Nguyễn Công Lợi

PHÂN TÍCH VÀ BÌNH LUẬN
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9

Nghệ An, ngày 08 tháng 7 năm 2020

Đề số 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}+4}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(1 - \dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+6\right)\left(x-3\right) = 45x^2$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x\left(x^2+x+1\right) = 4^y - 1$.

Câu 3 (1.0 điểm).

Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $3x+2y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$H = x^2 - y^2 + \left|xy\right| + \left|x+y\right| - 2$$

Câu 4 (3.0 điểm).

Cho hai điểm A và B phân biệt, lấy điểm C bất kì trên đoạn AB sao cho $0 < AC < \dfrac{3}{4}AB$. Vẽ tia Cx vuông góc với AB tại C. Trên tia Cx lấy hai điểm D và E phân biệt sao cho $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC cắt nhau tại điểm thứ hai là H (H không trùng với C)

a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = \widehat{EBC}$ và ba điểm A, E, H thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của C để HC vuông góc với AD.

c) Chứng minh rằng khi C thay đổi thì đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Chứng minh rằng:

$$x+2y+z \ge \left(2-x\right)\left(2-y\right)\left(2-z\right)$$

Câu 6 (1.0 điểm).

Trên mặt phẳng có năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm trong đường tròn.

Phân tích và hướng dẫ giải

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}+4}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(1 - \dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}\right)$

a) Điều kiện xác định của biểu thức A là $x \ge 0; x \ne 4$. Ta có

$$A=\frac{\sqrt{x}+4+\sqrt{x+2}}{x-4}:\frac{\sqrt{x}+2-\left(2\sqrt{x}+5\right)}{\sqrt{x}+2}=\frac{2\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-4}:\frac{-\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{2-\sqrt{x}}$$

b) Với $x\ge 0$ và $x\ne 4$ thì ta được $A=\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}$. Do x nguyên nên để A nhận giá trị nguyên thì 2 phải chia hết cho $2-\sqrt{x}$ hay $2-\sqrt{x}\in\left\{-2;-1;1;2\right\}$.

+ Với $2-\sqrt{x}=-2\Leftrightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16$, khi đó ta được $A=-1$.

+ Với $2-\sqrt{x}=-1\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$, khi đó ta được $A=-2$.

+ Với $2-\sqrt{x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$, khi đó ta được $A=2$.

+ Với $2-\sqrt{x}=2\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$, khi đó ta được $A=1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được x nhận các giá trị nguyên là $0;1;9;16$.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x+6\right)\left(x-3\right)=45x^2$.

• ***Phân tích.*** *Chú ý rằng* $\left(x+1\right)\left(x+6\right)=x^2+7x+6$ *và* $\left(x-2\right)\left(x-3\right)=x^2-5x+6$. *Do đó ta viết được phương trình thành* $\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2-5x+6\right)=45x^2$. *Chú ý rằng nếu* $x\ne 0$ *thì ta chia hai vế của phương trình cho x, khi đó ta được* $\left(x+\dfrac{6}{x}+7\right)\left(x+\dfrac{6}{x}-5\right)=45$. *Đến đây ta chỉ cần đặt* $t=x+\dfrac{6}{x}+1$ *thì ta đưa được phương trình về phương trình bậc hai ẩn t.*

• **Lời giải.** Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $x\ne 0$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2-5x+6\right)=45x^2\Leftrightarrow\left(x+\frac{6}{x}+7\right)\left(x+\frac{6}{x}-5\right)=45$$

Đặt $t=x+\dfrac{6}{x}+1$ thì phương trình trên trở thành $\left(t-6\right)\left(t+6\right)=45\Leftrightarrow t^2-81=0\Leftrightarrow t=\pm 9$

+ Với $t=9$ ta được $x+\dfrac{6}{x}+1=9\Leftrightarrow x^2-8x+6=0\Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{10}$.

+ Với $t=-9$ ta được $x+\dfrac{6}{x}+1=-9\Leftrightarrow x^2+10x+6=0\Leftrightarrow x=-5\pm\sqrt{19}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-5-\sqrt{19};-5+\sqrt{19};4-\sqrt{10};4+\sqrt{10}\right\}$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x\left(x^2+x+1\right)=4^y-1$.

• ***Phân tích.*** *Bài toán cho trong câu b là một dạng của bài toán phương trình nghiệm nguyên. Trước khi đưa ra các đánh giá phụ hợp ta biến đổi phương trình trước.*

Ta có phương trình được viết lại thành $x\left(x^2+x+1\right)+1=4^y\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=4^y$. *Từ phương trình ta nhận thấy do x, y là các số nguyên nên ta được* $x,y\ge 0$. *Để ý đến cơ số 4 của lũy thừa bên phải thì ta nhận thấy* *rằng nếu $y = 0$ thì 4^y là số lẻ, còn nếu $y > 0$ thì 4^y là số chẵn. Do đó ta đi xét các trường hợp của y để tìm nghiệm nguyên cho bài toán.*

• **Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với $x\left(x^2+x+1\right)+1=4^y \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=4^y$.

Do x, y là các số nguyên nên từ phương trình ta suy ra được $x \ge 0; y \ge 0$.

+ Xét $y = 0$, khi đó ta có phương trình $\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)=1 \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x^2+1=1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$. Ta có $\left(0;0\right)$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $y > 0$, khi đó 4^y là số chẵn nên $\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)$ phải là số chẵn, do đó x phải là số lẻ.

Đặt $x = 2k+1\left(k \in N^*\right)$.

Khi đó ta được $\left(2k+2\right)\left[\left(2k+1\right)^2+1\right]=4^y \Leftrightarrow \left(k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)=4^{y-1}$.

Dễ thấy $2k^2+2k+1$ luôn là số lẻ nên từ phương trình ta thu được $k = 0$. Từ đó ta tìm được $x = 1$ nên $y = 1$. Ta có $\left(1;1\right)$ là một nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $\left(0;0\right)$ và $\left(1;1\right)$.

• ***Nhận xét.*** *Có thể giải thích rõ hơn tại sao ta có thể suy ra được* $k = 0$.

Do $\left(k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)=4^{y-1}$ *nên ta được* $4^{y-1} \vdots \left(2k^2+2k+1\right)$.

+ *Nếu* $y = 1$ *thì ta suy ra được* $2k^2+2k+1=1$ *từ đó ta được* $k = 0$.

+ *Nếu* $y > 1$ *thì* 4^{y-1} *là lũy thừa của 4, mà* $4^{y-1} \vdots \left(2k^2+2k+1\right)$ *nên* $2k^2+2k+1=1$ *từ đó ta được* $k = 0$

.

Câu 3. Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $3x+2y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = x^2 - y^2 + \left|xy\right| + \left|x+y\right| - 2$$

• ***Phân tích.*** *Giả thiết bài toán cho x và y nguyên thỏa mãn* $3x+2y=1$*, đây là một dạng phương trình nghiệm nguyên vô định và ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình*

Ta có $3x+2y=1 \Leftrightarrow 2y=1-3x \Leftrightarrow y=-x+\frac{1-x}{2}$. *Do x, y là số nguyên nên* $\frac{1-x}{2} \in Z$.

Đặt $\frac{1-x}{2} = t \in Z$ *thì ta được* $x = 1-2t$ *nên* $y = 3t-1$.

Ngoài ra từ phương trình ta nhận thấy x và y trái dấu, do đó t viết lại được biểu thức H là

$$H = x^2 - y^2 - xy + \left|x+y\right| - 2$$

Để tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức H ta biến đổi biểu thức H từ biến x, y sang biến t.

Ta có $H = \left(1-2t\right)^2 - \left(3t-1\right)^2 - \left(1-2t\right)\left(3t-1\right) + \left|1-2t+2t-1\right| - 2 = t^2 - 3t + \left|t\right| - 1$.

Dễ thấy biểu thức H có bậc 2 nên chỉ cần xét các trường hợp $t \ge 0$ *và* $t < 0$ *là ta tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức H.*

• **Lời giải.** Do x, y là số nguyên thỏa mãn $3x+2y=1$ nên ta suy ra được x và y trái dấu.

Ta có $3x+2y=1 \Leftrightarrow 2y=1-3x \Leftrightarrow y=-x+\frac{1-x}{2}$. Do x, y là số nguyên nên $\frac{1-x}{2}\in Z$.

Đặt $\frac{1-x}{2}=t\in Z$ thì ta được $x=1-2t$ nên $y=3t-1$.

Từ đó suy ra $H=\left(1-2t\right)^2-\left(3t-1\right)^2-\left(1-2t\right)\left(3t-1\right)+\left|1-2t+2t-1\right|-2=t^2-3t+\left|t\right|-1$.

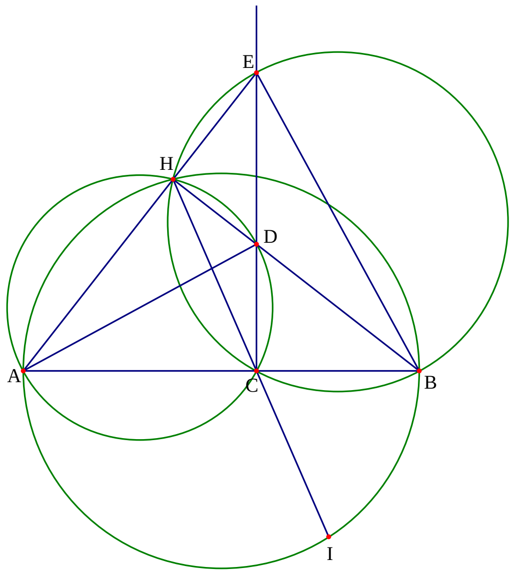
+ Xét $t\ge 0$, khi đó ta có $H=t^2-2t-1=\left(t-1\right)^2-2\ge -2$, dấu bằng xẩy ra khi $t=1$.

+ Xét $t<0$, khi đó ta có $H=t^2-4t-1>-1>-2$.

Vậy ta có $H_{min}=-2$ khi $t=1$ hay $x=-1; y=2$.

Câu 4. Cho hai điểm A và B phân biệt, lấy điểm C bất kì trên đoạn AB sao cho $0<AC<\frac{3}{4}AB$. Vẽ tia Cx vuông góc với AB tại C. Trên tia Cx lấy hai điểm D và E phân biệt sao cho $\frac{CE}{CB}=\frac{CA}{CD}=\sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC cắt nhau tại điểm thứ hai là H (H không trùng với C)

a) Chứng minh rằng $\widehat{ADC}=\widehat{EBC}$ và ba điểm A, E, H thẳng hàng.



• ***Phân tích.*** *Để chứng minh được* $\widehat{ADC}=\widehat{EBC}$ *ta đi chứng minh* $\Delta ADC \backsim \Delta EBC$, *để ý rằng từ giả thiết của bài toán ta có điều đó. Để chứng minh ba điểm A, E, H thẳng hàng ta cần chứng minh được* $\widehat{AHC}+\widehat{CHE}=180^0$. *Để ý ta đã có* $\widehat{ADC}=\widehat{EBC}$ *và* $\widehat{AHC}=\widehat{ADC}$. *Như vậy bài toán sẽ kết thúc khi ta chỉ ra được* $\widehat{EBC}+\widehat{CHE}=180^0$, *tuy nhiên điều này hiển nhiên vì tứ giác BCHE nội tiếp.*

• **Lời giải.**

+ Từ giải thiết ta có $CE>CD$ và $\frac{CE}{CB}=\frac{CA}{CD}=\sqrt{3}$. Lại có $\widehat{DCA}=\widehat{BCE}=90^0$.

Do đó ta có $\Delta ADC \backsim \Delta EBC$, từ đó suy ra $\widehat{ADC}=\widehat{EBC}$.

+ Do tứ giác AHDC nội tiếp nên $\widehat{AHC}=\widehat{ADC}$ và tứ giác BCHE nội tiếp nên $\widehat{EBC}+\widehat{CHE}=180^0$.

Kết hợp với $\widehat{ADC}=\widehat{EBC}$ thì ta được $\widehat{AHC}+\widehat{CHE}=180^0$ hay ba điểm A, E, H thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của C để HC vuông góc với AD.

• ***Phân tích.*** *Từ* $\tan\widehat{ADC}=\frac{AC}{CD}=\sqrt{3}$ *ta được* $\widehat{ADC}=60^0$. *Khi AD vuông góc với HC ta dự đoán C sẽ là trung điểm của AB. Muốn chứng minh được điều này ta cần chỉ ra được tam giác ABE đều hay ta cần chỉ ra* $\widehat{AEB}=\widehat{HCA}=60^0$.

- **Lời giải.** Từ giải thiết $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$ ta có $\tan\widehat{ADC} = \frac{AC}{CD} = \sqrt{3}$, do đó ta suy ra được $\widehat{ADC} = 60^0$, từ đây ta thấy $\widehat{EBC} = 60^0$. Như vậy khi $AD \perp HC$ thì $\widehat{ACH} = \widehat{ADC} = 60^0$.

Mà ta lại có tứ giác BCHE nội tiếp nên suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{HCA} = 60^0$.

Điều này dẫn đến tam giác ABE đều, suy ra C là trung điểm của AB.

c) Chứng minh rằng khi C thay đổi thì đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Phân tích.*** *Từ giả thiết của bài toán ta có $\widehat{AHB} = 90^0$, điều này có nghĩa là H luôn thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Mặt khác ta luôn có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 60^0$. Như vậy khi C thay đổi thì H luôn nhìn một cung tròn không đổi trên đường tròn đường kính AB. Do A cố định nên cung tròn đó cố định hay HC đi qua điểm cố định.*

- **Lời giải.** Từ giả thiết của bài toán ta có $\widehat{AHB} = 90^0$, do đó H luôn thuộc đường tròn đường kính AB cố định. Gọi I là giao điểm của HC với đường tròn đường kính AB. Mà ta có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 60^0$. Suy ra khi C thay đổi thì H luôn nhìn một cung tròn AI không đổi. Do A cố định nên I cố định, do đó HC đi qua điểm I cố định.

○ ***Nhận xét.*** *Bài toán hình không quá khó, tuy nhiên cần khai thác được giả thiết theo nhiều hướng khác nhau để có thể tìm ra lời giải. Chẳng hạn trong ý thứ nhất ta sử dụng giải thiết $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$ để chứng minh hai tam giác đồng dạng, còn trong hai ý còn lại thì ta sử dụng giải thiết $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$ để suy ra các góc bằng 60^0.*

Câu 5. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Chứng minh rằng:

$$x + 2y + z \ge (2 - x)(2 - y)(2 - z)$$

- ***Phân tích.*** *Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể viết lại được thành*

$$x + y + y + z \ge (y + z)(z + x)(x + y)$$

Để đơn giản hóa ta có thể đổi biến $a = x + y; b = y + z; c = z + x$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành $a + b \ge abc$. Chú ý rằng giả thiết mới là $a + b + c = 4$. Để ý đến vai trò của a và b trong bất đẳng thức cần chứng minh, ta dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1; c = 2$.

Như vậy ta thấy $a + b = c = 2$, từ đó để ý đến đánh giá $a + b + c \ge 2\sqrt{(a + b)c}$

Hay ta có $2 \ge \sqrt{(a + b)c} \Leftrightarrow 4 \ge (a + b)c$.

Để làm xuất hiện $a + b$ bên vế phải ta nhân cả hai vế với $a + b$, khi đó ta được bất đẳng thức $4(a + b) \ge (a + b)^2 c$. Chú ý đến đánh giá $(a + b)^2 \ge 4ab$ ta có điều phải chứng minh.

- **Lời giải.** Bất đẳng thức ta thấy có thể viết lại được thành $x + y + y + z \ge (y + z)(z + x)(x + y)$

Đặt $a = x + y; b = y + z; c = z + x$. Khi đó từ $x + y + z = 2$ ta được $a + b + c = 4$.

Bất đẳng thức được viết lại thành $a + b \ge abc$.

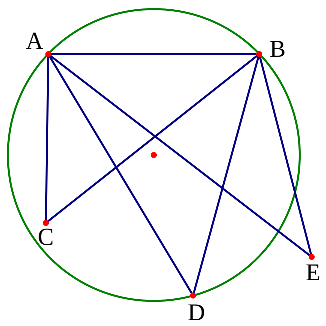
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $4 = a + b + c \ge 2\sqrt{(a + b)c}$

Hay ta được $2 \ge \sqrt{(a+b)c} \Leftrightarrow 4 \ge (a+b)c$ nên $4(a+b) \ge (a+b)^2 c$.

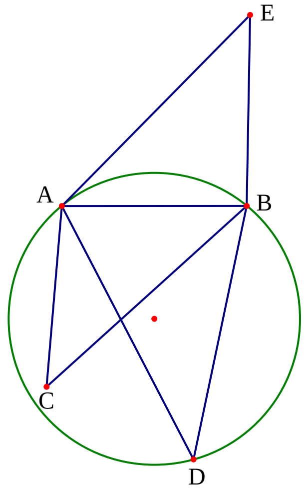
Mà ta lại có $(a+b)^2 \ge 4ab$ nên suy ra $4(a+b) \ge 4abc$ hay $a+b \ge abc$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1; c = 2$ hay $x = z = 1; y = 0$.

Câu 6. Trên mặt phẳng có năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm trong đường tròn.



- ***Phân tích.*** *Giả sử ta vẽ được đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó để trong ba điểm C, D, E có điểm C nằm trong đường tròn và điểm E nằm ngoài đường tròn khi đó $\widehat{ACB} > \widehat{ADB} > \widehat{AEB}$, chú ý rằng nếu điểm E nằm khác phía với C, D so với AB thì so với E cũng có thể nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn. Do đó để đảm bảo điểm E luôn nằm ngoài thì ta cần các AB nhỏ nhất, lúc này thì các góc $\widehat{ACB}; \widehat{ADB}; \widehat{AEB}$ luôn là góc nhọn. Từ đó theo nguyên lý cực hạn ta có thể giả sử AB nhỏ nhất, khi đó bài toán được chứng minh.*



- **Lời giải.** Từ năm điểm A, B, C, D, E ta vẽ được 10 đoạn thẳng. Giả sử trong 10 đoạn thẳng đó thì AB có độ dài nhỏ nhất. Khi đó với ba điểm C, D, E còn lại có hai trường hợp xẩy ra.

+ Trường hợp 1. Cả ba điểm C, D, E cùng nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB. Vì không có bốn điểm nào cùng nằm trên một đường tròn nên các điểm C, D, E nhìn đoạn thẳng AB dưới các góc nhọn khác nhau. Không mất tình tổng quát ta giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB} > \widehat{AEB}$. Khi đó vẽ đường tròn đi qua ba điểm A, B, D thì ta có điểm C nằm trong đường tròn và điểm E nằm ngoài đường tròn.

+ Trường hợp 2. Ba điểm C, D, E nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng AB. Giả sử C, D nằm trên cùng nửa mặt phẳng có bờ AB. Vì không có bốn điểm cùng nằm trên một đường tròn nên C, D nhìn đoạn AB dưới các góc nhọn khác nhau. Không mất tình tổng quát ta giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$. Khi đó vẽ đường tròn đi qua ba điểm A, B, D thì ta có điểm C nằm trong đường tròn. Do điểm E nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB còn lại và $\widehat{AEB}$ là góc nhọn nên E nằm ngoài đường tròn.

Vậy luôn tồn tại đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

✍ ***Nhận xét chung.***

- *Đề thi có đầy đủ các dạng bài toán về đại số, số học, hình học và tổ hợp.*
- *Trong đề thi các bài toán đại số, hình học không quá khó, các bài toán số học và tổ hợp khó hơn.*
- *Hai bài toán số học và tổ hợp khá hay và nhiều khả khả năng là có ít học sinh hoàn thành được hết đề thi,*

Đề số 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH THANH HÓA

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (4.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} - \frac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a} - \frac{9}{\sqrt{a}}\right)$, với $a > 0; a \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = A + a$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(4x - y) \\ y^2 - 5x^2 = 4 \end{cases}$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $54x^3 + 1 = y^3$.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ có nghiệm nguyên dương (x, y là ẩn).

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.

b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tại $K(K \neq A)$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^5 + 3b^5}{ab} + \frac{2b^5 + 3c^3}{bc} + \frac{2c^5 + 3a^5}{ca} \geq 15(a^3 + b^3 + c^3 - 2)$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} - \frac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a} - \frac{9}{\sqrt{a}}\right)$, với $a > 0; a \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A.

$$A=\sqrt{a}.\left[\frac{\left(\sqrt{a}-3\right)^2-\left(\sqrt{a}+3\right)^2}{\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)}\right].\frac{a-9}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\left[\left(a-6\sqrt{a}+9\right)-\left(a+6\sqrt{a}+9\right)\right]}{a-9}.\frac{a-9}{\sqrt{a}}=-12\sqrt{a}$$

b) Với $a>0; a\neq 9$ thì $A=-12\sqrt{a}$, khi đó ta được $M=A+a=a-12\sqrt{a}$.

Ta có $M=a-12\sqrt{a}=a-12\sqrt{a}+36-36=\left(\sqrt{a}-6\right)-36\geq -36$, dấu bằng xẩy ra khi $a=36$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là -36 khi $a=36$.

