

CHỦ ĐỀ 3

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Cho hàm số $y = f(x, m)$ với m là tham số, có tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \min y' \geq 0$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \max y' \leq 0$
- Hàm số đồng biến trên I thì nó phải xác định trên I .

DẠNG 1

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A. 27. B. 35. C. 44. D. 54.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m \in \left[a; \frac{b}{c} \right]$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số

$y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2}{c}$

- A. $P = \frac{9}{4}$. B. $P = \frac{13}{2}$. C. $P = 4$. D. $P = \frac{13}{4}$.

Câu 4. Biết giá trị tham số $m \in \left[\frac{a}{b}; c \right]$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì hàm số

$y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 2024$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a.b.c}$

A. $P = -\frac{14}{5}$.

B. $P = \frac{14}{5}$.

C. $P = -\frac{7}{3}$.

D. $P = \frac{7}{3}$.

Câu 5. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $(-\infty; 1]$

B. $(-\infty; 4]$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(-\infty; 4)$

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{-3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - (2m+15)x - m + 3$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 9. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 3.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D = [2; +\infty)$ là

A. $m \leq -1$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < -1$.

D. $-2 \leq m \leq 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. Vô số

B. 3

C. 5

D. 4

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 13. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 6. B. 5. C. 8. D. 4.

Câu 15. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15; -3)$. Số phần tử của tập S là

A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 17. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $m \geq \frac{1}{2}$. B. $m < -\frac{14}{5}$. C. $m \leq -\frac{14}{5}$. D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 4$. B. $m < 2$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq 2$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Cho hàm số sau $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 22. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x - m + 2}{x + 1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$?

Câu 26. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 18}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 5)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{(4 - m)\sqrt{6 - x} + 3}{\sqrt{6 - x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8; 5)$?

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{m \sin x + 4}{\sin x + m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

DẠNG 2

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ (*)

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$

(*) **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

+ Hàm số

(*) **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

+ Hàm số

$$y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$$

2. Biện luận số cực trị của hàm trùng phương:

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + 2b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 2b = 0 = g(x) \end{cases} \quad (1)$

• Hàm số (*) **có 3 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a > 0$.

Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

• Hàm số có **1 cực trị** khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Khi đó: Hàm số chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

Hàm số chỉ có cực đại khi $a < 0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Chú ý: Hàm bậc 4 trùng phương:

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục Oy.

3. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (*)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$

Ta có: $y' = \frac{adx^2 + 2acx + bc - cd}{(dx + e)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow adx^2 + 2acx + bc - cd = 0 = g(x) \quad (1)$

$$(*) \text{ có 2 cực trị} \Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -\frac{e}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\frac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$$

+ Hàm số

$$(*) \text{ không có cực trị} \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$$

+ Hàm số

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị thì $y_0 = \frac{Q'(x_0)}{P'(x_0)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$$

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

II. Tìm tham số m để hàm số có cực trị tại x_0

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì:
$$\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$ thì:
$$\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) < 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì:
$$\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ có cực trị tại $x = 1$.

A. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$

C. $m = 1$

D. $m = -2$

Câu 33. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m > 0$.

B. $m \neq 0$.

C. $m = 0$.

D. $m < 0$.

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $m = 3$

C. $m = 1$

D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

C. $m = 1$

D. $m = -3$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m - 1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$.

B. Với mọi m , hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Câu 37. Với giá trị tham số $m \in (a; b) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P = a + b + c$ là:

A. $P = -4$.

B. $P = 4$.

C. $P = -3$.

D. $P = -5$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị?

A. 2038.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2021.

Câu 39. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. -9 .

C. $-\frac{25}{9}$.

D. 1.

Câu 40. Với giá trị tham số $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + m$ chỉ có đúng một cực trị. Giá trị biểu thức là $P = 2a^{2019} + 3b^{2020}$:

A. $P = 2^{2019} + 3$.

B. $P = 2 + 3 \cdot 2^{2020}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 0$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-1000; 2010]$ để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị.

A. 1000.

B. 3010.

C. 2010.

D. 999.

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

A. $m^3 \geq 3$.

B. $m \notin 3$.

C. $m^1 \geq 3$.

D. $m < 3$.

Câu 43. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

A. $1 \notin m \notin 2$.

B. $1 \notin m < 2$.

C. $1 < m \notin 2$.

D. $1 < m < 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 44. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + 3x - 2$ không có cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị.

$$y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m+1}{x+1}$$

Câu 47. Cho hàm số:

a) Tìm tham số m để hàm số sau đây có 2 cực trị.

b) Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1-x}$. Tìm tham số m để hàm số có 2 cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

DẠNG 3

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN

(liên quan hệ thức Vi-et)

HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = \frac{y' \cdot y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x) \cdot y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = Ax + B$

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

- A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- B. $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$.
- C. $m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$.
- D. $m = 2$.

