p><b>Bài 4</b> <b>(3,0đ)</b></p>	<p>Ta có</p> $E = (x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$	<p>0,5 1,0</p>

	<p>Áp dụng BĐT: <math>\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}</math> với <math>a &gt; 0; b &gt; 0</math>.</p> <p>Ta có <math>\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \frac{4}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 1</math></p> <p>Áp dụng BĐT: <math>\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2</math> với <math>a &gt; 0; b &gt; 0</math>.</p> <p>Ta có <math>\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 4</math></p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức E = 9. Dấu "=" xảy ra khi <math>x = y = \sqrt{2}</math></p>	<p>1,0</p> <p>0,5</p>
<p><b>Bài 5</b> <b>(4,0đ)</b></p>	 <p>- Vẽ hình đúng</p> <p>- Gọi E là trung điểm của AM, chứng minh được:</p> <p style="padding-left: 40px;"><math>IK \parallel BC, EI \parallel AB, EK \parallel AC</math></p> <p>- Áp dụng định lý Ta-lét vào các tam giác DPA, DAQ. Suy ra:</p> $\frac{DI}{DP} = \frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DQ}$ <p>- Áp dụng định lý Ta-lét đảo vào tam giác DPQ, suy ra:</p> <p style="padding-left: 40px;"><math>PQ \parallel IK</math></p>	<p>0,5</p> <p>1,5</p> <p>1,5</p> <p>0,5</p>
<p><b>Bài 6</b> <b>(4,0đ)</b></p>	<p>Vẽ hình đúng</p>  <p>Xét hai tam giác ABC và OBC ta có :</p> $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_a \quad (1)$ $S_{OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot x \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta suy ra :</p> $\frac{x}{h_a} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$ $\frac{y}{h_b} = \frac{S_{COA}}{S_{ABC}}$ $\frac{z}{h_c} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}$ <p>Tương tự ta có :</p> $M = \frac{S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ <p>Từ đó tính được :</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p>