- **Nhận xét.** *Câu thứ nhất của đề thi thuộc dạng rút gọn biểu thức chứa căn và các bài toán liên quan. Biểu thức M có dạng* $x+a\sqrt{x}+b$ *nên ta viết M về dạng* $\left[A\left(x\right)\right]^2+k\geq k$ *với* $A\left(x\right)$ *là biểu thức chứa x và k là hằng số.*

Câu 2.

a) Giải phương trình $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1$.

- **Phân tích.** *Phương trình đã cho chỉ chứa một dấu căn thức dưới mẫu, do đó để đơn giản hóa phương trình ta có thể đặt ẩn phụ* $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}$, *khi đó ta cần biểu diễn* $\dfrac{9}{x^2}$ *theo t. Chú ý rằng* $x\neq 0$, *khi đó từ* $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}$ *ta được* $t^2=\dfrac{x^2}{2x^2+9}\Rightarrow\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2x^2+9}{x^2}=2+\dfrac{9}{x^2}$. *Đến đây ta quy phương trình về ẩn t để giải.*

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\neq 0$.

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}\neq 0$, khi đó ta được $t^2=\dfrac{x^2}{2x^2+9}\Rightarrow\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2x^2+9}{x^2}=2+\dfrac{9}{x^2}\Rightarrow\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{1}{t^2}-2$.

Thay vào phương trình đã cho ta được $\dfrac{1}{t^2}-2+2t=1\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+1=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2\left(2t+1\right)=0$.

+ Với $t-1=0$ ta được $x=\sqrt{2x^2+9}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=2x^2+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2+9=0\end{cases}$, hệ vô nghiệm.

+ Với $2t+1=0$ ta được $-2x=\sqrt{2x^2+9}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\4x^2=2x^2+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

- **Nhận xét.** *Phương trình trên được đưa về phương trình ẩn t qua một phép đặt ẩn phụ. Sẽ là sai lầm nếu ta thực hiện biến đổi* $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1\Leftrightarrow\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2+\dfrac{9}{x^2}}}=1$

Lý do là ở đây ta chưa xác định được x nhận giá trị âm hay dương. Để khắc phục điều này ta có thể xét trường hợp x âm và x dương để đưa phương trình về dạng

$$\frac{9}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{2+\frac{9}{x^2}}}=1 \text{ hoặc } \frac{9}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{2+\frac{9}{x^2}}}=1$$

Tuy nhiên cách giải quyết này ta phải xét hai trường hợp.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=4(4x-y) \\ y^2-5x^2=4 \end{cases}$.

• ***Phân tích.*** *Quan sát hệ phương trình ta thấy trong phương trình thứ nhất thì vế trái có bậc ba và vế phải có bậc nhất, còn trong phương trình thứ hai thì vế trái có bậc hai và vế phải có bậc 0. Như vậy nếu ta nhân chéo hai phương trình thì ta thu được một phương trình đồng bậc ba. Đến đây ta tìm cách phân tích phương trình bậc ba thành tích hoặc sử dụng cách đặt* $x=ky$.

• **Lời giải.** Từ hệ phương trình đã cho ta được

$$4\left(x^3-y^3\right)=4(4x-y)\left(y^2-5x^2\right)\Leftrightarrow 21x^3-5x^2y-4xy^2=0\Leftrightarrow x(7x-4y)(3x+y)=0$$

+ Nếu $x=0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^2=4\Leftrightarrow y=\pm 2$.

+ Nếu $7x-4y=0\Leftrightarrow x=\frac{4y}{7}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $-\frac{31}{49}y^2=4$, vô nghiệm.

+ Nếu $3x+y=0\Leftrightarrow x=-\frac{y}{3}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^2=9\Leftrightarrow y=\pm 3$.

Khi $y=3$ thì $x=-1$ và $y=-3$ thì $x=1$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(x;y)=(0;2),(0;-2),(-1;3),(1;-3)$.

• ***Nhận xét.*** *Trong hệ phương trình trên ta sử dụng phương pháp nhân các phương trình khi phát hiện ra tích chất về bậc của các phương trình. Ngoài ra để ý ta thấy phương trình thứ hai là* $4=y^2-5x^2$ *và trong vế phải của phương trình thứ nhất có thừa số 4, khi đó ta sử dụng phép thế thì thu được phương trình* $\left(x^3-y^3\right)=(4x-y)\left(y^2-5x^2\right)$, *đến đây ta có kết quả tương tự như trên.*

Câu 3.

a) Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $54x^3+1=y^3$.

• ***Phân tích.*** *Để ý ta thấy* $54x^3=2(3x)^3$. *Do đó ta có thể đặt* $t=3x\ (t\in Z)$, *khi đó ta có phương trình* $2t^3+1=y^3$. *Từ đây suy ra y phải là số nguyên lẻ nên ta đặt* $y=2k+1\ (k\in Z)$. *Khi đó ta lại có phương trình* $2t^3+1=(2k+1)^3\Leftrightarrow t^3=k\left(4k^2+6k+3\right)$. *Đến đây ta cũng chưa thể khẳng định được* t *chia hết cho k, do đó hướng đi này không hiệu quả. Để ý từ* $2t^3+1=y^3$ *ta viết được phương trình lại thành* $8t^3\left(2t^3+1\right)=8t^3y^3\Leftrightarrow\left(4t^3+1\right)^2=(2ty)^3+1$. *Chú ý rằng trước khi nhân với* $8t^3$ *ta cần xét các trường hợp* $t=0$ *và* $t\neq 0$. *Lúc này để đơn giản hóa ta đặt* $a=4t^3;b=2ty$. *Khi đó phương trình có dạng* $(a+1)^2=(b+1)\left(b^2-b+1\right)$. *Nhận thấy* $\left(b+1,b^2-b+1\right)=1$ *nên phương trình ta thu được* $b+1$ *và* b^2-b+1 *là các số chính phương. Do đó lại đặt* $b+1=m^2$ *và* $b^2-b+1=n^2$ *thì ta được, đến đây ta tìm mối liên hệ của m và n để giải bài toán.*

- **Lời giải.** Do $54x^3 = 2(3x)^3$. Do đó ta có thể đặt $t = 3x\,(t \in Z)$.

Khi đó ta có phương trình $2t^3 + 1 = y^3$. Ta xét các trường hợp sau

+ Xét $t = 0$ suy ra $x = 0$ khi đó ta được $y = 1$.

+ Xét $y = 0$ thì không tồn tại x nguyên tỏa mãn bài toán.

+ Xét $t \neq 0; y \neq 0$, khi đó từ phương trình $2t^3 + 1 = y^3$ ta được

$$8t^3(2t^3+1) = 8t^3y^3 \Leftrightarrow (4t^3+1)^2 = (2ty)^3 + 1$$

Đặt $a = 4t^3; b = 2ty\,(a \neq 0; b \neq 0)$. Khi đó phương trình có dạng $(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1)$.

Từ phương trình trên và $b^2 - b + 1 > 0$ ta được $b + 1 > 0$. Gọi $(b+1, b^2-b+1) = d$.

Ta có $\begin{cases} b+1 \,\vdots\, d \\ b^2 - b + 1 \,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow b(b+1) - 2(b+1) + 3 \,\vdots\, d \Rightarrow 3 \,\vdots\, d$, do đó ta được $d \in \{1;3\}$.

Mà ta thấy $t \,\vdots\, 3$ nên $a \,\vdots\, 3$ do đó $a+1$ không chia hết cho 3, suy ra $d \neq 3$ nên $d = 1$.

Hay ta được $(b+1, b^2-b+1) = 1$.

Như vậy theo $(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1)$ thì $b+1$ và b^2-b+1 là các số chính phương.

Đặt $b + 1 = m^2$ và $b^2 - b + 1 = n^2$ với m, n là các số nguyên dương. Khi đó $m \geq 2$ nên $m^2 \geq 4$.

Ta có $b = m^2 - 1$ nên $n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-1) = (m^2-1)^2 - 2(m^2-2) < (m^2-1)^2$

Lại có $n^2 = (m^2-1)^2 - (m^2-1) = (m^2-2)^2 + (m^2-1) > (m^2-2)^2$.

Do đó ta được $(m^2-2)^2 < n^2 < (m^2-1)^2$, điều này vô lý.

Do đó phương trình $(a+1)^2 = (b+1)(b^2-b+1)$ không có nghiệm nguyên.

Vậy cặp số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho là $(x;y) = (0;1)$

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ *có nghiệm nguyên dương (x, y là ẩn).*

- **Phân tích và lời giải.** Trong tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình, giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm thỏa mãn $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0 \leq y_0$. Xét phương trình bậc hai có ẩn y là $y^2 - mx_0y + x_0^2 + 1 = 0$.

Ta có y_0 là một nghiệm của phương trình trên. Gọi nghiệm còn lại là y_1.

Khi đó theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 \\ y_0.y_1 = x_0^2 + 1 \end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy y_1 có giá trị nguyên và từ cách chọn $(x_0;y_0)$ ta suy ra được $y_0 \leq y_1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x_0 = y_0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $m = 2 + \frac{1}{x_0^2}$. Nên để m và x_0 có giá trị nguyên thì $x_0 = 1$ và $m = 3$.

Với $m = 3$ ta thấy $(x; y) = (1;1)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

- Trường hợp 2: Nếu $y_0 = y_1$ thì từ $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ hay ta được $(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 1$.

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases} y_0 - x_0 = 1 \\ y_0 + x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$. Trường hợp này loại vì $(x_0; y_0)$ nguyên dương.

- Trường hợp 3: Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ khi đó ta được $y_0 \geq x_0 + 1;\ y_1 \geq x_0 + 2$.

Kết hợp với $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ ta được $x_0^2 + 1 \geq x_0^2 + 3x_0 + 2 \Rightarrow 3x_0 + 1 \leq 0$, điều này vô lí vì $x_0 > 0$.

Như vậy để phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương thì $m = 3$ và khi đó phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (1;1)$.

- ***Nhận xét.*** *Ý thứ hai của câu 3 ta sử dụng định lý Vi – et để chứng minh $k = 3$ là giá trị cần tìm, tuy nhiên để loại đi các trường hợp khác 3 ta cần sử dụng đến nguyên lý cực hạn.*

Bài toán này được phát biểu dưới dạng các bài toán khác như:

○ *Chú ý rằng với $k = 3$ là số nguyên tố, khi đó ta phát biểu lại bài toán trên như sau:*

+ *Bài toán 1.* *Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + 1$ chia hết cho ab. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ là số nguyên tố.*

+ *Bài toán 2.* *Từ phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ ta thay $y = 2t$ và $x = kt - z$, khi đó ta được phương trình mới là $(mt - z)^2 - 2m(mt - z)t + (2t)^2 + 1 = 0$. Thu gọn ta được $z^2 - (m^2 - 4)t^2 = -1$. Đến đây ta phát biểu được bài toán như sau:*

Xác định các số nguyên dương k sao cho phương trình $z^2 - (m^2 - 4)t^2 = -1$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Câu 4. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.

- ***Phân tích.*** *Để chứng minh được tam giác AMN cân ta đi chứng minh $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.*

Dễ thấy $\widehat{AMN}; \widehat{ANM}$ lần lượt là các góc ngoài của tam giác BMH và CNH.

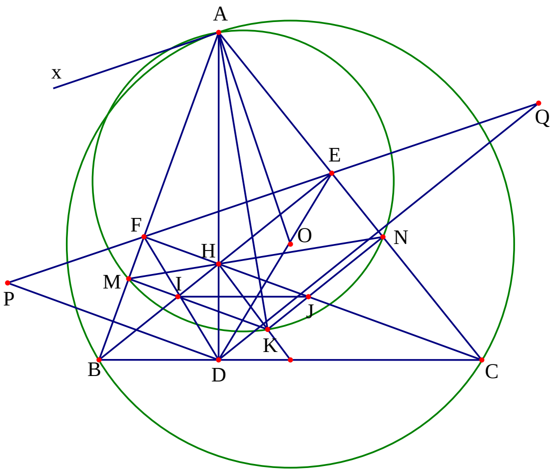
Lại thấy được $\widehat{FBH} = \widehat{CHE}$, như vậy ta cần có $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$. Tuy nhiên điều này ta dễ dàng có được do do HM và HN lần lượt là phân giác của góc $\widehat{BHF}$ và $\widehat{CHE}$.

- **Lời giải.** Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có

$$\widehat{AMN} = \widehat{ABH} + \widehat{MHB}$$
$$\widehat{ANM} = \widehat{ACH} + \widehat{NHC}$$

Do HM và HN lần lượt là phân giác của góc $\widehat{BHF}$ và $\widehat{CHE}$ và ta có $\widehat{BHF} = \widehat{CHE}$ nên suy ra được $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$. Lại có tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{FBH} = \widehat{CHE}$.

Từ đó ta được $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ nên tam giác AMN cân tại A.



b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Dự đoán rằng tam giác DEF có chu vi lớn nhất khi M nằm chính giữa cung lớn AB. Như vậy khi đó ta thấy AD có độ dài lớn nhất và tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Như vậy ta cần biểu diễn được chu vi của tam giác DEF theo diện tích tam giác ABC. Ta thấy có các ý tưởng sau.*

+ Ta sẽ dựng một đoạn thẳng có độ dài bằng chu vi tam giác DEF rồi chỉ ra đoạn thẳng đó dài nhất khi AD lớn nhất. Muốn vậy ta lấy P, Q lần lượt đối xứng với D qua AB và AC. Khi đó ta bốn điểm P, E, F, Q thẳng hàng. Khi đó ta có chu vi tam giác DEF là đoạn thẳng PQ. Lúc này ta thấy $AP = AD = AQ$ *nên tam giác APQ cân tại A, do đó* $\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$ *không đổi. Như vậy PQ lớn nhất khi AP lớn nhất hay AD lớn nhất. Điều này có được khi A nằm chính giữa cung lớn BC.*

+ Ta sẽ tìm cách biểu diễn diện tích tam giác ABC theo chu vi của tam giác DEF. Nhận thấy AO vuông góc với EF do đó $S_{FOEA} = \frac{1}{2}AO.EF$. *Hoàn toàn tương tự như vậy ta tính được*

$$S_{ABC} = S_{FOEA} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}R\left(DE + EF + FD\right)$$

Mà ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$ *nên* $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$.

Do BC, R không đổi nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$ *lớn nhất khi AD lớn nhất.*

• **Lời giải**

Cách 1. Lấy P, Q lần lượt đối xứng với D qua AB và AC.

Khi đó ta có $FP = FD$ và $ED = EQ$. Do đó ta có $p_{DEF} = DE + EF + FD = PQ$.

Từ các tứ giác BDHF, BCEF và CDHE nội tiếp ta có $\widehat{PFB} = \widehat{BFD} = \widehat{BHD} = \widehat{DCE} = \widehat{EFA}$

Từ đó suy ra ba điểm P, E, F thẳng hàng. Tương tự ta được bốn điểm P, E, F, Q thẳng hàng.

Lại có $AP = AD = AQ$ nên tam giác APQ cân tại A, do đó $\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$ không đổi. Như vậy PQ lớn nhất khi AP lớn nhất hay AD lớn nhất. Điều này có được khi A nằm chính giữa cung lớn BC.

Vậy chu vi tam giác DEF lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Cách 2. Trước hết ta chứng minh OA vuông góc với EF.

Thật vậy từ A ta vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O). Khi đó ta có $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$. Mặt khác tứ giác BCEF nội tiếp nên ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$. Do đó ta được $\widehat{AFE} = \widehat{xAB}$ nên Ax//EF mà ta lại có $OA \perp EF$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $OB \perp DF; CO \perp DE$. Từ đó suy ra

$$S_{ABC} = S_{FOEA} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}R.AO + \frac{1}{2}R.OB + \frac{1}{2}R.OC = \frac{1}{2}R\left(DE + EF + FD\right)$$

Mà ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$ nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$.

Do BC, R không đổi nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$ lớn nhất khi AD lớn nhất.

Vậy chu vi tam giác DEF lớn nhất khi A nằm chính giữa cung lớn BC.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tại $K\left(K \neq A\right)$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

• ***Phân tích.*** *Từ hình vẽ ta dự đoan được HK đi qua trung điểm của BC cố định. Mặt khác cũng từ giải thiết và hình vẽ ta nhận thấy tứ tứ giác HIKJ là hình bình hành. Do đó HK đi qua trung điểm của IJ. Muốn chứng minh được HK đi qua trung điểm của BC thì ta cần chỉ ra được IJ song song với BC.*

• **Lời giải.** Gọi I là giao điểm của BH với KM, J là giao điểm của CH với KM.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$ tại K nên AK là đường kính của đường tròn. Từ đó ta có $\widehat{KMA} = \widehat{KNA} = 90^0$. Từ đó dẫn đến KM//CH và KN//BH suy ra tứ giác HIKJ là hình bình hành, do đó HK đi qua trùn điểm của IJ.

Do IM//HF nên theo định lý Talets ta có $\frac{IH}{IB} = \frac{MF}{MB}$. Lại có HM là phân giác của tam giác BHF nên ta có $\frac{MF}{MB} = \frac{HF}{HB}$. Từ đó ta được $\frac{IH}{IB} = \frac{HF}{HB}$. Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{HJ}{CJ} = \frac{HE}{HC}$.

Mà tứ giác BCEF nội tiếp nên ta có $\frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC}$ do đó $\frac{IH}{IB} = \frac{HJ}{CJ}$. Từ đây suy ra IJ //BC.

Vậy HK đi qua trung điểm của BC cố định hay HK luôn đi qua một điểm cố định.

○ ***Nhận xét.*** *Có thể nói bài hình của đề thi là một bài hình khó. Độ khó của các ý trong bài hình tăng dần. Đứng trước bài toán như vậy ta cần phải đơn giản hóa bài toán bằng cách thay đổi yêu cầu chứng minh để đưa điều cần chứng minh về dạng quen thuộc hơn. Ngoài ra cũng phải tìm được mối liên hệ chặt chẽ giữa các giả thiết của bài toán. Trong bài toán ta cần nắm các điểm sau.*

+ Để chứng minh được tam giác AMN cân ta đi chứng minh $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

+ Để chỉ ra được vị trí của điểm A ta cần tìm được mối liên hệ của chu vi giác DEF với đường cao AD.

+ Dự đoán được điểm cố định mà đoạn thẳng HK sẽ đi qua và phát hiện ra hình bình hành HIKJ ta quy bài toán về chứng minh IJ song song với BC.

Câu 5. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^5 + 3b^5}{ab} + \frac{2b^5 + 3c^3}{bc} + \frac{2c^5 + 3a^5}{ca} \geq 15\left(a^3 + b^3 + c^3 - 2\right)$$

• ***Phân tích.*** *Chú ý đến giả thiết* $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$ *ta viết lại bất đẳng thức thành.*

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^3}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-10\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

Dự đoán được dấu bằng xẩy ra tại $a=b=c=1$. *Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh trên ta quy về chứng minh* $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge ma^3+nb^3-10ab^2$ *với m, n là các hằng số. Ta cần tìm được m, n để bất đẳng thức trên xẩy ra. Để ý rằng bất đẳng thức có dấu bằng xẩy ra tại* $a=b=1$ *và* $m+n=15$.

Khi đó ta viết lại bất đẳng thức trên thành $2\left(\frac{a}{b}\right)^5+3\ge\frac{a}{b}\left[m\left(\frac{a}{b}\right)^3+n-\frac{10a}{b}\right]$. *Đặt* $t=\frac{a}{b}$ *thì ta viết lại bất đẳng thức trên thành* $2t^5+3\ge t\left(mt^3-10t+n\right)\Leftrightarrow 2t^5-mt^4+10t^2-\left(15-m\right)t+3\ge 0$.

Lại chú ý rằng dấu bằng xẩy ra khi $t=1$. *Do đó ta phân tích bất đẳng thức trên thành*

$$mt\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)\le\left(t-1\right)\left(2t^4+2t^3+2t^2+12t-3\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(m-\frac{2t^4+2t^3+2t^2+12t-3}{t\left(t^2+t+1\right)}\right)\le 0$$

Chọn $t=1$ *thì ta được* $m=5$, *dẫn đến* $n=10$.

Từ đó ta đi chứng minh bất đẳng thức $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3+10b^3-10ab^2$. *Bất đẳng thức trên tương đương với* $\left(a-b\right)^4\left(2a+3b\right)\ge 0$. *Áp dụng tương tự ta có lời giải cho bài toán.*

- **Lời giải.** Trước hết ta đi chứng minh bất đẳng thức $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3+10b^3-10ab^2$.

Thật vậy, với a và b là các số thực dương ta luôn có

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3+10b^3-10ab^2\Leftrightarrow 2a^5+3b^5-ab\left(5a^3+10b^3-10ab^2\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2a^5-5a^4b+10a^2b^3-10ab^4+3b^5\ge 0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^4\left(2a+3b\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do vậy ta có $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3+10b^3-10ab^2$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{2b^5+3c^5}{bc}\ge 5b^3+10c^3-10bc^2$ và $\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 5c^3+10a^3-10ca^2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^3}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-10\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

Mà ta có $ab^2+bc^2+ca^2=3$ nên ta được

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^3}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

- ***Nhận xét.*** *Phương pháp các định các hằng số m và n để* $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge ma^3+nb^3-10ab^2$ *luôn xẩy ra với a, b dương được gọi là phương pháp hệ số bất định trong chứng minh bất đẳng thức.*

Đề số 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH ĐĂK LĂK

Năm học 2015 – 2016

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 5y = -20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \end{cases}$

b) Tìm tất cả các số thực m để phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ và $x + y + z = 2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{\sqrt{y}}{y+1} + \frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B khác góc tọa độ O mà thỏa mãn $OA + OB = 6$.