Câu 51. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

- A. $m = \pm\sqrt{2}$.
- B. $m = \pm 2$.
- C. $m = 0$.
- D. $m = \pm 1$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CB} < x_{CT}$.

- A. $m < 2$.
- B. $-2 < m < 0$.
- C. $-2 < m < 2$.
- D. $0 < m < 2$.

Câu 53. Với các giá trị thực của tham số $m \in \left(\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị

biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

- A. $P = -\frac{1}{2}$.
- B. $P = \frac{3}{5}$.
- C. $P = \frac{3}{2}$.
- D. $P = \frac{1}{4}$.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2019; 2019)$ thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1?

- A. 2018 .
- B. 2020 .
- C. 2019 .
- D. 4038 .

Câu 55. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ (với $a \in \mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy . Biết t thỏa mãn phương trình sau: $4t^2 + 3at + a^2 + 3a - 9 = 0$. Tính giá trị của t .

A. $t=3$ B. $t=\pm\frac{3}{2}$ C. $t=\frac{3}{2}$ D. $t=\pm 3$

Câu 56. Với các giá trị thực của tham số $m=\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+12mx-3m+4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

A. $P=\frac{25}{4}$ B. $P=\frac{15}{4}$ C. $P=\frac{7}{2}$ D. $P=-\frac{5}{4}$

Câu 57. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu.

A. $-2 < m < 2$ B. $\frac{-15}{4} < m < 2$ C. $\frac{-21}{4} < m < 2$ D. $\frac{-17}{4} < m < 2$

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y=-4x$ (d).

A. $m \in \{1\}$ B. $m \in \{0;1\}$ C. $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ D. $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Câu 59. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=b$ (với $a,b \in \mathbb{Z}$) thì thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam

giác vuông tại O. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b}{a^2+b^2}$.

A. $P=\frac{1}{2}$ B. $P=1$ C. $P=2$ D. $P=0$

Câu 60. Với các giá trị thực của tham số $m=-\frac{a}{b}$ hoặc $m=\frac{c}{d}$ (với $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị

hàm số cách đều gốc tọa độ O. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c+d}{a^2+b^2}$.

A. $P=\frac{6}{5}$ B. $P=\frac{5}{6}$ C. $P=\frac{4}{7}$ D. $P=\frac{7}{4}$

Câu 61. Với các giá trị thực của tham số $m = -\frac{a\sqrt{2}}{b}$ hoặc $m = \frac{c\sqrt{2}}{d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y = x$. Giá trị biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ là:

- A. $P = 8$ B. $P = 28$ C. $P = 10$ D. $P = 18$

Câu 62. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = -\frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B và thỏa mãn $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (tr

ong đó O là gốc tọa độ). Giá trị biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a.b.c}$ là:

- A. $P = \frac{187}{28}$ B. $P = \frac{28}{187}$ C. $P = \frac{187}{29}$ D. $P = \frac{29}{187}$

Câu 63. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = -\frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đường thẳng $\Delta: x + my + 3 = 0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$

(C) một góc α , biết $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a-b-c}$ là:

- A. $P = -\frac{15}{11}$ B. $P = \frac{15}{11}$ C. $P = \frac{11}{15}$ D. $P = -\frac{11}{15}$

Câu 64. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa độ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ B. $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ C. $\sqrt{20} - \sqrt{10}$ D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Câu 65. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

- A. Không tồn tại m . B. $m = 0$. C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ D. $m = -1$.

Câu 66. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = b$ (với $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Giá trị biểu thức $P = \frac{3a^2 - b^2}{ab}$ là:

- A. $P = 0$ B. $P = -1$ C. $P = 2$ D. $P = -2$

Câu 67. Với các giá trị thực của tham số $m = a + \frac{b\sqrt[3]{3}}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều. Giá trị biểu thức $P = 2^a + 3^b + 4^c$ là:

- A. $P = 11$ B. $P = 9$ C. $P = 21$ D. $P = 15$

Câu 68. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trục tâm thì giá trị của tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m \in (-10; -5)$ B. $m \in (-5; 0)$ C. $m \in (0; 5)$ D. $m \in (5; 10)$

Câu 69. Với các giá trị thực của tham số $m = -a$ hoặc $m = b$ (với $a, b \in \mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp. Giá trị biểu thức $P = a^2 + 5ab + b^2$ là:

- A. $P = 7$ B. $P = 2$ C. $P = 5$ D. $P = 3$

Câu 70. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

- A. Không tồn tại m . B. $m = \sqrt[5]{2}$. C. $m = -\sqrt[5]{2}$. D. $m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Câu 71. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (3m-1)x^2 + 2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. Không tồn tại m .