Câu 3. (4.0 điểm)

a) Tìm các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\overline{ab} + 6 = (a+b)^3$.

b) Cho $a = \underbrace{111...1}_{2017\,cs\,1}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016\,cs\,0}5$. Chứng minh rằng số $M = ab + 1$ là số chính phương.

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2R$. Biết $BC = CD$ và hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại F. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AD = BE$. Vẽ EH vuông góc với AD tại H. Hai đường thẳng AC, EH cắt nhau tại K. Gọi I là trung điểm của AE.

a) Chứng minh rằng $AD.AF + BC.BF = 4R^2$.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, I, K thẳng hàng.

Câu 5. (2.0 điểm)

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và diện tích tam giác AOB bằng $9cm^2$, diện tích tam giác COD bằng $16cm^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Câu 6. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab + 7bc + ca = 188$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 5y = -20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Hệ phương trình đã cho có phương trình thứ nhất có bậc nhất đối với mỗi ẩn nên ta có thể rút ẩn x qua ẩn y và sử dụng phép thế.*

• **Lời giải.** Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được $x = 5y - 20$. Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned}&\left(5y-19\right)\left(10y-39\right)\left(15y-59\right)=\left(1+3y\right)\left[1+3y+2\left(5y-20\right)^2\right]\\ \Leftrightarrow\ & 750y^3-8725y^2+33830y-34719=150y^3-1141y^2+2006y+801\\ \Leftrightarrow\ & 600y^3-7584y^2-31824y-44520=0\Leftrightarrow\left(y-5\right)\left(75y^2-573y+1113\right)=0\end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình $75y^2 - 573y + 1113 = 0$ vô nghiệm

Do đó từ phương trình trên ta được $y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$ nên $x = 5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(5;5\right)$.

• ***Nhận xét.*** *Khi thực hiện phép thế $x = 5y - 20$ vào phương trình thứ hai thì ta được phương trình một ẩn, tuy nhiên phương trình khó phân tích. Do đó ta có thể tìm cách phân tích phương trình thứ hai thành tích.*

$$\begin{aligned}&\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right)=\left(1+3y\right)\left(1+3y+2x^2\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(2x^2+3x+1\right)\left(3x+1\right)=\left(1+3y\right)\left(1+3y+2x^2\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(3x+1\right)^2+2x^2\left(3x+1\right)=\left(1+3y\right)^2+2x^2\left(3y+1\right)\\ \Leftrightarrow\ & 3\left(x-y\right)\left[2+3\left(x+y\right)+2x^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ 2+3\left(x+y\right)+2x^2=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Đến đây ta kết hợp với phương trình thứ nhất để tìm nghiệm.

Trong hai cách trên thì cách thực hiện phép thế dễ thấy hơn nhưng cách phân tích phương trình thứ hai thành tích cho lời giải đơn giản hơn.

b) Tìm tất cả các số thực m để phương trình $x^2 - 2\left(2m+1\right)x + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

• ***Phân tích.*** *Đây là dạng bài toán về định lý Vi – et và các bài toán liên quan. Muốn tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì ta cần $\Delta' > 0$ và muốn hai nghiệm đó dương thì ta cần có $x_1.x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$. Như vậy để phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt thì ta cần có*

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ x_1.x_2 > 0\\ x_1 + x_2 > 0\end{cases}$$

Biểu diễn hệ trên theo m ta tìm được điều kiện cho m.

• **Lời giải.** Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ x_1.x_2 > 0\\ x_1 + x_2 > 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2m+1\right)^2-\left(3m+4\right)>0\\ 3m+4>0\\ 2\left(2m+1\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m+1\right)\left(4m-3\right)>0\\ 4m>-3\\ 2m>-1\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{3}{4}$$

• ***Nhận xét.*** *Với các bài toán liên quan đến phương trình bậc hai thì ta cần nắm vững điều kiện có nghiệm của phương trình và định lý Vi – et.*

Bài 2. (4.0 điểm).

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right)$$

• ***Phân tích.*** *Đây là dạng toán về biến đổi đồng nhất biểu đại số. Như vậy trước hết ta cần biến đổi giả thiết để có thêm giả thiết mới. Từ* $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ *và* $x+y+z=2$ *ta có* $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$.

Nhận thấy biểu thức P chứa các tổng $x+1, y+1, z+1$ *nên ta chú ý đến phép biến đổi*

$$x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự và thay vào biểu thức P để rút gọn.

• **Lời giải.** Từ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ và $x+y+z=2$ ta có

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$

Từ đó ta được $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Khi đó

$$\begin{cases} x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \\ y+1=y+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \\ z+1=z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{z}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right) \end{cases}$$

Thay vào biểu thức P ta được

$$\begin{aligned} P&=\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{\sqrt{y}}{y+1}+\frac{\sqrt{z}}{z+1}\right) \\ &=\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)} \\ &=2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2 \end{aligned}$$

• ***Nhận xét.*** *Với biểu thức dạng* $x+1$ *trong đó* $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$ *ta chú ý đến biến đổi*

$$x+1=x+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)$$

Với biểu thức dạng a^2+1 *trong đó* $ab+bc+ca=1$ *ta chú ý đến biến đổi*

$$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$$

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B khác góc tọa độ O mà thỏa mãn $OA+OB=6$.

• ***Phân tích.*** *Giả sử đường thẳng cần viết có dạng* $y=ax+b$. *Đầu tiên do đường thẳng đi qua điểm* $M(1;2)$ *nên ta có* $2=a+b$. *Do đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên ta có.*

Khi $x=0$ *thì* $y=b$, *do đó ta có* $B(0;b)$. *Khi* $y=0$ *thì* $x=-\frac{b}{a}$, *do đó ta có* $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$. *Mà ta có* $OA+OB=6$ *nên ta được* $|b|+\left|-\frac{b}{a}\right|=6$. *Chú ý rằng đường thẳng cắt tia Ox và Oy nên ta có* $b>0;-\frac{b}{a}>0$ *do đó* $b>0;a<0$. *Đến đây kết hợp hai điều kiện ta tìm được a và b.*

• **Lời giải.** Gọi đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$. Do đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $2=a+b$. Do đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên ta có

Khi $x=0$ thì $y=b$, do đó ta có $B(0;b)$. Khi $y=0$ thì $x=-\frac{b}{a}$, do đó ta có $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$.

Mà ta có $OA+OB=6$ nên ta được $|b|+\left|-\frac{b}{a}\right|=6$.

Chú ý rằng đường thẳng cắt tia Ox và Oy nên ta có $b>0;-\frac{b}{a}>0$ do đó $b>0;a<0$.

Từ đó ta có $\begin{cases}a+b=2\\ b-\frac{b}{a}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ (2-a)+\frac{a-2}{a}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\ a^2+3a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1;b=3\\ a=-2;b=4\end{array}\right.$

Vậy các đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y=-x+3$ hoặc $y=-2x+4$.

• ***Nhận xét.*** *Trong bài toán này ta chú ý đến giả thiết đường thẳng cắt tia Ox và Oy để suy ra các hoàng độ và tung độ các giao điểm nhận giá trị dương. Từ đó ta phá được giá trị tuyệt đối.*

Câu 3. a) Tìm các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\overline{ab}+6=(a+b)^3$.

• **Phân tích và lời giải.** Do số cần tìm $\overline{ab}$ nên ta dễ dàng suy ra được $10\le\overline{ab}\le 99$.

Từ đó ta có $16\le\overline{ab}+6\le 105$. Chú ý rằng $\overline{ab}+6=(a+b)^3$ nên ta được $16\le(a+b)^3\le 105$.

Ta tìm các lập phương đúng trong khoảng từ 16 đến 105 thì được $(a+b)^3=27$ và $(a+b)^3=64$.

Từ đó ta được $a+b=3$ và $a+b=4$. Đến đây ta được $\overline{ab}\in\{12;21;30;13;22;31\}$.

Thử lần lượt các trường hợp thì được $\overline{ab}=21$ vì $21+6=(2+1)^3$.

• ***Nhận xét.*** *Bài toán số học thứ nhất của câu 3 không quá khó. Trong bài toán này ta chỉ cần tìm được* $16\le(a+b)^3\le 105$ *để suy ra* $a+b=3$ *và* $a+b=4$ *là xem như giải được bài toán.*

b) Cho $a=\underbrace{111...1}_{2017\text{ cs }1}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\text{ cs }0}5$. Chứng minh rằng $M=ab+1$ là số chính phương.

• **Phân tích và lời giải.** Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\text{ sc }1}=\frac{10^n-1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a=\underbrace{111...1}_{2017\text{ sc }1}=\frac{10^{2017}-1}{9}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\text{ cs }0}5=1\underbrace{000...0}_{2017\text{ cs }0}+5=10^n+5$.

Khi đó ta được $M = ab + 1 = \frac{10^{2017} - 1}{9}.\left(10^n + 5\right) + 1 = \frac{\left(10^{2017}\right)^2 + 4.10^{2017} - 5}{9} + 1 = \left(\frac{10^{2017} + 2}{3}\right)^2$.

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in N$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017} + 2}{3} \in N$ hiển nhiên đúng do $10^{2017} + 2 \vdots 3$. Vậy $M = ab + 1$ là số chính phương.

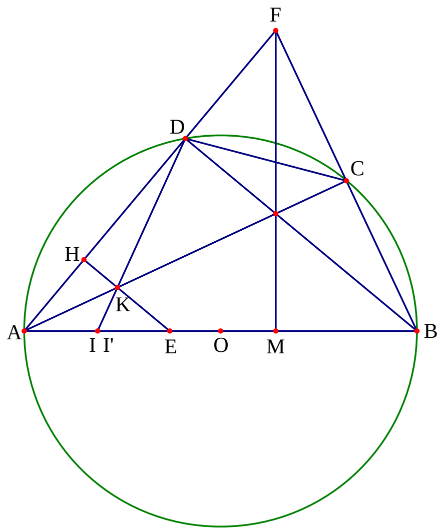
- ***Nhận xét.*** *Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi*

$$9 = 10^1 - 1; 99 = 10^2 - 1; 999 = 10^3 - 1; \ldots; \underbrace{999\ldots9}_{n\,cs\,9} = 10^n - 1$$

Câu 4. (4.0 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2R$. Biết $BC = CD$ và hai đường thẳng AD, BC cắt nhau tại F. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AD = BE$. Vẽ EH vuông góc với AD tại H. Hai đường thẳng AC, EH cắt nhau tại K. Gọi I là trung điểm của AE.

a) Chứng minh rằng $AD.AF + BC.BF = 4R^2$.



- ***Phân tích.*** *Quan sát hình vẽ và kết hợp với giả thiết ta nhận thấy để* $AD.AF + BC.BF = 4R^2$ *thì ta cần có* $AD.AF = AB.AM$ *và* $BC.BF = AB.BM$. *Muốn vậy ta đi chứng minh:*

$$\Delta ADB \backsim \Delta AMF \text{ và } \Delta ACB \backsim \Delta FMB.$$

- **Lời giải.** Kẻ FM vuông góc với AB. Khi đó ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMF} = 90^0$. Xét hai tam giác ADB và AMF có $\widehat{ADB} = \widehat{AMF} = 90^0$ và $\widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ADB \backsim \Delta AMF$ nên ta được $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AF}$

suy ra $AD.AF = AB.AM$.

Xét hai tam giác ACB và FMB có $\widehat{ACB} = \widehat{FMB} = 90^0$ và $\widehat{ABC}$ chung

Do đó $\Delta ACB \backsim \Delta FMB$ nên ta được $\frac{BC}{AB} = \frac{BM}{BF}$ suy ra $BC.BF = AB.BM$.

Từ đó ta được $AD.AF + BC.BF = AB\left(AM + BM\right) = AB^2 = 4R^2$.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, I, K thẳng hàng.

- ***Phân tích.*** *Gọi I′ là giao điểm của DK với AB. Ta cần chứng minh I và I′ trùng nhau. Muốn vậy ta đi chứng minh I′ là trung điểm của AE. Để ý là giả thiết cho* $AD = BE$ *nên ta cần chỉ ra* $\frac{AI'}{AD} = \frac{EI'}{BE}$.

- **Lời giải.** Do $BC = CD$ nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$, do đó AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$. Trong tam giác ADI' có AK là tia phân giác nên $\frac{AI'}{AD} = \frac{KI'}{KD}$. Mặt khác do HE//BD nên ta được $\frac{KI'}{KD} = \frac{EI'}{EB}$.

Từ đó ta được $\frac{AI'}{AD} = \frac{EI'}{BE}$, mà theo giả thiết ta có $AD = BE$ nên $AI' = EI'$ hay I′ là trung điểm của AE. Do đó hai điểm I và I′ trùng nhau. Suy ra ba điểm D, I, K thẳng hàng.

• ***Nhận xét chung.*** *Bài toán hình của đề thi không quá khó. Trong bài toán chủ yếu sử dụng tam giác vuông đồng dạng. Trong ý b ta cần chú ý đến các giả thiết* $BC = CD$ *và* $AD = BE$.

Câu 5. (2.0 điểm). Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O và diện tích tam giác AOB bằng $9cm^2$, diện tích tam giác COD bằng $16cm^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

• ***Phân tích.*** *Giả thiết bài toán cho diện tích tam giác AOB bằng* $9cm^2$ *và diện tích tam giác COD bằng* $16cm^2$, *do đó ta cần biểu diễn diện tích tứ giác ABCD qua diện tích hai tam giác AOB và COD.*

Từ hình vẽ ta thấy $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{OB}{OD}$. *Như vậy* $S_{OAD}.S_{OBC} = S_{AOB}.S_{COD} = 9.16 = 144$.

Ta thấy $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} \ge S_{AOB} + S_{COD} + 2\sqrt{S_{AOD}.S_{BOC}}$. *Đến đây ta thay số thì tìm được giá trị nhỏ nhất của* S_{ABCD}.

• **Lời giải.** Ta có $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{OB}{OD}$. Do đó $S_{OAD}.S_{OBC} = S_{AOB}.S_{COD} = 9.16 = 144$

Ta có $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} \ge S_{AOB} + S_{COD} + 2\sqrt{S_{AOD}.S_{BOC}} = 9 + 16 + \sqrt{144} = 49$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $S_{AOD} = S_{BOC}$ hay $OA.OD = OB.OC$.

Điều này có được khi $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ hay AB//CD. Vậy giá trị nhỏ nhất của S_{ABCD} là $49cm^2$ khi AB//CD.

Câu 6. (2.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $ab + 7bc + ca = 188$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2$.

• ***Phân tích.*** *Quan sát giả thiết và bất đẳng thức ta thấy vai trò của a, b, c khác nhau. Yêu cầu bài toán ta ta nghĩ đến chứng minh* $5a^2 + 11b^2 + 5c^2 \ge k\left(ab + 7bc + ca\right)$. *Như vậy ta đi áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp* $a^2; b^2$, $b^2; c^2$ *và* $a^2; c^2$. *Chú ý đến nhân các hệ số để dấu đẳng thức xảy ra. Giả sử ta có các bất đẳng thức*

$$m^2a^2 + n^2b^2 \ge 2mn.ab; \left(11 - n^2\right)b^2 + p^2c^2 \ge 2\sqrt{\left(11 - n^2\right)p^2}.bc$$
$$\left(5 - m^2\right)a^2 + \left(5 - p^2\right)c^2 \ge 2\sqrt{\left(5 - m^2\right)\left(5 - n^2\right)}.ca$$

Như vậy ta có $5a^2 + 11b^2 + 5c^2 \ge 2mn.ab + 2\sqrt{\left(11 - n^2\right)p^2}.bc + 2\sqrt{\left(5 - m^2\right)\left(5 - n^2\right)}.ca$

Ta cần xác định các hằng số $m^2; n^2; p^2$ *để* $\frac{mn}{1} = \frac{\sqrt{\left(11 - n^2\right)p^2}}{7} = \frac{\sqrt{\left(5 - m^2\right)\left(5 - n^2\right)}}{1}$.

Hay ta được $\frac{m^2n^2}{1} = \frac{\left(11 - n^2\right)p^2}{7} = \frac{\left(5 - m^2\right)\left(5 - n^2\right)}{1}$

Nhẩm các giá trị đặc biệt ta tìm được $m^2 = 2; n^2 = \frac{1}{2}; p^2 = \frac{14}{3}$. *Từ đó ta có lời giải cho bài toán.*

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$2a^2 + \frac{1}{2}b^2 \ge 2ab; \frac{21}{2}b^2 + \frac{14}{3}c^2 \ge 14bc; 3a^2 + \frac{1}{3}c^2 \ge 2.ca$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P = 5a^2 + 11b^2 + 5c^2 \ge 2ab + 17bc + 2ca = 2\left(ab + 7bc + ca\right) = 2.188 = 376$$

Dấu bằng xẩu ra khi $\begin{cases} 4a^2 = b^2 \\ 9b^2 = 4c^2 \\ 9a^2 = c^2 \\ ab + 7bc + ca = 188 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \pm b \\ 3b = \pm 2c \\ 3a = \pm c \\ ab + 7bc + ca = 188 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; b = 4; c = 6 \\ a = -2; b = -4; c = -6 \end{array}\right.$.

• ***Nhận xét.*** *Bài toán thứ sáu của để thì là một bài toán khó. Cách xác định các số m, n, p để bất đẳng thức xẩy ra được gọi là phương pháp đồng nhất hệ số.*

Đề số 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH VĨNH LONG

Năm học 2015 – 2016

Bài 1. (4.0 điểm)

a) Cho $x = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} - 2}$. Tính $P = \left(x^2 + x - 1\right)^{2016}$

b) Cho $x + y = -5$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^4 + y^4$.

Bài 2. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 4x = 2\sqrt{2x+3} - 5$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y = 24 \\ 3x + \left(2x + y - 1\right)\left(x - y + 1\right) = 11 \end{cases}$

Bài 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + \left(m-1\right)x - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \left(x_1^2 - 9\right)\left(x_2^2 - 4\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. (2.0 điểm)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \left(a + b + 1\right)\left(a^2 + b^2\right) + \frac{4}{a+b}$$

Bài 5. (3.0 điểm)

a) Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

b) Tìm các cặp số nguyên $\left(x; y\right)$ thỏa mãn phương trình $x\left(x+1\right) = y^2 + 1$.

Bài 6. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $\left(O; R\right)$ và H là một điểm di động trên đoạn OA(H khác A). Đường thẳng qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh rằng $\widehat{HKM} = 2\widehat{AMH}$.

b) Các tiếp tuyến của đường tròn $\left(O; R\right)$ tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của đường tròn $\left(O; R\right)$ lần lượt tại D và E. Gọi giao điểm của OD, OE với AB lần lượt là F và G.

Chứng minh rằng $OD.GF = OG.DE$.

Bài 7. (2.0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 5cm$ và một điểm P cố định trong đường tròn sao cho $OP = 3cm$. Hai dây cung AC và BD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau tại P. Khi diện tích của tứ giác ABCD đạt giá trị lớn nhất, hãy tính diện tích đó và số đo góc OPD.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1. (4.0 điểm)

a) Cho $x = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}-2}$. Tính $P = \left(x^2+x-1\right)^{2016}$

• **Phân tích và lời giải.** Để tính được giá trị của $P = \left(x^2+x-1\right)^{2016}$ ta cần tính được giá trị của x.

Ta có $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3}+1$. Mặt khác ta lại có

$$a = \left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} \Rightarrow a^3 = \left(\sqrt{5}+2\right)^3\left(17\sqrt{5}-38\right) = \left(17\sqrt{5}+38\right)\left(17\sqrt{5}-38\right) = 1$$

Từ đó ta suy ra được $a = 1$ hay $\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = 1$.

Như vậy ta được $x = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$. Từ đó suy ra $P = \left[\left(-1\right)^2+\left(-1\right)-1\right]^{2016} = 1$.

• ***Nhận xét.*** *Với các bài toán dạng như trên thì mặc dù biểu thức x cho rất phức tập nhưng khi tính ra ta thường thấy x nhận một số giá trị tương đối đặc biệt như $-1;0;1;\ldots$, điều này làm cho biểu thức trong dấu ngoặc của P nhận một trong $-1;0;1$, khi đó ta mới tính được P. Trong bài toán trên ta thấy thực sự phức tập khi đi tính $\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$, thông thường ta đi viết $17\sqrt{5}-38$ thành lũy thừa bậc ba để có thể đưa ra khỏi căn bậc ba, điều này khá là khó khăn. Để khắc phục điều đó ta đi lũy thừa bậc ba sau đó thực hiện thu gọn kết quả, khi có kết quả ta lấy căn bậc ba là được.*

b) Cho $x+y=-5$ và $x^2+y^2=11$. Tính x^4+y^4.

• **Lời giải.** Ta có $x+y=-5$ nên ta được $\left(x+y\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2+y^2+2xy = 25$.

Mà ta có $x^2+y^2=11$, do đó suy ra $2xy=14$ hay $xy=7$.

Ta có $x^4+y^4 = \left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(xy\right)^2 = 11^2 - 2.7^2 = 121-98 = 23$.

Bài 2. (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2+4x = 2\sqrt{2x+3}-5$.

• ***Phân tích.*** *Phương trình chứa một căn thức bậc hai nên ta có thể sử dụng pháp nâng lên lũy thừa, tuy sau khi nâng lên lũy thừa ta thu được phương trình bậc 4. Trong khi ta chỉ mới nhẩm được một nghiệm đẹp là $x=-1$ nên việc phân tích phương trình khá khó khăn.*

Chú ý đến $2\sqrt{2x+3}$ ta có phép biến đổi $\left(2x+3\right) \pm 2\sqrt{2x+3}+1 = \left(\sqrt{2x+3}\pm 1\right)^2$.

Để có phép biến đổi $\left(2x+3\right)+2\sqrt{2x+3}+1 = \left(\sqrt{2x+3}+1\right)^2$ ta viết phương trình lại thành

$$x^2+6x+9 = 2x+3+2\sqrt{2x+3}+1 \Leftrightarrow \left(x+3\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3}+1\right)^2$$

Đến đây ta viết được phương trình trên thành tích.

Để có phép biến đổi $\left(2x+3\right)-2\sqrt{2x+3}+1 = \left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2$ ta viết phương trình lại thành

$$x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$$

Đến đây ta cũng giải được phương trình. Như vậy ta có hai lời giải cho phương trình.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $2x+3 \geq 0$.

+ Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+6x+9=2x+3+2\sqrt{2x+3}+1 \Leftrightarrow \left(x+3\right)^2=\left(\sqrt{2x+3}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=\sqrt{2x+3}+1 \\ x+3=-\left(\sqrt{2x+3}+1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=\sqrt{2x+3} \\ -x-4=\sqrt{2x+3} \end{array}\right.$$

○ Với $x+2=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \left(x+2\right)^2=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

○ Với $-x-4=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-4 \geq 0 \\ \left(x+4\right)^2=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x^2+6x+13=0 \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta được $x=-1$ là nghiệm duy nhất.

+ Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)^2=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta được $x=-1$ là nghiệm duy nhất.

• ***Nhận xét.*** *Cũng để ý đến $2\sqrt{2x+3}$ ta viết phương trình về dạng*

$$2x+3+2\sqrt{2x+3}-x^2-6x-8=0$$

Đặt $t=\sqrt{2x+3} \geq 0$, khi đó phương trình trên trở thành $t^2+2t-x^2-6x-8=0$.

Ta có $\Delta'=1^2+\left(x^2+6x+8\right)=\left(x+3\right)^2 \geq 0$. Từ đây phương trình có hai nghiệm là $t=x+2$ và $t=-x-4$. Đến đây ta giải hoàn toàn tương tự như trên.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24 \\ 3x+\left(2x+y-1\right)\left(x-y+1\right)=11 \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Hệ phương trình đã cho có hai phương trình đều có bậc hai đối với mỗi ẩn, do đó ta đi kiểm tra xem trong hai phương trình đó thì phương trình nào phân tích được.*

Xét phương trình $5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24 \Leftrightarrow 2y^2+2\left(x-2\right)y+5x^2-2x-24=0$. Xem phương trình bên là phương trình ẩn y có x là tham số.

Khi đó ta có $\Delta'=\left(x-2\right)^2-2\left(5x^2-2x-24\right)=52-9x^2$ nên phương trình thứ nhất không phân tích được thành tích.

Xét phương trình $2x^2-y^2-1+4x+2y-xy=11 \Leftrightarrow y^2+\left(x-2\right)y-2x^2-4x+12=0$, xem phương trình bên là phương trình ẩn y với x là tham số.

Khi đó ta có $\Delta = \left(x-2\right)^2 + 4\left(2x^2+4x-12\right) = 9x^2+12x-48$, *do đó phương trình thứ hai cũng không phân tích được thành tích.*

Như vậy cả hai phương trình đều không phân tích được thành tích nên ta sẽ thử nghĩ đến hướng khác. Quan sát kỹ các phương trình của hệ ta nhận thấy $\left(2x+y-1\right)+\left(x-y+1\right)=3x$. *Như vậy nếu xem* $a=2x+y-1; b=x-y+1$ *thì ta viết lại được phương trình thứ hai thành* $a+b+ab=11$. *Vấn đề là ta cần viết phương trình thứ nhất theo a và b. Muốn thực hiện điều đó ta làm như sau*

$$\begin{cases} a^2 = \left(2x+y-1\right)^2 = 4x^2+y^2+1 = 4xy-4x-2y \\ b^2 = \left(x-y+1\right)^2 = x^2+y^2+1-2xy+2x-2y \end{cases}$$

Từ đó ta được $a^2+b^2=26$. *Như vậy ta thu được hệ phương trình* $\begin{cases} a^2+b^2=26 \\ a+b+ab=11 \end{cases}$.

Đến đây ta xem như giải được phương trình.

- **Lời giải.** Đặt $a=2x+y-1; b=x-y+1$. Khi đó hệ phương trình viết được lại thành

$$\begin{cases} a^2+b^2=26 \\ a+b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab-2ab=26 \\ ab=11-\left(a+b\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b\right)^2-2\left[11-\left(a+b\right)\right]=26 \\ ab=11-\left(a+b\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b\right)^2+2\left(a+b\right)-48=0 \\ ab=11-\left(a+b\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-8; ab=19 \\ a+b=6; ab=5 \end{array}\right.$$

\+ Với $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=19 \end{cases}$, hệ vô nghiệm do $\left(a+b\right)^2 < 4ab$.

\+ Với $\begin{cases} a+b=6 \\ ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1; b=5 \\ a=5; b=1 \end{array}\right.$.

∘ Khi $a=1; b=5$ ta có $\begin{cases} 2x+y-1=1 \\ x-y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$.

∘ Khi $a=5; b=1$ ta có $\begin{cases} 2x+y-1=5 \\ x-y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $\left(2;-2\right), \left(2;2\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Khi hai phương trình của hệ đều không thể phân tích được thành tích thì ta nhân một trong hai phương trình với một số k rồi cộng theo vế hai phương trình thì được một phương trình bậc hai. Ta cần tìm hằng số k để phương trình phân tích được thành tích. Chẳng hạn ta viết lại hệ phương trình như*

$$\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y=24 \\ 3x+\left(2x+y-1\right)\left(x-y+1\right)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy-2x-4y-24=0 \\ 2x^2-y^2-xy+4x+2y-xy-12=0 \end{cases}$$

Khi đó ta thấy nếu nhân phương trình thứ hai với $k=2$ *rồi cộng hai phương trình thì ta thu được phương trình* $9x^2+6x-48=0$.

Bài 3. (2.0 điểm). Cho phương trình $x^2+(m-1)x-6=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A=(x_1^2-9)(x_2^2-4)$ đạt giá trị lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Bài toán số ba là bài toán về hệ thức Vi – et, do đó ta sử dụng hệ thức Vi – te để giải quyết. Tuy nhiên trước hết ta cần phải tìm điều kiện có nghiệm cho phương trình.*

• **Lời giải.** Ta có $\Delta' =(m-1)^2+24>0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm phan biệt $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1+x_1=1-m$ và $x_1.x_2=-6$.

Ta có $A=(x_1^2-9)(x_2^2-4)=x_1^2.x_2^2+36-9x_2^2-4x_1^2=(x_1x_2+6)^2-(2x_1+3x_2)^2$.

Do $x_1x_2=-6$ nên $A=-(2x_1+3x_2)^2\le 0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 0.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1x_2=-6\\ 2x_1+3x_2=0\\ x_1+x_2=1-m\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3; x_2=-2; m=0\\ x_1=-3; x_2=2; m=2\end{array}\right.$.

Vậy với $m=0$ hoặc $m=-2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. (2.0 điểm). Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}$$

• ***Phân tích.*** *Quan sát bất đẳng thức nhận thấy có đánh giá* $a^2+b^2\ge 2ab=2$. *Như vậy ta suy ra được*

$$A=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}\ge 2(a+b+1)+\frac{4}{a+b}=2(a+b)+2+\frac{4}{a+b}$$

Ta cần một đánh giá làm triệt tiêu $\frac{4}{a+b}$. *Dự đoán dấu bằng xẩy ra tại* $a=b=1$, *khi đó ta để ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy dạng* $k(a+b)+\frac{4}{a+b}\ge 2.\sqrt{4k}$.

Chú ý rằng để bất đẳng thức trên xẩy ra dấu bằng thì ta cần có $\begin{cases} k(a+b)=\dfrac{4}{a+b}\\ a=b=1\end{cases} \Rightarrow k=1$.

Đến đây ta có lời giải cho bài toán.

• **Lời giải.** Ta có $a^2+b^2\ge 2ab=2$. Khi đó ta được

$$A=(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}\ge 2(a+b+1)+\frac{4}{a+b}=2(a+b)+2+\frac{4}{a+b}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $(a+b)+\frac{4}{a+b}\ge 4$ và $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Do đó ta được

$$A\ge 2(a+b)+2+\frac{4}{a+b}=a+b+2+a+b+\frac{4}{a+b}\ge 2\sqrt{ab}+2+4=8$$

Vậy giá nhỏ nhất của A là 8 khi và chỉ khi $a=b=1$.

- ***Nhận xét.*** *Bài toán sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương. Tuy nhiên một sai lầm thường hay gặp đó ta thực hiện đánh giá* $2\left(a+b\right)+\dfrac{4}{a+b}\ge 4\sqrt{2}$. *Nguyên nhân sai lầm ở đây là bất đẳng thức không xẩy ra dấu bằng tại* $a=b=1$.

Bài 5. a) Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p=q+2$. Tìm số dư khi chia $p+q$ cho 12.

- ***Phân tích.*** *Bài toán cho p và q là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p và q khi chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2. Ngoài ra bài toán yêu cầu tìm số dư khi chia* $p+q$ *cho 12 nên ta tìm số dư của* $p+q$ *khi chia cho 3 và 4. Chú ý rằng ta có* $p=q+2$ *nên ta chỉ cần xét các trường hợp của q là có thể suy ra các trường hợp của p.*

- **Lời giải.** Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k\in N^*$.

+ Nếu $q=3k+1$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q=3k+2$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q=6\left(k+1\right)\vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

b) Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình $x\left(x+1\right)=y^2+1$.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta viết lại phương trình thành* $x^2+x-y^2=1$. *Từ phương trình ta nghĩ đến viết vế trái thành các bình phương, muốn vậy ta cần nhân vào hai vế một số chính phương chẵn. Ta có* $x^2+x-y^2=1\Leftrightarrow 4x^2+4x-4y^2=4\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4y^2=5\Leftrightarrow\left(2x+1\right)^2-\left(2y\right)^2=5$. *Đến đây thì ta có thể đưa phương trình về dạng phương trình ước số.*

- **Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x-y^2=1\Leftrightarrow 4x^2+4x-4y^2=4\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4y^2=5$$
$$\Leftrightarrow\left(2x+1\right)^2-\left(2y\right)^2=5\Leftrightarrow\left(2x+2y+1\right)\left(2x-2y+1\right)=5$$

Do x, y là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases}2x-2y+1=1\\2x+2y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases}2x-2y+1=5\\2x+2y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$.

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases}2x-2y+1=-1\\2x+2y+1=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$.

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases}2x-2y+1=-5\\2x+2y+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$.

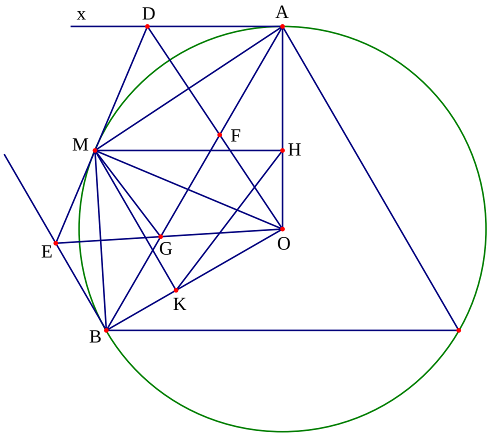
Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(-2;1\right),\left(1;-1\right),\left(-2;-1\right)$.

Bài 6. (3.0 điểm). Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ và H là một điểm di động trên đoạn OA(H khác A). Đường thẳng qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh rằng $\widehat{HKM} = 2\widehat{AMH}$.

- ***Phân tích.*** *Nhận thấy tứ giác MHOK nội tiếp nên ta có* $\widehat{MKH} = \widehat{MOH}$.

Như vậy để chứng minh $\widehat{HKM} = 2\widehat{AMH}$ *ta cần chỉ ra được* $\widehat{HOM} = 2\widehat{AMH}$. *Chú ý rằng* $\widehat{MOH}$ *là góc ở tâm chắn cung AM. Như vậy ta cần chỉ ra* $\widehat{AMH}$ *bằng một nửa số đo cung AM. Để là được điều này ta chỉ cần vẽ tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) là được.*



- **Lời giải.** Vẽ tiếp tuyến tại A với đường tròn (O). Khi đó ta có $\widehat{MAx} = \frac{1}{2}\widehat{MOA}$. Mặt khác ta lại có Ax//MH nên ta được $\widehat{MAx} = \widehat{AMH}$.

Do đó $\widehat{AMH} = \frac{1}{2}\widehat{MOA}$. Tứ giác MHOK có $\widehat{MKO} + \widehat{MHO} = 180^0$ nên nội tiếp được, do đó ta được $\widehat{MKH} = \widehat{MOH}$. Từ đó suy ra $\widehat{AMH} = \frac{1}{2}\widehat{MKH}$ hay $\widehat{HKM} = 2\widehat{AMH}$.

b) Chứng minh rằng $OD.GF = OG.DE$.

- ***Phân tích.*** *Để chứng minh được* $OD.GF = OG.DE$ *ta đi chứng minh hai tam giác OGF và ODE đồng dạng. Mà hai tam giác đó có một góc chung là* $\widehat{DOE}$, *nên ta cần chỉ ra được một cặp góc nữa bằng nhau. Dễ thấy tứ giác ADMO nội tiếp, như vậy ta cần chỉ ra điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADMO thì xem như bài toán được chứng minh.*

- **Lời giải.** Dễ thấy tứ giác ADMO nội tiếp đường tròn.

Mà ta có $\widehat{MAG} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{BM}$ và $\widehat{MOE} = \widehat{BOE} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{BM}$. Do đó ta được $\widehat{MAG} = \widehat{EOM}$, mà hai góc này cùng nhìn đoạn MG, suy ra tứ giác MGOA nội tiếp đường tròn. Từ đó ta thấy năm điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên môt đường tròn. Do đó ta được $\widehat{FGO} = \widehat{ODA} = \widehat{ODM}$.

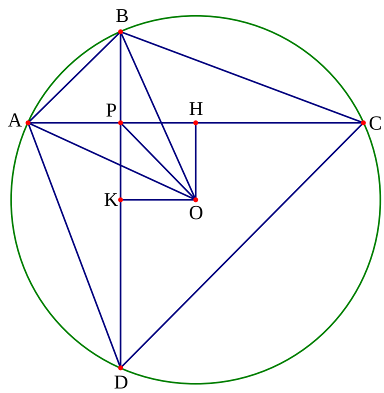
Xét hai tam giác OGF và ODE có $\widehat{GOF}$ chung và $\widehat{FGO} = \widehat{ODM}$ nên $\Delta OGF \backsim \Delta ODM$.

Từ đó suy ra $\frac{OG}{OD} = \frac{DE}{GF}$ hay $OD.GF = OG.DE$.

Bài 7. (2.0 điểm).

- ***Phân tích.*** *Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau nên* $S_{ABCD} = \frac{AC.BD}{2}$, *mà ta lại có* $AC.BD \le \frac{AC^2 + BD^2}{2}$ *nên* $S_{ABCD} \le \frac{AC^2 + BD^2}{4}$.

Đến đây ta cần biểu diễn được $AC^2 + BD^2$ theo R và OP.



- **Lời giải.** Dựng OH vuông góc với AC tại H và OK vuông góc với BD lại K. Khi đó ta có

$AH=\frac{1}{2}AC; BK=\frac{1}{2}BD$. Tứ giác OHKK là hình chữ nhật nên $OP=HK$ không đổi.

Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2+BD^2=\left(2AH\right)^2+\left(2BK\right)^2=4\left(AH^2+BK^2\right)$.

Lại có $AH^2=OA^2-OH^2; BK^2=OB^2-OK^2$. Do đó ta được

$$AC^2+BD^2=4\left(OA^2-OH^2+OB^2-OK^2\right)=4\left(OA^2+OB^2\right)-4\left(OH^2+OK^2\right)=8R^2-4OP^2$$

Từ đó suy ra $S_{ABCD}\le\frac{8R^2-4OP^2}{4}=2R^2-OP^2=2.5^2-3^2=41\left(cm^2\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của S_{ABCD} là $41\left(cm^2\right)$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AC=BD$.

Khi đó ta được $OH=OK$ hay OHPK là hình vuông, do đó ta được $\widehat{OPD}=45^0$.

• ***Nhận xét.*** *Bài hình thứ hai của của thi cũng liên quan đến đường tròn. Tuy nhiên điểm mấu chất ở đây là sử dụng định lí Pitago để tính* AC^2+BD^2 *theo R, ngoài ra cũng do hai đường chéo của tứ giác vuông góc với nhau nên ta cũng tìm được liên hệ giữa* S_{ABCD} *với R.*

Đề số 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2015 – 2016

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2\left(c^2 - 8d^3\right)$.

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3\left(x + 2\right)$

b) Tìm tất cả các bộ ba số $\left(x; y; z\right)$ thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy + yz + zx = \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4x}{3 - 4x^2} + \frac{4y}{3 - 4y^2} + \frac{4z}{3 - 4z^2}$$

b) Cho a, b, c là đồ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b + c - a} + \frac{b^{2016}}{c + a - b} + \frac{c^{2016}}{a + b - c} \geq a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$$

Câu 4. (6.0 điểm).

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Lấy điểm Q bất kì trên cạnh BC (Q khác B và C). Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho $CQ.AP = a^2$. Gọi M là giao điểm của AQ và CP.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA.

1. Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

2. Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Câu 5. (1.0 điểm).

Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông có kích thước 1x1. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2\left(c^3 - 8d^3\right)$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh được* $a + b + c + d$ *chia hết cho 3 thì ta cần tạo ra tổng trong đó có chứa biểu thức* $a + b + c + d$ *và tổng đó chia hết cho 3. Để ý đến giả thiết* $a^3 + b^3 = 2\left(c^3 - 8d^3\right)$*, ta nghĩ đến biến đổi để làm xuất hiện* $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3$*. Do đó ta sẽ thêm bớt một lượng thích hợp cho giả thiết của bài toán. Ta có*

$$a^3 + b^3 + 3ab\left(a + b\right) + \left(c^3 + d^3\right) + 3cd\left(c + d\right) = 3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$$
$$\Leftrightarrow \left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3 = 3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$$

Dễ thấy $3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$ *chia hết cho 3 nên ta được* $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3$ *chia hết cho 3. Đến đây ta thấy nếu viết* $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3$ *về dạng* $\left(a + b + c + d\right).A$ *thì ta chưa thể khẳng định được* $a + b + c + d$ *chia hết cho 3. Do đó ta sẽ viết biểu thức* $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3$ *về dạng lũy thừa bậc ba của* $a + b + c + d$*. Ta có*

$$\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3 = \left(a + b + c + d\right)^3 - 3\left(a + b\right)\left(c + d\right)\left(a + b + c + d\right)$$

Đến đây ta có được điều cần chứng minh.

• **Lời giải.** Từ giả thiết $a^3 + b^3 = 2\left(c^3 - 8d^3\right)$ ta có

$$a^3 + b^3 + 3ab\left(a + b\right) + \left(c^3 + d^3\right) + 3cd\left(c + d\right) = 3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$$
$$\Leftrightarrow \left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3 = 3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$$

Dễ thấy $3ab\left(a + b\right) + 3cd\left(c + d\right) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $\left(a + b\right)^3 + \left(c + d\right)^3 = \left(a + b + c + d\right)^3 - 3\left(a + b\right)\left(c + d\right)\left(a + b + c + d\right)$

Mà $3\left(a + b\right)\left(c + d\right)\left(a + b + c + d\right)$ chia hết cho 3 nên suy ra $\left(a + b + c + d\right)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

• ***Nhận xét.*** *Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu* $x^3 + y^3$ *chia hết cho 3 thì* $x + y$ *chia hết cho 3.*

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho $2^x + x^2$ là số nguyên tố.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $x = 2$ *không thỏa mãn yêu cầu bài toán còn* $x = 3$ *thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần chứng minh rằng khi* $x > 3$ *thì không tồn tại số nguyên tố thỏa mãn. Chú ý rằng khi* $x > 3$ *thì x là số nguyên tố lẻ ta luôn có* x^2 *chia 3 có số dư là 1. Ngoài ra khi số nguyên tố* $x > 3$ *thì* 2^x *chia 3 luôn dư 2. Điều này dẫn đến* $2^x + x^2$ *luôn chia hết cho 3, do đó khi* $x > 3$ *thì* $2^x + x^2$ *luôn là hợp số.*

• **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x = 2$ ta được $2^x + x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x = 3$ ta được $2^x + x^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x > 3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x = 2k + 1\left(k \in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x = 2^{2k+1} = 2.4^k = 2\left(3+1\right)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy $2^x + x^2$ luôn chia hết cho 3. Do đó $2^x + x^2$ luôn là hợp số khi $x > 3$.