Câu 72. Với các giá trị thực của tham số $m = \frac{a}{b}$ hoặc $m = \frac{c - \sqrt{2}}{d}$ hoặc $m = \frac{e + \sqrt{2}}{f}$ (với $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 4m + 1$ có ba điểm cực trị,

đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2 + e^2 + f^2}$ là:

A. $P = \frac{1}{4}$

B. $P = \frac{3}{4}$

C. $P = \frac{1}{2}$

D. $P = \frac{4}{5}$

HÀM SỐ HỮU TỈ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

$$y_0 = \frac{Q'(x_0)}{P'(x_0)}$$

+ Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị thì

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$$

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Câu 73. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

A. $m = 4$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Câu 74. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$. Gọi $A; B$ là hai điểm cực trị, định m để diện tích $DOAB$ bằng 2. Với m vừa tìm được, tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .

A. $m = 2$
 $m = -1$

B. $m = -3$
 $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Câu 75. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $D: x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = \frac{1}{2}$

Câu 76. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m+1}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$

C. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$

D. $m \in (-1; +\infty)$

Câu 77. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $D: y = 2x$.

A. $m < -2$

B. $m \geq 2\sqrt{6}$

C. $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$

D. $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $m = \frac{7}{5}$

C. $m = -\frac{3}{2}$

D. $m = \frac{3}{2}$

- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y = f(|x|)$ có $2n + 1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y = |f(x)|$ có $n + m$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Khi đó hàm số $y = |f(x)|$ có:
 - + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) \geq 0$
 - + 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) < 0$

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. C. 12. D. 11.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. C. 11. D. 10.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có ba điểm cực trị.

- A. $m = 3$ hoặc $m = -1$. B. $m \geq 1$ hoặc $m \leq -3$.
C. $1 \leq m \leq 3$. D. $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$.

Câu 82. Tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị bằng

- A. -2016. B. -496. C. 1952. D. 2016.

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 7. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 84. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ B. $\left[0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ C. $(-\infty; 0]$ D. $(1; +\infty)$

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1}m^2 + 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Số cực trị của

đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ là

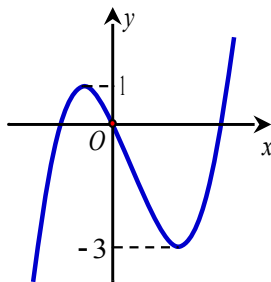
A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là

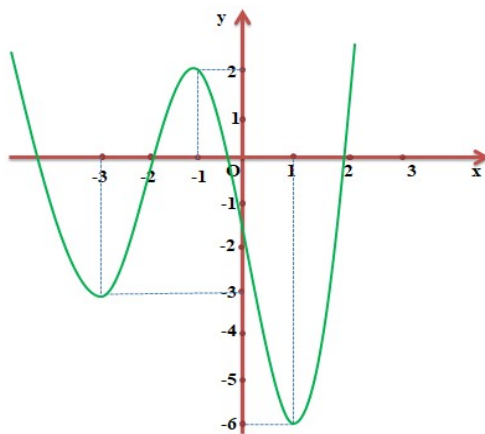
A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leq m \leq 3$.

Câu 87. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x - 1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



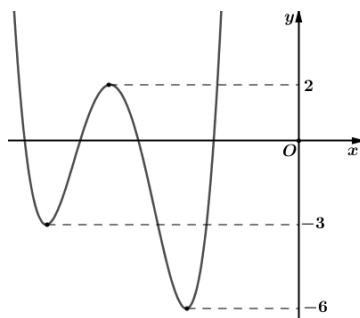
A. 9.

B. 12.

C. 18.

D. 15.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m|$ có 7 điểm cực trị khi

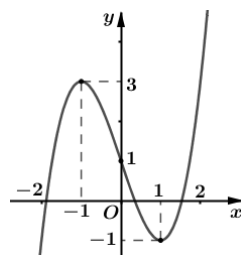
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

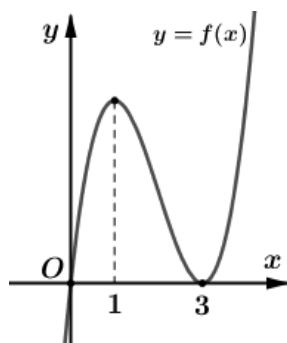
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > \frac{1}{4}$.

B. $m^3 \frac{1}{4}$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.