Vậy $x = 3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- ***Nhận xét.*** *Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ $x = 2; 3$. Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.*

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3\left(x+2\right)$

- ***Phân tích.*** *Quan sát phương trình ta nhận thấy $\left(2x^2 + 11x + 19\right) - \left(2x^2 + 5x + 7\right) = 6\left(x+2\right)$ nên ta nghĩ đến phép nhân liên hợp. Để ý là cần xét các trường hợp của phép nhân liên hợp có thể thực hiện được.*

- **Lời giải.** Điều kiện xácđịnh của phương trình là $2x^2 + 11x + 19 \ge 0; 2x^2 + 5x + 7 \ge 0$.

+ Xét $x = -2$, ta thấy thỏa mãn phương trình, do đó $x = -2$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x \ne -2$, khi đó ta có $\sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} \ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{6\left(x+2\right)}{\sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7}} = 3\left(x+2\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2.$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 11x + 19} + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 3\left(x+2\right) \\ \sqrt{2x^2 + 11x + 19} - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2 \end{cases}$

Từ đó ta được $2\sqrt{2x^2 + 11x + 19} = 3x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8 \ge 0 \\ 4\left(2x^2 + 11x + 19\right) = \left(3x+8\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S = \left\{-2; 2\right\}$.

- ***Nhận xét.***

+ Kỹ thuật nhân liên hợp như trên được gọi là nhân liên hợp đưa về hệ tạm. trong bài toán này sẽ có nhiều em sai lầm khi không xét các trường hợp $x = -2$ và $x \ne -2$, điều này vừa cho phép nhân liên hợp không xảy ra vừa làm cho ta lấy thiếu nghiệm.

+ Ngoài cách nhân liên hợp thì ta cũng có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ như sau.

Đặt $a = 2x^2 + 11x + 19; b = 2x^2 + 5x + 7\left(a \ge 0; b \ge 0\right)$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3\left(x+2\right) \\ a^2 - b^2 = 6\left(x+2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3\left(x+2\right) \\ \left(a+b\right)\left(a-b\right) = 6\left(x+2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3\left(x+2\right) \\ \left(x+2\right)\left(a-b\right) = 2\left(x+2\right) \end{cases}$$

Đến đây ta có hai trường hợp $x + 2 = 0$ và $a - b = 2$ thì thu được kết quả tương tự như trên.

b) Tìm tất cả các bộ ba số $(x;y;z)$ thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2+z^2=17 \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Để ý* $x+y+z=3$ *và* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ *ta nhận thấy* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$*, khi đó quy đồng và phân tích thành tích ta được* $(x+y)(y+z)(z+x)=0$*. Đến đây ta xét các trường hợp rồi thế vào phương trình thứ ba để tìm nghiệm cho hệ.*

• **Lời giải.** Từ $x+y+z=3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{z(x+y+z)}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(xy+zx+yz+z^2)=0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

+ Xét trường hợp $x+y=0$, khi đó từ $x+y+z=3$ ta được $z=3$.

Cũng từ $x+y=0$ ta được $x=-y$. Thế vào $x^2+y^2+z^2=17$ ta được $2x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Từ đó ta được hai bộ số $(x;y;z)$ thỏa mãn là $(2;-2;3),(-2;2;3)$.

+ Giải các trường hợp $y+z=0$ và $z+x=0$ ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số $(x;y;z)$ cần tìm là $(2;-2;3),(-2;2;3),(2;3;-2),(-2;3;2),(3;2;-2),(3;-2;2)$.

Câu 3. (3.0 điểm).

a) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $0<x,y,z<\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $xy+yz+zx=\frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4x}{3-4x^2}+\frac{4y}{3-4y^2}+\frac{4z}{3-4z^2}$.

• ***Phân tích.*** *Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra tại* $x=y=z=\frac{1}{2}$*. Quan sát bất đẳng thức ta thấy biểu thức P có các đại lượng độc lập nhau về biến. Do đó ta nghĩ đến chứng minh các bất đẳng thức* $\frac{4x}{3-4x^2}\ge f(x);\frac{4y}{3-4y^2}\ge f(y);\frac{4z}{3-4z^2}\ge f(z)$.

Để ý rằng nếu ta thực hiện phân tích $3-4x^2=(\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x)$ *thì trong biểu thức xuất hiện* $\sqrt{3}$ *là số vô tỉ rất khó để cân bằng điểm rơi. Như vậy thay vì xét biểu thức* $\frac{x}{3-4x^2}$ *ta đi xét biểu thức* $\left(\frac{x}{3-4x^2}\right)^2=\frac{x^2}{(3-4x^2)^2}$*. Vì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng* $\frac{4x}{3-4x^2}\ge f(x)$ *nên ta sẽ đánh giá mẫu theo chiều tăng dần. Do trong đại lượng* $3-4x^2$ *có* $-4x^2$ *nên ta cần nhân thêm vào* $(3-4x^2)^2$ *một lượng* kx^2

để khi đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy thì biến bị triệt tiêu. Để ý rằng khi $x = \frac{1}{2}$ *thì ta có* $8x^2 = 3 - 4x^2$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$8x^2\left(3-4x^2\right)^2 = 8x^2.\left(3-4x^2\right)\left(3-4x^2\right) \le \left(\frac{8x^2+3-4x^2+3-4x^2}{3}\right)^3 = 8$$

Từ đó $\frac{x^2}{\left(3-4x^2\right)^2} = \frac{8x^4}{8x^2\left(3-4x^2\right)^2} \ge \frac{8x^4}{8} = x^4$ *nên* $\frac{4x}{3-4x^2} \ge 4x^2$.

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$8x^2\left(3-4x^2\right)^2 = 8x^2.\left(3-4x^2\right)\left(3-4x^2\right) \le \left(\frac{8x^2+3-4x^2+3-4x^2}{3}\right)^3 = 8$$

Từ đó ta được $\frac{x^2}{\left(3-4x^2\right)^2} = \frac{8x^4}{8x^2\left(3-4x^2\right)^2} \ge \frac{8x^4}{8} = x^4$ nên $\frac{4x}{3-4x^2} \ge 4x^2$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{4y}{3-4y^2} \ge 4y^2; \frac{4z}{3-4z^2} \ge 4z^2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $P \ge 4\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge 4\left(xy+yz+zx\right) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

b) Cho a, b, c là đồ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{2016}}{b+c-a} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} \ge a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}$$

- ***Phân tích.*** *Với bất đẳng thưc cần chứng minh trên ta không thể sử dụng các đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki. Do đó ta nghĩ đến phương pháp biến đổi tương đương.*

Xét hiệu $\frac{a^{2016}}{b+c-a} - a^{2015} + \frac{b^{2016}}{c+a-b} - b^{2015} + \frac{c^{2016}}{a+b-c} - c^{2015}$. *Khi đó ta được*

$$\begin{aligned}
& a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right) + b^{2015}\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right) + c^{2015}\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right) \\
&= a^{2015}\left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a}\right) + b^{2015}\left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b}\right) + c^{2015}\left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c}\right) \\
&= \frac{a^{2015}\left(a-b\right)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}\left(a-b\right)}{c+a-b} + \frac{b^{2015}\left(b-c\right)}{c+a-b} - \frac{c^{2015}\left(b-c\right)}{a+b-c} + \frac{a^{2015}\left(a-c\right)}{b+c-a} - \frac{b^{2015}\left(a-c\right)}{a+b-c}
\end{aligned}$$

Nếu $a \ge b \ge c$ *khi đó ta thấy* $a^{2015} \ge b^{2015} \ge c^{2015}$ *và* $0 < b+c-a \le a+c-b \le a+b-c$.

Khi đó ta thấy $\frac{a^{2015}}{b+c-a} \ge \frac{b}{c+a-b}; \frac{b^{2015}}{a+c-b} \ge \frac{c^{2015}}{a+b-c}; \frac{a^{2015}}{b+c-a} \ge \frac{c^{2015}}{a+b-c}$.

Do đó ta được $\left(a-b\right)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a} - \frac{b^2}{c+a-b}\right) \ge 0$. *Hoàn toàn tương tự ta cũng có*

$$\left(b-c\right)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b} - \frac{c^{2015}}{a+b-c}\right) \ge 0; \left(a-c\right)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a} - \frac{b^{2015}}{a+b-c}\right) \ge 0$$

Đến đây bài toán xem như được chứng minh.

- **Lời giải.** Xét hiệu $\dfrac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\dfrac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\dfrac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015}$ hay ta được

$$a^{2015}\left(\frac{a}{b+c-a}-1\right)+b^{2015}\left(\frac{b}{c+a-b}-1\right)+c^{2015}\left(\frac{c}{a+b-c}-1\right)$$

$$=a^{2015}\left(\frac{a-b+a-c}{b+c-a}\right)+b^{2015}\left(\frac{b-a+b-c}{c+a-b}\right)+c^{2015}\left(\frac{c-a+c-b}{a+b-c}\right)$$

$$=\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c > 0$.

Khi đó ta thấy $a^{2015} \ge b^{2015} \ge c^{2015}$ và $0 < b+c-a \le a+c-b \le a+b-c$.

Do đó ta có $(a-b)\left(\dfrac{a^{2015}}{b+c-a}-\dfrac{b^{2}}{c+a-b}\right) \ge 0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$(b-c)\left(\frac{b^{2015}}{c+a-b}-\frac{c^{2015}}{a+b-c}\right) \ge 0;(a-c)\left(\frac{a^{2015}}{b+c-a}-\frac{b^{2015}}{a+b-c}\right) \ge 0$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^{2015}(a-b)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-b)}{c+a-b}+\frac{b^{2015}(b-c)}{c+a-b}-\frac{c^{2015}(b-c)}{a+b-c}+\frac{a^{2015}(a-c)}{b+c-a}-\frac{b^{2015}(a-c)}{a+b-c} \ge 0$$

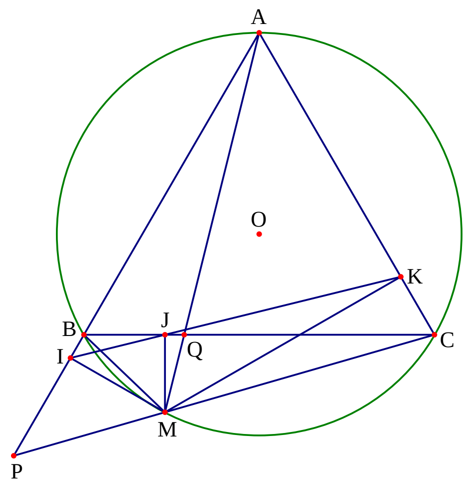
Do đó $\dfrac{a^{2016}}{b+c-a}-a^{2015}+\dfrac{b^{2016}}{c+a-b}-b^{2015}+\dfrac{c^{2016}}{a+b-c}-c^{2015} \ge 0$

Từ đó suy ra $\dfrac{a^{2016}}{b+c-a}+\dfrac{b^{2016}}{c+a-b}+\dfrac{c^{2016}}{a+b-c} \ge a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 4. (6.0 điểm).

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.



- ***Phân tích.*** *Giả thiết* $CQ.AP = a^2$ *được viết lại thành* $CQ.AP = AC^2$ *hay* $\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{AC}{AQ}$. *Từ đó ta nghĩ đến hai tam giác ACP và CQA đồng dạng. Điều này được khẳng định do* $\widehat{PAC}=\widehat{QCA}=60^0$. *Để chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn ta chỉ cần chỉ ra* $\widehat{MAB}=\widehat{BCM}$ *là được.*

- **Lời giải.** Từ $CQ.AP = a^2$ ta được $CQ.AP = AC^2$ hay $\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{AC}{AQ}$.

Xét hai tam giác ACP và CQA có $\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{AC}{AQ}$ và $\widehat{PAC}=\widehat{QCA}=60^0$ nên $\Delta ACP \backsim \Delta CQA$.

Từ đó ta được $\widehat{ACP} = \widehat{AQC}$. Mà ta có $\widehat{ACP} = \widehat{ACB} + \widehat{BCP} = 60^0 + \widehat{BCP}$

Lại có $\widehat{AQC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAM} = 60^0 + \widehat{BAM}$.

Do đó ta được $\widehat{MAB} = \widehat{BCM}$, suy ra tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn.

b) Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA.

- ***Phân tích.***

+ Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Ta nhận thấy rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng (Đường thẳng Simson). Do đó ta dự đoán là IK dài nhất khi $IK = BC$*, khi đó điểm M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O). Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được* $\frac{IK}{BC} = \frac{MI}{MB}$.

Mà ta có $IM \le MB$ *nên ta được* $IK \le BC$*. Từ đó ta có lời giải cho bài toán.*

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.*

Để tính được $MI^2 + MJ^2 + MK^2$*, trước hết ta cần tìm được mối lên hệ giữa MI, MJ, MK. Chú ý rằng ta có MI, MJ, MK lần lượt là các đường cao của các tam giác ABM, BCM, ACM. Khi đó ta có*

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MI; S_{BCM} = \frac{1}{2}BC.MJ; S_{ACM} = \frac{1}{2}MK.AC$$

Quan sát các công thức trên ta thấy có mối liên hệ là $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{BCM} + S_{ABC}$*, mà tam giác ABC đều cạnh a nên ta tính được* $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$*. Từ đó ta thấy* $AB.MI + MK.AC = BC.MJ + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ *hay ta được* $MI + MK = MJ + \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$*. Để tính được* $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *ta có thể bình phương hai vế biểu thức* $MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Như vậy ta có $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + 2\left(MI.MK - MI.MJ - MJ.MK\right) = \frac{3a^2}{4}$*. Để chứng minh được yêu cầu của bài toán ta cần phải chứng minh được* $MI.MK - MI.MJ - MJ.MK$ *không đổi.*

Trong các bài toán liên quan đến đường thẳng Simson ta thấy có một hệ thức liện hệ giữa MI, NJ, MK đó là $\frac{1}{MI} + \frac{1}{MK} = \frac{1}{MJ}$*. Cần kiểm tra xem hai hệ thức này có mối liên hệ gì không.*

Ta có $\frac{1}{MI} + \frac{1}{MK} = \frac{1}{MJ} \Leftrightarrow MI.MK = MJ\left(MI + MK\right) \Leftrightarrow MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$*. Đến đây ta có thể chứng minh được* $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.*

- **Lời giải.**

+ Xác định vị trí của Q để IK có độ dài lớn nhất.

Do tứ giác ABMC và AIMI nội tiếp nên $\widehat{BMC} = \widehat{IMK} = 120^0$, suy ra $\widehat{IMB} = \widehat{KMC}$.

Mà hai tứ giác BIMJ và CKJM nội tiếp nên ta lại có $\widehat{BMI} = \widehat{BJI}; \widehat{KMC} = \widehat{KJC}$.

Do đó ta được $\widehat{BJI} = \widehat{KJC}$ nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Dễ thấy hai tam giác BMC và IMK đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\frac{IK}{BC} = \frac{MI}{MB}$.

Mà ta có $IM \le MB$ nên ta được $IK \le BC$ hay $IK \le a$, dấu bằng xẩy ra khi $MB \perp AB$ hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC, khi đó Q là trong điểm cạnh BC.

Vậy IK lớn nhất khi Q là trung điểm của BC.

+ Chứng minh $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

Do tứ giác BIMJ nội tiếp nên ta có $\widehat{IMJ} = \widehat{ABC} = 60^0 = \widehat{ACB}$. Lại có $\widehat{MIJ} = \widehat{MBJ} = \widehat{MAC}$.

Do đó hai tam giác IMJ và ACQ đồng dạng, do đó ta được $\frac{MJ}{MI} = \frac{CQ}{CA}$. Tương tự ta được $\frac{MJ}{MK} = \frac{BQ}{AB}$.

Từ đó suy ra $\frac{MJ}{MI} + \frac{MJ}{MK} = \frac{CQ}{CA} + \frac{BQ}{AB} = 1$ nên ta được $MJ\left(MI + MK\right) = MI.MK$.

Hay $MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$.

Mặt khác ta lại có $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MI; S_{BCM} = \frac{1}{2}BC.MJ; S_{ACM} = \frac{1}{2}MK.AC$

Mà $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{BCM} + S_{ABC}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Nên ta có $AB.MI + MK.AC = BC.MJ + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. hay

$MI + MK = MJ + \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MI + MK - MJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\left(MI + MK - MJ\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

Suy ra $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + 2\left(MI.MK - MI.MJ - MJ.MK\right) = \frac{3a^2}{4}$.

Mà $MI.MK - MJ.MI - MJ.MK = 0$ nên $MI^2 + MJ^2 + MK^2 = \frac{3a^2}{4}$ không đổi.

Vậy $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC.

• ***Nhận xét.*** *Để chứng minh được* $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ *không đổi khi Q di chuyển trên cạnh BC ta đi chứng minh hai bài toán nhỏ sau.*

+ *Bài toán 1.* *Cho tam giác ABC đều có cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O.Gọi M là điểm bất kì trê cung nhỏ BC. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC. Khi đó* $MI + MK - MJ$ *không đổi.*

+ *Bài toán 2.* *Cho tam giác ABC đều có cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O.Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, AC. Khi đó* $\frac{1}{MI} + \frac{1}{MK} = \frac{1}{MJ}$. *Hệ thức trong bài toán 2 còn đúng cho tam giác nhọn ABC bất kì.*

Câu 5. (1.0 điểm).

• ***Phân tích.*** *Bảng có kích tước 10.10 có tất cả 100 ô vuông đơn vị. Theo bài ra thì hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh luôn nguyên tố cùng nhau, như vậy trong hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh thì có một số chẵn và một số lẻ. Trong hình* $2x2$ *có nhiều nhất một số lẻ. Ngoài ra trong các số lẻ đó có nhiều nhất một số là bội của 3 nên có nhiều nhất hai số lẻ không chia hết cho 3. Ta viết rằng trong 100 ô vuông đơn ví có 25 ô vuông* $2x2$ *nên có nhiều nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Mà các số lẻ không chia hết cho 3 thỏa mãn bài toán gồm 1; 5; 7. Như vậy theo nguyên lý Dirichlet thì bài toán được chứng minh.*

• **Lời giải.** Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10x10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2x2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần.

Đề số 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (1.5 điểm).

Cho biểu thức $M = \dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}} = 9$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + zx = 48 \\ y^2 + xy + yz = 12 \\ z^2 + zx + yz = 84 \end{cases}$.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Cho $a = \underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016 \text{ ts } \sqrt{2}}$ và $b = \underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016 \text{ ts } \sqrt{2}}$. Chứng minh rằng hai số a và b có cùng chữ số hàng đơn vị.

b) Cho hàm số $y = ax + a + 1$ với a là tham số, $a \neq 0$ và $a \neq -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để khoảng cách từ góc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (3.5 điểm).

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn $(M; MB)$ cắt đoạn thẳng AM tại D.

a) Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

c) Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2+y^2-z^2} + \frac{1}{y^2+z^2-x^2} + \frac{1}{z^2+x^2-y^2}$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (1.5 điểm). Cho biểu thức $M = \dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức M.

$$M = \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)} - \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)} + \frac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$$

$$= \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3 - \left(a-1\right) + \left(a-4\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)} = \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Với $a \ge 0, a \ne 1$ ta có $M = \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$.

Để M nhận giá trị nguyên thì $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1} \in Z$ hay ta phải có $\sqrt{a} - 1 \in U\left(2\right)$.

Từ đó ta được $\sqrt{a} - 1 \in \left\{-1;1;2\right\}$ hay $a \in \left\{0;4;9\right\}$.

Thử lại các giá trị của a trên ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy các giá trị cần tìm $a \in \left\{0;4;9\right\}$.

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x + 3 + 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 + 6\sqrt{x-1}} = 9$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $x + 3 + 4\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}+2\right)^2$ *và* $x + 8 + 6\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}+3\right)^2$ *nên ta chuyển phương tình về phương trình giá trị tuyệt đối để giải.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 4} + \sqrt{x - 1 + 6\sqrt{x-1} + 9} = 9$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+3\right)^2} = 9 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+2\right| + \left|\sqrt{x-1}+3\right| = 9$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2 + \sqrt{x-1} + 3 = 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + zx = 48 \\ y^2 + xy + yz = 12 \\ z^2 + zx + yz = 84 \end{cases}$.

• ***Phân tích.*** *Quan sát các phương trình ta nhận thấy phương trình đã cho được viết lại thành*

$$\begin{cases} x^2 + xy + zx = 48 \\ y^2 + xy + yz = 12 \\ z^2 + zx + yz = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x+y+z\right) = 48 \\ y\left(x+y+z\right) = 12 \\ z\left(x+y+z\right) = 84 \end{cases}$$

Như vậy nếu tính được $x + y + z$ *thì xem như ta tìm được nghiệm của hệ phương trình.*

Chú ý đến các phương trình của hệ ta lại thấy nếu công theo vế các phương trình của hệ thì ta được $\left(x+y+z\right)^2 = 144$. *Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*

• **Lời giải.** Biến đổi tương đương phương trình ta được $\begin{cases} x^2+xy+zx=48 \\ y^2+xy+yz=12 \\ z^2+zx+yz=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z)=48 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=84 \end{cases}$

Mặt khác cộng theo vế các phương trình của hệ ta được $(x+y+z)^2=144 \Leftrightarrow x+y+z=\pm 12$.

+ Với $x+y+z=-12$, thế vào phương trình trên ta được $(x;y;z)=(-4;-1;-7)$.

+ Với $x+y+z=12$, thế vào phương trình trên ta được $(x;y;z)=(4;1;7)$.

Thử vào hệ phương trình đã cho ta được các nghiệm của hệ là $(x;y;z)=(4;1;7),(-4;-1;-7)$.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Cho $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016\text{ ts }\sqrt{2}}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016\text{ ts }\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng hai số a và b có cùng chữ số hàng đơn vị.

• ***Phân tích.*** *Dễ dàng nhận ra được* $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016\text{ t/s }\sqrt{2}}=2^{1008}$ *và* $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016\text{ t/s }\sqrt{2}}=2^{1508}$. *Như vậy để chứng minh hai số a, b có cùng chữ số tận cùng thì ta đi tìm chữ số tận cùng của a và b, hoặc đi chứng minh hiệu* $a-b$ *chia hết cho 10.*

• **Lời giải.** Dễ thấy $a=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{2016\text{ t/s }\sqrt{2}}=2^{1008}$ và $b=\underbrace{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}...\sqrt{2}}_{3016\text{ t/s }\sqrt{2}}=2^{1508}$.

Ta có $a=2^{1008}=\left(2^4\right)^{252}=16^{252}=(...6)$ và $b=2^{1508}=\left(2^4\right)^{377}=16^{377}=(...6)$

Vậy a và b cùng có chữ số tận cùng là 6 hay ta có điều phải chứng minh.

b) Cho hàm số $y=ax+a+1$ với a là tham số, $a\neq 0$ và $a\neq -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để khoảng cách từ góc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Do* $a\neq 0$ *và* $a\neq -1$ *nên đồ thì hàm số* $y=ax+a+1$ *cắt trục tung và trục hoành tại các điểm khác gốc tọa độ O. Gọi các giao điểm đó là* $A\left(-\frac{a+1}{a};0\right)$ *và* $B(0;a+1)$. *Khi đó ta có các khoảng cách* $OA=\left|-\frac{a+1}{a}\right|;OB=|a+1|$. *Gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị của* $y=ax+a+1$.

Khi đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{BO^2}=\frac{a^2}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}$.

Đến đây ta đi tìm giá trị lớn nhất của h.

• **Lời giải.** Do $a\neq 0$ và $a\neq -1$ nên đồ thì hàm số $y=ax+a+1$ cắt trục tung và trục hoành tại các điểm khác gốc tọa độ O. Gọi các giao điểm đó là $A\left(-\frac{a+1}{a};0\right)$ và $B(0;a+1)$. Khi đó ta có các khoảng cách $OA=\left|-\frac{a+1}{a}\right|;OB=|a+1|$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị của $y=ax+a+1$.

Khi đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BO^2} = \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}$.

Từ đó ta được $h^2 = \frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} = 1 + \frac{2a}{a^2+1} \le 1 + \frac{2|a|}{a^2+1} \le 2$, dấu bằng xẩy ra khi $a = 1$.

Từ đó suy ra $h \le \sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến đường thẳng $y = ax + a + 1$ là $\sqrt{2}$ khi $a = 1$.

- ***Nhận xét.*** *Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của h theo cách khác như sau*

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\left|-\frac{a+1}{a}\right|.|a+1| = \frac{1}{2}.\frac{(a+1)^2}{|a|}$.

Mặt khác ta có $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2} + (a+1)^2} = \left|\frac{a+1}{a}\right|\sqrt{a^2+1}$.

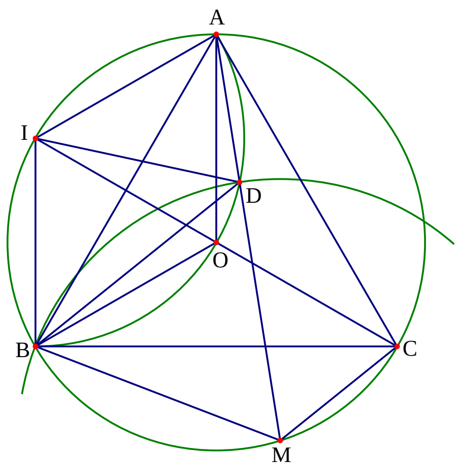
Từ đó ta được $h = \frac{2S}{AB} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$. *Đến đây ta tìm giá trị lớn nhất của h tương tự như trên.*

Câu 4 (3.5 điểm). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC lấy điểm M tùy ý. Đường tròn $(M; MB)$ cắt đoạn thẳng AM tại D.

a) Chứng minh rằng tam giác BDM là tam giác đều.

- ***Phân tích.*** *Dễ thấy tam giác BMD có* $MB = MD$ *nên để chứng minh tam giác BDM đều ta chỉ cần chứng minh được* $\widehat{BMD} = 60^0$.

- **Lời giải.** Tam giác BMD có $MB = MD$, mặt khác ta lại có $\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^0$. Từ đó suy ra tam giác BMD đều.



b) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

- ***Phân tích.*** *Ta đã có* $MB = MD$. *Do đó để chứng minh* $MA = MB + MC$ *ta đi chứng minh* $MC = AD$. *Muốn vậy ta chứng minh hai tam giác ABD và CBM bằng nhau.*

- **Lời giải.** Hai tam giác ABD và CBM có $AB = BC; BD = BM$ và $\widehat{ABD} = 60^0 - \widehat{DBC} = \widehat{BCM}$. Do đó ta được $\Delta ABD = \Delta CBM$, suy ra $AD = CM$.

Từ đó ta được $AM = AD + DM = CM + BM$ hay ta có điều phải chứng minh.

c) Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC thì điểm D luôn nằm trên một đường tròn cố định có tâm thuộc đường tròn (O).

- ***Phân tích.*** *Do tam giác ADM đều nên ta có* $\widehat{BDA} = 120^0$. *Lại thấy* $\widehat{AOB} = 120^0$. *Như vậy tứ giác BDOA nội tiếp đường tròn. Để ý là ba điểm A, O, B cố định nên đường tròn đi qua bốn điểm A, B, O, D cố định. Ta cần* *chỉ ra được tâm I của đường tròn này thuộc đường tròn tâm O là được. Chú ý đến các góc* $\widehat{AOB} = 120^0$ *ta suy ra được I nằm chính giữa cung nhỏ AB của đường tròn tâm O.*

- **Lời giải.** Do tam giác ADM đều nên ta có $\widehat{BDA} = 120^0$. Lại thấy $\widehat{AOB} = 120^0$. Suy ra tứ giác BDOA nội tiếp đường tròn. Do ba điểm A, O, B cố định nên đường tròn đi qua bốn điểm A, B, O, D cố định, suy ra điểm D thuộc một đường tròn cố định. Gọi I là giao điểm của tia phân giác của $\widehat{ACB}$ với đường tròn (O). Khi đó ta có các tam giác đều OIB và OIA nên suy ra $IO = IA = IB$ hay I là tâm đường tròn đi qua các điểm A, O, B, D.

Vậy D thuộc đường tròn cố định có tâm I nằm trên đường tròn (O).

Câu 5 (1.0 điểm). Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2}$$

- ***Phân tích.*** *Để tình được giá trị của biểu thức P ta cần tìm được mối liên hệ của các mẫu thức với giả thiết* $x + y + z = 0$. *Ta có* $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x + y)^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$. *Hoàn toàn tương tự ta được* $P = \frac{1}{-2xy} + \frac{1}{-2yz} + \frac{1}{-2zx} = \frac{x + y + z}{-2xyz} = 0$.

- **Lời giải.** Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x + y)^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -2xy$.

Hoàn toàn tương tự ta được $y^2 + z^2 - x^2 = -2yz; z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$.

Thay vào biểu thức P ta được $P = \frac{1}{-2xy} + \frac{1}{-2yz} + \frac{1}{-2zx} = \frac{x + y + z}{-2xyz} = 0$

- ***Nhận xét.*** *Một số bài toán tương tự câu 5.*

Đề số 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH AN GIANG

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (4.0 điểm).

Cho $x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + 3x^3 - x^5\right)^{2016}$.

Câu 2 (4.0 điểm).

Cho Parabol $y = \dfrac{1}{4}x^2\left(P\right)$ và điểm $A\left(0;1\right)$.

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên Parabol P thì độ dài đoạn thẳng AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$. Biết rằng khoảng cách giữa hai điểm $C\left(x_C; y_C\right), D\left(x_D; y_D\right)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy được tính theo công thức $CD = \sqrt{\left(x_C - x_D\right)^2 + \left(y_C - y_D\right)^2}$.

Câu 3 (4.0 điểm).

Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó c, d là các số nguyên. Biết rằng phương trình có một nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$. Tìm c, d và các nghiệm còn lại của phương trình.

Câu 4 (3.0 điểm).

Tìm x, y biết $\sqrt{2\left(\sqrt{x} + y - 2\right)} = \sqrt{\sqrt{x}.y}$.

Câu 5 (5.0 điểm).

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn $\left(O\right)$ vẽ hai tiếp tuyến MB, MD với đường tròn(B, D là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, C.

a) Chứng minh rằng hai tam giác MAB và MBC đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh rằng $AB.CD = BC.AD$.

c) Gọi d là đường thẳng qua D và song song với MB. Đường thẳng d cắt BA, BC lần lượt tại I và J. Chứng minh rằng $DI = DJ$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho $x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + 3x^3 - x^5\right)^{2016}$.

• ***Phân tích.*** *Để tính được giá trị của biểu thức P trước hết ta cần tính được x. Quan xét biểu thức x ta có hai cách để xử lý.*

+ Cách 1. Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = \left|A\right|$ *để loại bỏ các căn bậc hai*

$$x=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=1$$

+ *Cách 2. Để ý là* $x>0$, *do đó ta có thể sử dụng phép nâng lên lũy thừa để loại bỏ căn bậc hai*

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$

Do $x>0$ *nên ta suy ra được* $x=1$. *Đến đây ta tính được giá trị của biểu thức P.*

- **Lời giải.** Ta có $x=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=1$.

Do đó ta được $P=\left(1+3x^3-x^5\right)^{2016}=\left(1+3.1^3-1^5\right)^{2016}=1$.

Câu 2. Cho Parabol $y=\frac{1}{4}x^2\left(P\right)$ và điểm $A\left(0;1\right)$.

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên Parabol P thì độ dài đoạn thẳng AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-1$.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta dễ dàng vẽ được Parabol* $y=\frac{1}{4}x^2\left(P\right)$ *và đường thẳng* $y=-1$. *Do đó để chứng được độ dài đoạn thẳng AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng* $y=-1$ *thì ta chỉ cần tính được độ dài đoạn AM và khoảng cách từ M đến đường thẳng* $y=-1$. *Chú ý rằng M nằm trên P và đường thẳng* $y=-1$ *song song với trục Ox.*

- **Lời giải.**

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có bảng các giá trị đặc biệt

x	-2	-1	1	2
$y=\frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Từ đó ta vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y=-1$.

b) Gọi tọa độ điểm M là $M\left(x_M;\frac{1}{4}x_M^2\right)$ và N là hình chiếu của M trên đường thẳng $y=-1$, khi đó ta có $N\left(x_M;-1\right)$. Từ đó ta được khoảng từ M đến đường thẳng $y=-1$ là $MN=y_M+1=\frac{1}{4}x_M^2+1$.

Do có $M\left(x_M;\frac{1}{4}x_M^2\right)$ và $A\left(0;1\right)$ nên theo công thức tính khoảng cách trên ta có

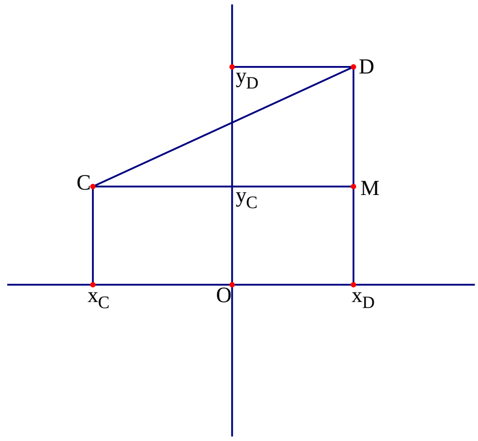
$$AM=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{x_m^2+\left(\frac{1}{4}x_M^2-1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}x_M^4+\frac{1}{2}x_M^2+1}=\frac{1}{4}x_M^2+1$$

Từ đó ta được $AM=MN$ hay độ dài đoạn AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-1$.

• ***Nhận xét.*** *Với hai điểm* $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ *bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta có thể chứng minh công thức* $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$ *theo cách sau.*

Giả sử tọa độ của các điểm C và D được cho như hình vẽ. Khi đó ta có $CM = |x_C - x_D|$ *và* $DM = |y_C - y_D|$. *Do tam giác CDM vuông tại M nên ta có*

$$CD = \sqrt{CM^2 + DM^2} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$$



Câu 3. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó c, d là các số nguyên. Biết rằng phương trình có một nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$. Tìm c, d và các nghiệm còn lại của phương trình.

• ***Phân tích.*** *Phương trình* $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ *có nghiệm* $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ *nên ta được*

$$\left(2 + \sqrt{5}\right)^3 + b\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + c\left(2 + \sqrt{5}\right) + 1 = 0$$

Khai triển và thu gọn ta được $(4b + c + 17)\sqrt{5} + (9b + 2c + 39) = 0$.

Để ý rằng $\sqrt{5}$ *là số vô tỷ và b, c là số nguyên nên để đẳng thức trên xảy ra thì ta cần phải có*

$$\begin{cases} 4b + c + 17 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases}$$

Đến đây ta tìm được các hệ số b, c và giải được phương trình.

• **Lời giải.** Do $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ nên ta được

$$\begin{aligned} & \left(2 + \sqrt{5}\right)^3 + b\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + c\left(2 + \sqrt{5}\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} + b\left(4 + 4\sqrt{5} + 5\right) + c\left(2 + \sqrt{5}\right) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (4b + c + 17)\sqrt{5} + (9b + 2c + 39) = 0 \end{aligned}$$

Do $\sqrt{5}$ là số vô tỷ và b, c là số nguyên nên để đẳng thức trên xảy ra thì ta cần phải có

$$\begin{cases} 4b + c + 17 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 2c + 34 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 1) = 0$.

Giải các trường hợp trên ta được tập nghiệm là $S = \left\{2 - \sqrt{5}; 1; 2 + \sqrt{5}\right\}$.

Câu 4. Tìm x, y biết $\sqrt{2\left(\sqrt{x} + y - 2\right)} = \sqrt{\sqrt{x}.y}$.

• ***Phân tích.*** *Đẳng thức được cho trong bài toán có dạng phương trình hai ẩn, do đó để xử lý nó ta thường sử dụng các phương pháp đặc biệt như phân tích thành các bình phương, phân tích thành tích hay là đánh giá. Để đơn giản hóa phương trình ta thực hiện bình phương hai vế. Khi đó phương trình trên được viết lại thành*

$2\left(\sqrt{x}+y-2\right)=y\sqrt{x}$ *hay* $2\sqrt{x}+2y-4-y\sqrt{x}=0$. *Để ý phương trình ta thấy phương trình phân tích được thành tích* $\left(y-2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)=0$. *Đến đây ta giải được bài toán.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 0; y\ge 0; \sqrt{x}+y-2\ge 0$.

Bình phương hai vế phương trình ta được

$$2\left(\sqrt{x}+y-2\right)=y\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2y-4-y\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x}-4\right)-\left(y\sqrt{x}-2y\right)\Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

+ Khi $y=2$ thay vào phương trình ta được $\sqrt{2\sqrt{x}}=\sqrt{2\sqrt{x}}$, đúng với mọi $x\ge 0$.

+ Khi $x=4$ thay vào phương trình ta được $\sqrt{2y}=\sqrt{2y}$, đúng với mọi $y\ge 0$.

Vậy các cặp số thỏa mãn bài toán là $x=4; y\ge 0$ và $y=2; x\ge 0$.

Câu 5. Từ một điểmM nằm ngoài đường tròn $\left(O\right)$ vẽ hai tiếp tuyến MB, MD với đường tròn(B, D là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, C.

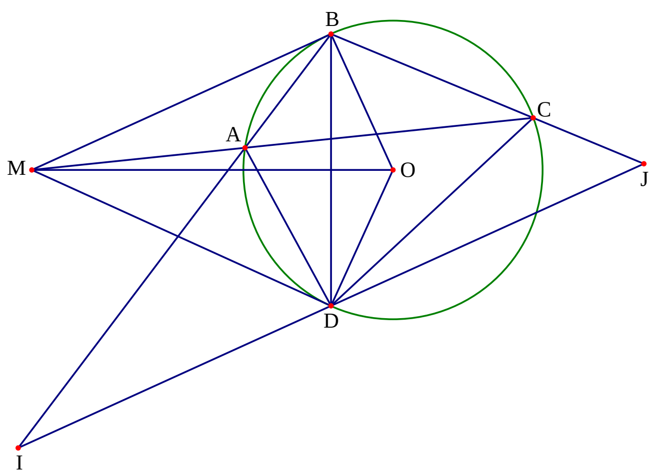
a) Chứng minh rằng hai tam giác MAB và MBC đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh rằng $AB.CD=BC.AD$.

c) Gọi d là đường thẳng qua D và song song với MB. Đường thẳng d cắt BA, BC lần lượt tại I và J. Chứng minh rằng $DI=DJ$.

• **Phân tích.**

+ *Để chứng minh hai tam giác MAB và MBC ta cần chỉ ra được* $\widehat{MBA}=\widehat{MCB}$, *điều này dễ dàng khẳng định được do chúng cùng chắn cung nhỏ AB của đường tròn* $\left(O\right)$.



+ *Theo ý thứ nhất thì ta có* $\frac{AB}{BC}=\frac{MB}{MC}$. *Như vậy để chứng minh được* $AB.CD=AD.BC$ *thì ta cần chỉ ra được* $\frac{AD}{DC}=\frac{MD}{MC}$, *điều này đồng nghĩa với việc chứng minh hai ta giác MAD và MDC đồng dạng.*

+ *Giả thiết cho biết IJ song song với MB, lại theo các ý trên ta thấy được các tam giác đồng dạng. Do đó để chứng minh được* $DI=DJ$ *ta đi lập các tỉ lệ thức liên quan đến DI và DJ rồi chỉ ra các tỉ số đó bằng nhau. Đầu tiên ta thấy hai tam giác IBD và DBA đồng dạng nên ta có* $\frac{BD}{AB}=\frac{ID}{AD}$ *hay* $\frac{AD}{AB}=\frac{ID}{BC}$. *Lại thấy hai tam giác JBD và DBC đồng dạng nên ta có* $\frac{BD}{BC}=\frac{JD}{CD}\Rightarrow\frac{CD}{BC}=\frac{JD}{BD}$. *Như vậy ta cần chỉ ra được* $\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{BC}$. *Tuy nhiên điều này ta có thể suy ra được từ ý thứ nhất. Vậy xem như bài toán được chứng minh.*

• **Lời giải.**

a) Xét hai tam giác MAB và MBC có góc $\widehat{BMA}$ chung và $\widehat{MBA} = \widehat{MCB}$

Do đó ta được $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$.

b) Từ $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$ ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{MB}{MC}$.

Xét hai tam giác MAD và MDC có $\widehat{AMD}$ chung và $\widehat{MDA} = \widehat{ACD}$ nên $\Delta MAD \backsim \Delta MDC$

Do đó ta được $\frac{AD}{DC} = \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MC}$. Từ đó ta được $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ hay $AB.CD = BC.AD$

c) Do IJ song song với AM nên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{MBA} = \widehat{AID}$ và $\widehat{ABD} = \widehat{BDJ}$.

Xét hai tam giác IBD và DBA có $\widehat{ABD}$ chung và $\widehat{AID} = \widehat{ADB}$ nên $\Delta IBD \backsim \Delta DBA$.

Từ đó suy ra $\frac{BD}{AB} = \frac{ID}{AD}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{ID}{BC}$.

Xét hai tam giác JBD và DBC có $\widehat{DBC}$ chung và $\widehat{ABD} = \widehat{BDJ}$ nên $\Delta JBD \backsim \Delta DBC$.

Từ đó ta lại có $\frac{BD}{BC} = \frac{JD}{CD} \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{JD}{BD}$.

Mà ta đã có $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$ nên ta có $\frac{ID}{BD} = \frac{JD}{BD}$. Từ đó suy ra $DI = DJ$.

Đề số 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (2.0 điểm).

Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab = a - b$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

Câu 2 (3.0 điểm).

Giải phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$.

Câu 3 (3.0 điểm).

Cho $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm các số a và b.

Câu 4 (4.0 điểm).

a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x + y \neq 0$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$.

b) Trong một hình vuông có cạnh bằng 1 lấy năm điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5 (5.0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua A và tiếp xúc với BC tại D, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt đường tròn (O) tại điểm E khác A. Tia ED cắt đường tròn (O) tại F khác E.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$.

Câu 6 (3.0 điểm).

Chiều ngày 13 tháng 3, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa cho biết đã kết thúc đợt xả nước đẩy mặn xuống sông Sài Gòn. Đây là lần xả nước thứ 5 từ đầu năm, giúp người dân Sài Gòn đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp.

Đợt xả nước công suất $30\left(m^3/s\right)$ kéo dài trong 3 ngày, mặn đã được đẩy ra các cửa sông. Theo đơn vị này, sau đợt xả, mực nước trong hồ cao khoảng 20m, trữ lượng nước gần 850 triệu m^3.

Tuy giúp các nhà máy nước hạ lưu hoạt động được nhưng nhiều chuyên gia bày tỏ lo lắng bởi trữ lượng tại các hồ đầu nguồn thấp trong khi dự báo đợt hạn mặn có thể kéo dài đến tháng 5. Hiện các hồ phải căn kéo trong việc xả nước đẩy mặn để phục vụ cho nông nghiệp và hoạt động sản xuất nước.

Về nguyên nhân xâm nhập mặn, ông Phạm Thế Vinh – Viện Khoa học Thủy lợi miền Nam – cho rằng, hạn mặn diễn ra mạnh vì El Nino kéo dài khiến khu vực Nam bộ rất ít mưa. Ngoài ra, việc triều cường kéo dài đến tháng 2; 3 khiến nước mặn đi sâu vào các cửa sông. Ông Bùi Thanh Giang – Phó tổng giám đốc Công ty cấp nước Sài Gòn (Sawaco) – cho biết, năm nay trữ lượng nước về các hồ đầu nguồn giảm mạnh. Trong đó, lượng nước tích trữ của hệ thống hồ Dầu Tiếng – Phước Hòa trên thượng nguồn sông Sài Gòn còn hiện tại chỉ đạt 70%. Lưu lượng của hồ Trị An trên sông Đồng Nai chỉ đạt khoảng 80% so với trung bình hàng năm. Về giải pháp lâu dài, Sawaco kiến nghị UBND TP.HCM cho phép xây dựng hồ trữ nước thô cho nguồn nước sông Sài Gòn với vốn thực hiện từ ngân sách. Ngoài ra, đơn vị cũng đề xuất nâng cao công nghệ xử lý nước nhưng việc này đòi hỏi chi phí đầu tư, vận hành cao.(Nguồn vnexpress.net)

a) Hãy cho biết lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả trong 3 ngày qua?

b) Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước hiện có để ngăn mặn (với tốc độ xả như trên) thì công việc này sẽ mất bao nhiêu ngày.

c) Giả sử việc xả nước chống mặn diễn ra liên tục từ hôm nay (22/3) đến hết ngày 15/5, tính lượng nước mà hồ đã xả trong khoảng thời gian này.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab = a - b$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

• **Lời giải.** Từ giả thiết $ab = a - b$ ta được $(ab)^2 = (a-b)^2$. Ta có

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

Câu 2. Giải phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$.

• ***Phân tích.*** *Để ý rằng* $(5x-1) - (x+2) = 4x - 3$. *Do đó ta viết phương trình đã cho lại thành*

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{(5x-1) - (x+2)}{5}$$

Đến đây ta có thể sử dụng phép phân tích thành nhân tử hoặc phép đặt ẩn phụ để đưa phương trình về dạng tích. Để đơn giản hóa ta sử dụng ẩn phụ $a = \sqrt{5x-1}; b = \sqrt{x+2}$, *khi đó phương trình trên được viết lại thành* $a - b = \frac{a^2 - b^2}{5} \Leftrightarrow (a-b)(a+b-5) = 0$. *Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{5}$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{5x-1} \\ b = \sqrt{x+2} \end{cases} (a \ge 0; b \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 5x - 1 \\ b^2 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4x - 3$.

Ki đó phương trình đã cho trở thành $a - b = \frac{a^2 - b^2}{5} \Leftrightarrow (a-b)(a+b-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 5 \end{array}\right.$.

+ Với $a = b$ ta được $\sqrt{5x-1} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 1 \ge 0 \\ 5x - 1 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

+ Với $a + b = 5$ ta được $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} = 5$. Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$\sqrt{(5x-1)(x+2)} = 12 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 3x \ge 0 \\ (5x-1)(x+2) = (12-3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ 4x^2 - 81x + 146 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ (x-2)(4x-73) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{4}; 2\right\}$.

Câu 3. Cho $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm các số a và b.

• ***Phân tích.*** *Bài toán cho biết các nghiệm của phương trình bậc hai nên ta nghĩ đến áp dụng định lý Vi – et để xử lý bài toán. Trước hết ta có các hệ thức ứng với các phương trình là* $x_1 + x_2 = -a; x_1.x_2 = b$ *và* $\left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - a^2; \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) = b^2 - \frac{1}{2}$. *Như vậy để tìm được các số a và b thì ta cần tìm được mối liên hệ giữa các hệ thức trên. Để đơn giản trong biến đổi ta có thể sử dụng phép đổi biến* $X_1 = x_1^2 - \frac{1}{2}$ *và* $X_2 = x_2^2 - \frac{1}{2}$. *Khi đó ta có biến đổi sau*

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} \\ X_1.X_2 = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 1 \\ X_1.X_2 = (x_1x_2)^2 - \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x\right] + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = (-a)^2 - 2b - 1 \\ X_1.X_2 = (b)^2 - \frac{1}{2}\left[(-a)^2 - 2b\right] + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = a^2 - 2b - 1 \\ X_1.X_2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với hệ thức Vi – et $X_1 + X_2 = \frac{1}{2} - a^2; X_1X_2 = b^2 - \frac{1}{2}$ *ta có hệ* $\begin{cases} a^2 - 2b - 1 = \frac{1}{2} - a^2 \\ b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$.

Từ hệ phương trình trên ta giải được bài toán.

• **Lời giải.** Vì $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nên theo định lý Vi – et ta có các hệ thức $x_1 + x_2 = -a; x_1.x_2 = b$. Đặt $X_1 = x_1^2 - \frac{1}{2}$ và $X_2 = x_2^2 - \frac{1}{2}$. Từ đó ta được

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} \\ X_1.X_2 = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2^2 - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 - 1 \\ X_1.X_2 = \left(x_1x_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x\right] + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = \left(-a\right)^2 - 2b - 1 \\ X_1.X_2 = \left(b\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(-a\right)^2 - 2b\right] + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = a^2 - 2b - 1 \\ X_1.X_2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Mà theo bài ra thì $X_1; X_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Nên theo định lý Vi – ét ta có $X_1 + X_2 = \frac{1}{2} - a^2; X_1.X_2 = b^2 - \frac{1}{2}$. Kết hợp hai kết quả ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - 2b - 1 = \frac{1}{2} - a^2 \\ b^2 - \frac{1}{2}a^2 + b + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4b = 3 \\ -2a^2 + 4b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 0 \\ -2a^2 + 4b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy cặp số cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(a; b\right) = \left(0; -\frac{3}{4}\right)$.

Câu 4 (4.0 điểm).

a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x + y \neq 0$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 2$.

- **Lời giải.**

+ Cách 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương ta có

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \left(x + y\right)^2 - 2xy + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + y\right)^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 - 2\left(1 + xy\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + y\right)^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 - 2.\frac{1 + xy}{x + y}\left(x + y\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + y - \frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\left(x + y\right)^2 = 1 + xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy = 1$.

+ Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta được

$$\left(x + y\right)^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 2\sqrt{\left(x + y\right)^2.\left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2} = 2\left|1 + xy\right| \geq 2\left(1 + xy\right)$$

Từ đó ta được $x^2 + y^2 + 2xy + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 2 + 2xy$ hay $x^2 + y^2 + \left(\frac{1 + xy}{x + y}\right)^2 \geq 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Trong một hình vuông có cạnh bằng 1 lấy năm điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• **Phân tích và lời giải.** Đây là bài toán hình học tổ hợp áp dụng nguyên lý Dirichlet. Chú ý bài toán cho 5 điểm bất kỳ và yêu cầu chứng minh tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta sẽ chia hình vuông thành bốn phần sao cho khoảng cách xa nhất của hai điểm trong một phần không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bài toán cho hình vuông có cạnh bằng 1, như vậy khi chia hình vuông thành bốn ô vuông cạnh $\frac{1}{2}$ thì độ dài đường chéo là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Điều này có nghĩa là ta tìm được lời giải cho bài toán.

Chia hình vuông có cạnh bằng 1 thành bốn hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{2}$, khi đó đường chéo mỗi hình vuông đó là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì có 5 điểm bất kỳ nên theo nguyên lý Dirichlet thì luôn tồn tại hai điểm cùng nằm trong một hình vuông cạnh $\frac{1}{2}$. Do đó khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy bài toán được chứng minh.

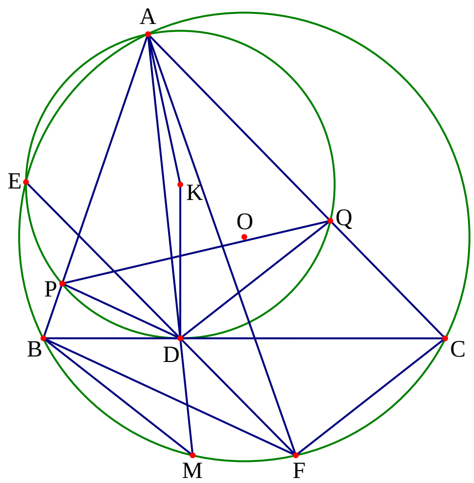
Câu 5. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua A và tiếp xúc với BC tại D, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt đường tròn (O) tại điểm E khác A. Tia ED cắt đường tròn (O) tại F khác E.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$.

• ***Phân tích.***

+ Quan sát hình vẽ kết hợp với giả thiết của bài toán ta thấy $\widehat{QDC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{FAB} = \widehat{BCF}$, do đó để chứng minh được $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$ thì ta cần chỉ ra $\widehat{BCF} = \widehat{QDC}$, điều này đồng nghĩa với chứng minh hai đường thẳng QD và FC song song. Muốn vậy ta cần phải chứng minh được $\widehat{EFC} = \widehat{EDQ}$. Tuy nhiên điều này lại có được do hai tứ giác EACF và EAQD nội tiếp đường tròn.



+ Quan sát hình vẽ và để ý đến các giả thiết ta nhận thấy $\Delta PQD \backsim \Delta CBF$, do đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD}{CF}$.

Từ đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD.DQ}{CF.DQ}$. Như vậy để chứng minh $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$ thì ta cần chứng minh được $BD.DC = CF.QD$. Gọi M là giao điểm khác A của AD với đường tròn (O). Khi đó ta dễ dàng chứng minh *được* $\Delta DBM \backsim \Delta QDC$ *nên suy ra* $\frac{BD}{DQ} = \frac{BM}{CD}$ *hay* $BD.DC = BM.QD$. *Như vậy phép chứng minh sẽ kết thúc khi ta chỉ ra được* $CF = BM$.

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$ *nên ta được* $\widehat{CAF} + \widehat{MAF} = \widehat{BAM} + \widehat{MAF}$ *nên* $\widehat{CAF} = \widehat{BAM}$.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BM}$ *nên* $CF = BM$. *Vậy bài toán được chứng minh.*

- **Lời giải.**

a) Do tứ giác EACF nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{EAC} + \widehat{EFC} = 180^0$. Lại có tứ giác EAQD nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{EAC} + \widehat{EDQ} = 180^0$. Từ đó ta được $\widehat{EFC} = \widehat{EDQ}$, suy ra DQ và FC song song với nhau. Do đó ta lại có $\widehat{BCF} = \widehat{QDC}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{QDC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{FAB} = \widehat{BCF}$. Do đó ta được $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$.

b) Gọi M là giao điểm khác A của AD với đường tròn (O).

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$ nên ta được $\widehat{CAF} + \widehat{MAF} = \widehat{BAM} + \widehat{MAF}$ nên $\widehat{CAF} = \widehat{BAM}$.

Từ đó ta được $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BM}$ nên $CF = BM$.

Xét hai tam giác PQD và CBF có $\widehat{QDP} = \widehat{BFC}$ (cùng bù với góc $\widehat{BAC}$) và $\widehat{QPD} = \widehat{BCF} = \widehat{QDC}$ nên suy ra $\Delta PQD \backsim \Delta CBF$, do đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD}{CF}$. Từ đó ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD.DQ}{CF.DQ}$.

Xét hai tam giác BDM và QDC có $\widehat{QDB} = \widehat{BFC}$ và $\widehat{DBM} = \widehat{QCD} = \widehat{CAM}$.

Do đó ta có $\Delta DBM \backsim \Delta QDC$ nên suy ra $\frac{BD}{DQ} = \frac{BM}{CD}$ hay $BD.DC = BM.QD$.

Mà $CF = BM$ nên ta được $BD.DC = CF.QD$

Kết hợp với $\frac{PQ}{BC} = \frac{PD.DQ}{CF.DQ}$ ta được $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP.DQ}{DB.DC}$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 6 (3.0 điểm).

- ***Phân tích.*** *Bài toán 6 là bài toán thực tế nên ta sử dụng các phép tính thông thường để thực hiện các yêu cầu của bài toán. Chú ý rằng từ ngày 22 tháng 3 đến 15 tháng 5 có* $10 + 30 + 15 = 55$ *(ngày)*

- **Lời giải.**

a) Thời gian xả nước là $3.24.60.60 = 259200\left(s\right)$

Do đó lượng nước hồ Dầu Tiến xả trong 3 ngày là $30.259200 = 7776000\left(m^3\right)$

b) 20% lượng nước hiện có là $850000000.20\% = 170000000\left(m^3\right)$.

Lượng nước xả ra trong một ngày là $30.24.60.60 = 2592000\left(m^3\right)$

Thời gian hoàn thành công việc này là $170000000 : 2592000 \approx 66$ (ngày)

Vậy thời gian xả là 66 ngày.

c) Từ ngày 22 tháng 3 đến 15 tháng 5 có $10 + 30 + 15 = 55$ (ngày)

Lượng nước mà hồ xả ra trong 55 ngày là $55.2592000 = 142560000\left(m^3\right)$

Đề số 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH PHÚ THỌ

Năm học: 2015 – 2016

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$ với n là số tự nhiên khác 0.

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

b) Tìm các số nguyên x và y thoả mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2$

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 1}$ với $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4}$

b) Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2} + \dfrac{\sqrt{b}}{b+2} + \dfrac{\sqrt{c}}{c+2} = \dfrac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $\quad (3x+1)\sqrt{2x^2 - 1} = 5x^2 + \dfrac{3x}{2} - 3$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Câu 4 (7.0 điểm).

Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O)(M khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và M cắt nhau tại E. Vẽ $MP \perp AB\,(P \in AB)$ và $MQ \perp AE\,(Q \in AE)$.

a) Chứng minh rằng tứ giác AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng PQ, OE, MA đồng quy.

c) Gọi K là giao của EB và MP. Chứng minh rằng K là trung điểm của MP.

d) Đặt $AP = x$, tính MP theo R và x. Tìm vị trí điểm M trên (O) để hình chữ nhật APMQ có diện tích lớn nhất.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho các số thực a, b, c phân biệt từng đôi một. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \ge \frac{9}{2}$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1.

a) Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$ với n là số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

• ***Phân tích.*** *Bài toán cho tổng* $S = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)$, *như vậy để chứng minh được* $4S+1$ *là số chính phương thì ta cần tính được tổng S rồi phân tích* $4S+1$ *thành bình phương của số chính phương.*

Ta thấy S là tổng của dãy số có tính quy luật và chú ý đến tổng $4S+1$ *nên ta sẽ đi tính tổng* $4S$.

Ta có $4S = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + ... + 4.n(n+1)(n+2)$.

Chú ý rằng $2.3.4.4 = 2.3.4.(5-1) = 2.3.4.5 - 1.2.3.4$, *khi đó có thể làm triệt tiêu tích* $1.2.3.4$.

Áp dụng hoàn toàn tương tự thì ta được

$$\begin{aligned} 4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + n(n+1)(n+2)\left[(n+3)-(n-1)\right] \\ &= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Đến đây ta sẽ tính được $4S+1$ *và phân tích tổng thành bình phương của một số tự nhiên.*

• **Lời giải.** Ta có

$$\begin{aligned} 4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + ... + 4.n(n+1)(n+2) \\ &= 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + ... + n(n+1)(n+2)\left[(n+3)-(n-1)\right] \\ &= 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Do đó ta có $4S + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$

$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$$

Dễ thấy $n^2 + 3n + 1$ là một số tự nhiên nên $4S+1$ là số chính phương.

• ***Nhận xét:*** *Để giải được bài toán này ta cần thực hiện đó là tính tổng 4S và phân tích tổng* $4S+1$ *thành bình phương của một số tự nhiên. Tổng S là tổng dãy số có tính quy luật nên ta thường sử dụng phương pháp khử liên tiếp và việc nhân thêm 4 vào hai vế gợi ý cho ta phép tách 4 thành các hiệu như trên.*

b) Tìm các số nguyên x và y thoả mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2$

• ***Phân tích.*** *Đây là bài toán số học về phương trình nghiệm nguyên. Phương trình đã cho có bậc hai đối với một biến nên ta có thể nghĩ đến phương pháp sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hoặc điều kiện* Δ *là số chính phương để phương trình có nghiệm nguyên. Trước hết ta viết lại phương trình thành* $x^2 - 2xy + 2y^2 - y - 2 = 0$. *Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số. Khi đó ta có* $\Delta = 4y^2 - 4(2y^2 - y - 2) = -4y^2 + 4y + 8$.

Để phương trình có nghiệm thì $-4y^2 + 4y + 8 \ge 0 \Leftrightarrow 2 + y - y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (y+1)(2-y) \ge 0$.

Từ đó dẫn đến $-1 \le y \le 2$. *Do y là số nguyên nên ta được* $y \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Đến đây xét từng trường hợp của y ta tìm được x tương ứng.

- **Lời giải.** Phương trình đã cho được viết lại thành $x^2 - 2xy + 2y^2 - y - 2 = 0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số.

Khi đó ta có $\Delta = 4y^2 - 4\left(2y^2 - y - 2\right) = -4y^2 + 4y + 8$.

Để phương trình có nghiệm thì $-4y^2 + 4y + 8 \ge 0 \Leftrightarrow 2 + y - y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(2-y\right) \ge 0$.

Từ đó dẫn đến $-1 \le y \le 2$. Do y là số nguyên nên ta được $y \in \left\{-1;0;1;2\right\}$.

+ Với $y = -1$, phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

+ Với $y = 0$, phương trình trở thành $x^2 - 2 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Với $y = 1$, phương trình trở thành $x^2 + 2x - 1 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Với $y = 2$, phương trình trở thành $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy có 2 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đề bài $\left(1;-1\right);\left(-2;2\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Để ý ta thấy phương trình viết được về dạng*

$$x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 = -y^2 + y + 2 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 = \left(1+y\right)\left(2-y\right)$$

Do $\left(x+y\right)^2 \ge 0$ *nên ta có* $\left(1+y\right)\left(2-y\right) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le y \le 2$. *Suy ra* $y \in \left\{-1;0;1;2\right\}$.

Đến đây ta xét các trường hợp hoàn toàn tương tự như trên.

Câu 2.

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 1}$ với $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4}$.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta thay đổi hình thức của giả thiết thành* $x^2 = 3x - 1$. *Như vậy ta cần biến đổi các lũy thừa của x về* x^2 *để thay bằng* $3x - 1$ *thì bài toán được giải quyết.*

- **Lời giải.** Ta có $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3x - 1$

Khi đó $x^3 = x^2.x = \left(3x-1\right)x = 3x^2 - x = 3\left(3x-1\right) - x = 8x - 3$

$x^4 = x^3.x = \left(8x-3\right)x = 8x^2 - 3x = 8\left(3x-1\right) - 3x = 21x - 8$

$x^5 = x^4.x = \left(21x-8\right)x = 21x^2 - 8x = 21\left(3x-1\right) - 8x = 55x - 21$

Chú ý rằng từ giải thiết của bài toán ta suy ra được $x \ne 0$. Từ đó suy ra

$$P = \frac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11} = \frac{\left(55x-21\right) - 4\left(8x-3\right) - 17x + 9}{\left(21x-8\right) + 3\left(3x-1\right) + 2x + 11} = \frac{6x}{32x} = \frac{3}{16}.$$

- ***Nhận xét.*** *Bài toán không khó nhưng cần biến đổi được giả thiết thành* $x^2 = 3x - 1$ *và biến đổi biểu thức P làm xuất hiện các lũy thừa* x^2 *để thay thế bằng* $3x - 1$

b) Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} = \frac{4}{\sqrt{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}}$$

- ***Phân tích.*** *Giả thiết bài toán cho* $a+b+c=5$ *và* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$*, như vậy bằng cách sử dụng hằng đẳng thức ta thu được* $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$*. Để ý rằng ta có phép biến đổi*

$$a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự thì ta có $b+2=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$ *và* $c+2=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$.

Đến đây ta thay vào một vế của đẳng thức và rút gọn thì thu được vế còn lại.

- **Lời giải .** Từ giải thiết ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3\Leftrightarrow a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)=9\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$$

Do đó $a+2=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$

$$b+2=b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)$$

$$c+2=c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$$

Chú ý rằng $\sqrt{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned}VT&=\frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}+\frac{\sqrt{c}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)}\\&=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}\\&=\frac{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}{\sqrt{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}}=\frac{4}{\sqrt{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}}\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{a+2}+\dfrac{\sqrt{b}}{b+2}+\dfrac{\sqrt{c}}{c+2}=\dfrac{4}{\sqrt{\left(a+2\right)\left(b+2\right)\left(c+2\right)}}$.

- ***Nhận xét.*** *Bài toán có hai điểm cần chú ý đó là cần kết hợp biến đổi khéo léo hai giả thiết để thu được đẳng thức* $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=2$ *và vận dụng để phân tích được* $a+2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$.

Câu 3.

a) Giải phương trình $\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3x}{2}-3$.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta viết lại phương trình thành* $2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$*. Phương trình chỉa chứa một căn thức bậc hai nên ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa phương trình về phương trình bậc hai có* Δ *là số chính phương. Để có được điều này ta viết phương trình về dạng*

$$4\left(2x^2-1\right)-2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}+2x^2+3x-2=0$$

Đặt $\sqrt{2x^2-1}=t\geq 0$ *thì phương trình trở thành* $4t^2-2\left(3x+1\right)t+2x^2+3x-2=0$

Bây giờ ta cần kiểm tra xem phương trình có Δ *có phải là số chính phương không.*

Ta có $\Delta = 4\left(3x+1\right)^2 - 4.4\left(2x^2+3x-2\right) = 4\left(x^2-6x+9\right) = 4\left(x-3\right)^2$ *là số chính phương.*

Đến đây ta giải được phương trình.

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $\left|x\right| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2+3x-6 \Leftrightarrow 4\left(2x^2-1\right) - 2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1} + 2x^2+3x-2 = 0$$

Đặt $\sqrt{2x^2-1} = t \ge 0$, khi đó ta được $4t^2 - 2\left(3x+1\right)t + 2x^2+3x-2 = 0$

Ta có $\Delta = 4\left(3x+1\right)^2 - 4.4\left(2x^2+3x-2\right) = 4\left(x^2-6x+9\right) = 4\left(x-3\right)^2$

Do đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3x+1-x+3}{4} \\ t = \dfrac{3x+1+x-3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x+2}{2} \\ t = \dfrac{2x-1}{2} \end{array}\right.$

- Với $t = \frac{x+2}{2}$ thì ta được

$$\sqrt{2x^2-1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 4\left(2x^2-1\right) = \left(x+2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 7x^2-4x-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{60}}{7}$$

- Với $t = \frac{2x-1}{2}$ thì ta được

$$\sqrt{2x^2-1} = \frac{2x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 4\left(2x^2-1\right) = \left(2x-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 4x^2+4x-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$$

Kết hợp điều kiện $\left|x\right| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ ta được tập nghiệm $S = \left\{\frac{2 \pm \sqrt{60}}{7}; \frac{-1+\sqrt{6}}{2}\right\}$.

- ***Nhận xét.*** *Đây là dạng phương trình vô tỷ đưa được về phương trình tích. Để đơn giản trong phép phân tích ta đặt ẩn phụ không hoàn toàn và đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai có* Δ *chính phương.*

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy+y-5x+2 = 0 \\ x^2+y^2+x+y-4 = 0 \end{cases}$

- ***Phân tích.*** *Hệ phương trình đã cho có hai phương trình có bậc hai nên ta sẽ đi kiểm tra xem phương trình nào có thể phân tích được. Do là các phương trình có bậc hai đối với mỗi ẩn nên ta sẽ kiểm tra xem phương trình nào có biệt thức* Δ *(hoặc* Δ'*) là số chính phương.*

Xét phương trình thứ nhất $2x^2-y^2+xy+y-5x+2 = 0 \Leftrightarrow y^2-\left(x+1\right)y-2x^2+5x-2 = 0$ *là phương trình bậc hai ẩn y và x là tham số.*

Khi đó ta có $\Delta' = \left(x+1\right)^2 - 4\left(-2x^2+5x-2\right) = 9x^2-18x+9 = 9\left(x-1\right)^2$, *như vậy phương trình thứ nhất phân tích được thành tích. Đến đây ta giải được hệ phương trình.*

- **Lời giải.** Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y có x là tham số.

Khi đó ta có $\Delta' = (x+1)^2 - 4(-2x^2 + 5x - 2) = 9x^2 - 18x + 9 = 9(x-1)^2$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x+1-3(x-1)}{2} \\ y = \dfrac{x+1+3(x-1)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x+2 \\ y = 2x-1 \end{array}\right.$

- Với $y = -x + 2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$
- Với $y = 2x - 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$5x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -\dfrac{4}{5}; y = -\dfrac{13}{5} \end{array}\right.$$

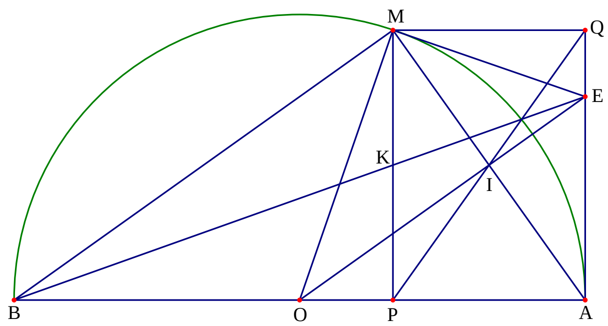
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$ và $\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{13}{5}\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Bản chất của phương trình thứ nhất của hệ trên là phương trình phân tích được thành tích. Khi phương trình có hai nghiệm* $y = -x + 2$ *và* $y = 2x - 1$ *có nghĩa là phương trình viết được về dạng tích* $(y + x - 2)(y - 2x + 1) = 0$. *Do là phương trình thứ nhất có bậc hai đối với mỗi ẩn nên ta có thể xem một ẩn là tham số và khi đó ta sử dụng điều kiện* Δ *chính phương để phân tích phương trình thành tích. Chú ý rằng khi cả hai phương trình bậc hai đều không phân tích được thì ta có thể nhân một phương trình với* $k \neq 0$ *và sử dụng phương pháp cộng đại số, lúc này ta cần xác định số k để phương trình có thể phân tích được thành tích.*

Câu 4. Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O)(M khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và M cắt nhau tại E. Vẽ $MP \perp AB\,(P \in AB)$ và $MQ \perp AE\,(Q \in AE)$.

a) Chứng minh rằng tứ giác AEMO là tứ giác nội tiếp và APMQ là hình chữ nhật.

Tứ giác AEMO có $\widehat{OAE} = \widehat{OME} = 90^0$ nên tứ giác AEMO nội tiếp. Mặt khác tứ giác APMQ có $\widehat{MPA} = \widehat{PAQ} = \widehat{AQM} = 90^0$ nên tứ giác APMQ là hình chữ nhật.



b) **Phân tích và lời giải.** Nhận thấy I là trung điểm của AM, PQ, mà OE phải đi qua trung điểm của MA, do đó OE đi qua I.

Do APMQ là hình chữ nhật nên hai đường chéo PQ và MA cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Do tiếp tuyến tại A và M cắt nhau tại E, I là trung điểm MA nên O, I, E thẳng hàng.

Vậy PQ, OE, MA đồng qui tại I

c) **Phân tích và lời giải.** Để chứng minh được K là trung điểm của MP ta đi chứng minh $MP = 2KP$. Chú ý đến O là trung điểm của AB và I là trung điểm của MA(hoặc PQ). Do đó ta có $AB = 2OA$ và

$2IM = 2IA = MA$. Như vậy ta cần chứng minh được $PM.AO = PK.AB$. Đến đây ta trình bày lời giải như sau.

Ta có O là trung điểm AB và I là trung điểm MA nên OI song song với MB do đó $\widehat{MBP} = \widehat{EOA}$. Mà ta lại có $\widehat{MPB} = \widehat{EAO} = 90^0$ nên tam giác MPB đồng dạng với tam giác EAO.

Từ đó suy ra $\dfrac{PB}{AO} = \dfrac{PM}{AE} \Rightarrow PB.AE = PM.AO$

Do PK song song với AE nên theo định li Talet ta có $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PK}{AE} \Rightarrow PB.AE = PK.AB\,(2)$

Từ đó suy ra $PM.AO = PK.AB$ mà do $AB = 2AO$ nên $PM.\ 2AO = 2PK.AB$

Do đó $PM = 2PK$ hay hay K là trung điểm MP.

d) **Phân tích và lời giải.** Vì M là điểm bất kì trên đường tròn (O) nên P có thể thuộc đoạn OA hoặc đoạn OB. Để tính MP ta sử dụng định lý Pitago cho tam giác MPO. Với hình chữ nhật APMQ, ta chú ý đến $S_{APMQ} = AP.MP$, với kết quả MP tìm được và $AP = x$ có $S_{APMQ} = \sqrt{(2R-x)x^3}$. Ta áp dung bất đẳng thức Cauchy tìm giá trị lớn nhất cho biểu thức $\sqrt{(2R-x)x^3}$. Đến đây ta trình bày lời giải như sau.

Trong tam giác vuông MPO ta có $MP^2 = OM^2 - OP^2 = R^2 - (R-x)^2$ khi P thuộc đoạn OA và $MP^2 = OM^2 - OP^2 = R^2 - (x - R)^2$ khi P thuộc đoạn OB.

Khi đó $MP^2 = (2R - x)x$. Suy ra $MP = \sqrt{(2R-x)x}$

Diện tích hình chữ nhật APMQ là $S = AP.MP = \sqrt{(2R-x)x^3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c+d \ge 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} \ge 4\sqrt[4]{abcd}$ với mọi $a,b,c,d > 0$

Hay $abcd \le \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Khi đó $S = \sqrt{(2R-x)x^3} = \sqrt{27(2R-x).\dfrac{x}{3}.\dfrac{x}{3}.\dfrac{x}{3}} \le \sqrt{27.\left(\dfrac{2R-x+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3}}{4}\right)^4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2R - x = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}R$. Suy ra P là trung điểm OB.

Do đó ta xác định được M để diện tích hình chữ nhật APMQ lớn nhất.

- ***Nhận xét.*** *Chú ý rằng với hai vị trí của M ta cần đưa ra hai công thức tính MP, tuy nhiên hai công thức tính MP cho ta cùng một kết quả. Còn khi tìm giá trị lớn nhất của* $\sqrt{(2R-x)x^3}$ *thì ta cần khử hết biến x trong biểu thức và để ý đến dấu bằng xảy ra nên ta có phép tách* $\dfrac{x^3}{27} = \dfrac{x}{3}.\dfrac{x}{3}.\dfrac{x}{3}$

Câu 5. Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{9}{2}$$

• ***Phân tích.*** *Giả thiết của bài toán cho a, b, c là các số thực khác nhau từng đôi một nên dấu bằng không xảy ra tại* $a=b=c$. *Ngoài ra ta cũng không thể sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc do a, b, c chưa dương. Nhẩm một số giá trị đặc biệt ta thấy bất đẳng thức xảy ra dấu bằng tại một trong các trường hợp là* $a=0; b=1; c=-1$. *Ta viết biểu thức vế trái thành*

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}+\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2$$

Khi đó với $a=0; b=1; c=-1$ *thì ta được*

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}=\frac{5}{2}\text{ và }\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2=2$$

Do đó ta đi chứng minh các bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\ge\frac{5}{2}\text{ và }\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$$

+ *Trước hết ta chứng minh* $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\ge\frac{5}{2}$. *Để ý rằng*

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+a)^2+(c-a)^2}{(c-a)^2}\right]$$

Hay ta được $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+a)^2}{(c-a)^2}\right]+\frac{3}{2}$

Như vậy ta cần chứng minh được $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 2$.

Để ý ta có bất đẳng thức quen thuộc là $x^2+y^2+z^2\ge -2\left(xy+yz+zx\right)$ *do đó*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge -2\left(\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}\right)$$

Như vậy ta cần chứng minh được $\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=-1$.

+ *Hoàn toàn tương tự cho bất đẳng thức* $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$.

• **Lời giải.** Ta có $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\left(\frac{b+c}{b-c}+1\right)\left(\frac{c+a}{c-a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)\left(\frac{b+c}{b-c}-1\right)\left(\frac{c+a}{c-a}-1\right)$

Hay ta được $\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}=-1$

Ta có $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \ge -2.\left(\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c}+\frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a}+\frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b}\right)=2$

Do đó suy ra $2\left(\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\right)=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2+3\ge 2+3=5$

Suy ra $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{5}{2}$ (1)

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b-c}.\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}.\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}.\frac{a}{b-c}=-1$

Khi đó $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 0$ hay ta được

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge -2\left(\frac{a}{b-c}.\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}.\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}.\frac{a}{b-c}\right)=2 \quad (2)$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $(a+b+c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=0$.

• ***Nhận xét.*** *Đây là một bài toán bất đẳng thức khó, lại không thể sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá. Để chứng minh được bất đẳng thức trên ta phải thực hiện được các công việc như*

+ Dự đoán điểm rơi để quy bài toán về chứng minh hai bất đẳng thức.

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\ge\frac{5}{2} \text{ và } \left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$$

+ Để chứng minh được bất đẳng thức thứ nhất ta quy về chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\ge 2$$

+ Để chứng minh được bất đẳng thức thứ hai ta quy về chứng minh

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge -2\left(\frac{a}{b-c}.\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}.\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}.\frac{a}{b-c}\right)=2$$

∘ *Một hướng khác để giải quyết bài toán bất đẳng thức.*

Chú ý đến bất đẳng thức $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}\ge\frac{2}{AB}\ge\frac{8}{\left(A+B\right)^2}$ *với hai số A, B cùng dấu. Để ý ta thấy trong ba số* $a-b;b-c;c-a$ *luôn tông tại hai số cùng dấu. Không mất tình tổng quát ta giả sử hai số đó là* $a-b$ *và* $b-c$*. Khi đó áp dụng bất đẳng thức trên ta được*

$$\frac{1}{\left(a-b\right)^2}+\frac{1}{\left(b-c\right)^2}+\frac{1}{\left(c-a\right)^2}\ge\frac{8}{\left(a-b+b-c\right)^2}+\frac{1}{\left(a-c\right)^2}=\frac{9}{\left(a-c\right)^2}$$

Như vậy ta cần chứng minh được $a^2+b^2+c^2\ge\frac{\left(a-c\right)^2}{2}$.

Thật vậy, ta có $a^2+b^2+c^2\ge a^2+c^2=a^2+\left(-c\right)^2\ge\frac{\left(a-c\right)^2}{2}$*. Vậy bài toán được chứng minh.*

Đề số 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH NAM ĐỊNH

Năm học: 2015 – 2016

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

b) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$.

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0 \\ x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0. \end{cases}$.

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+y^2+xy-x-y=1$.

b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$.

Câu 4 (7.0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $AB<AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DIC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q. Đường thẳng đi qua E và song song với AB cắt BD tại P.

a) Chứng minh rằng tam giác QBI cân.

b) Chứng minh rằng $BP.BI=BE.BQ$.

c) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD và K là trung điểm của JE. Chứng minh rằng PK song song với JB.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

• ***Phân tích.*** *Để tính được P ta đi tính* $M = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}; N = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

+ *Để tính M ta để ý đến hằng đẳng thức* $\sqrt{A^2} = |A|$ *để đưa các biểu thức ra khỏi dấu căn. Ngoài ra để ý đến* $\sqrt{5+\sqrt{3}}.\sqrt{5-\sqrt{3}} = \sqrt{22}$ *nên ta có thể sử dụng phép bình phương hai vế.*

+ *Để tính N ta sử dụng đẳng thức* $\sqrt{A^2} = |A|$.

• **Lời giải.** Đặt $M = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}; N = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

Ta có $M = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} \Rightarrow M^2 = \dfrac{10+2\sqrt{22}}{5+\sqrt{22}} = 2$. Do $M > 0$ nên ta có $M = \sqrt{2}$

Mặt khác $N = \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = 3-\sqrt{2}$. Như vậy $P = M + N = 3$.

• ***Nhận xét.*** *Ý thứ nhất của câu 1 là dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn cơ bản. Để làm tốt dạng toán này cần phải nắm vững hằng đẳng thức* $\sqrt{A^2} = |A|$ *và hằng đẳng thức dạng* $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ *để phân tích một biểu thức về bình phương của một tổng, hiệu.*

b) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 18$ và $xyz = -1$. Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{1}{xy+z-1} + \dfrac{1}{yz+x-1} + \dfrac{1}{zx+y-1}$.

• ***Phân tích.*** *Để ý ta thấy* $xy + z - 1 = xy + 2 - x - y - 1 = xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$. *Như vậy tương tự ta có* $S = \dfrac{1}{(x-1)(y-1)} + \dfrac{1}{(y-1)(z-1)} + \dfrac{1}{(z-1)(x-1)} = \dfrac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

Để ý rằng $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy+yz+zx) + (x+y+z) - 1$.

Như vậy ta chỉ cần tính được $xy + yz + zx$ *là được.*

Điều này hoàn toàn đơn giản vì ta có $xy + yz + zx = \dfrac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2}$.

• **Lời giải.** Ta có $xy + z - 1 = xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$

Tương tự ta có $yz + x - 1 = (y-1)(z-1)$ và $zx + y - 1 = (z-1)(x-1)$

Từ đó kết hợp với giải thiết $x + y + z = 2$ ta được

$$S=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$
$$=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Mà ta có lại có $xy+yz+zx=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\dfrac{4-18}{2}=-7$

Do đó ta được $S=-\dfrac{1}{7}$.

• ***Nhận xét.*** *Ý thứ hai của câu 1 thuộc dạng bài toán biến đổi đồng nhất biểu thức đại số. Trong bài toán này ta chú ý đến biến đổi* $xy+z-1=xy+2-x-y-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$, *ngoài ra sử dụng kết hợp hai giả thiết* $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=18$ *thì ta tính được* $xy+yz+zx$.

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0$.

• ***Phân tích.*** *Nhân thấy phương trình đã cho có dạng cơ bản* $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ *nên ta nghĩ đến phép nâng lên lũy thừa. Hơn nữa các biểu thức trong căn đều có dạng nhị thức bậc nhất nên sau hai lần nâng lên lũy thừa ta thu được một phương trình bậc hai.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge\dfrac{1}{2}$

$$2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{5x+11}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+11}$$
$$\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3}=5x+11\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x-3}=3-x$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\2x^2+5x-3=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x^2+11x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-12\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0\\x^2+y-\sqrt{7x^2-3}=0\end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Hệ phương đã cho có hai phương trình đều chứa căn thức bậc hai, do đó ta khai triển các phương trình của hệ phương trình để tìm mối liên hệ giữa các đại lượng. Chú ý đến phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành*

$$y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow y^2-y-\sqrt{x-1}(y-1)=0\Leftrightarrow(y-1)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0$$

Như vậy phương trình thứ nhất viết được thành tích, do đó ta xét các trường hợp và thế vào phương trình thứ hai để tìm nghiệm của hệ.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\ge 1, y\in\mathbb{R}$. Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành

$$y^2-y\left(\sqrt{x-1}+1\right)+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow y^2-y-\sqrt{x-1}(y-1)=0\Leftrightarrow(y-1)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0$$

+ Với $y-1=0\Leftrightarrow y=1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2+1-\sqrt{7x^2-3}=0 \Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{7x^2-3} \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=7x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

+ Với $y-\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{x-1}$, thay vào phương trình thức hai của hệ ta được

$$x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{7x^2-3}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{7x^2-3}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0 \end{array}\right.$$

○ Khi $x=2$ ta được $y=1$.

○ Ta có $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=(x+2)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

Với $x\ge 1$ thì $\sqrt{7x^2-3}\ge 2 \Rightarrow \dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\le 1 \Rightarrow 1-\dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\ge 0$

Suy ra $(x+2)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}>0$

Hay $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}=0$ vô nghiệm.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được các nghiệm của hệ là $(1;1),(2;1)$.

• ***Nhận xét.*** *Việc phát hiện ra phương trình thứ nhất của hệ viết được thành tích không quá khó khăn, tuy nhiên khi thực hiện phép thế vào phương trình thứ hai của hệ thì ta thu được phương trình một ẩn chứa căn là* $x^2+\sqrt{x-1}-\sqrt{7x^2-3}=0$. *Với phương trình này ta thường sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ hoặc phương pháp nhân lương liên hợp. Ở đây ta nhẩm được nghiệm là* $x=2$ *nên có thể sử dụng nhận lương liên hợp, tuy nhiên khó khăn sẽ gặp phải phải ở đây là xử lý phương trình thu được sau lượng liên hợp.*

Kết hợp với điều kiện $x\ge 1$ *ta chứng minh được* $x+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5}>0$.

Ngoài ra để các biểu thức sau khi nhân lượng liên hợp cùng dấu ta có thể thay thế phép nhóm liên hợp kiểu $\left(\sqrt{7x^2-3}-5\right)$ *bằng nhóm liên hợp kiểu* $\sqrt{7x^2-3}\left(5-\sqrt{7x^2-3}\right)$. *Kỹ thuật nhân liên hợp kiểu này ta gọi là kỹ thuật truy ngược dấu.*

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2+y^2+xy-x-y=1$.

• ***Phân tích.*** *Quan sát phương trình ta nghĩ đến phân tích phương trình thành tổng các bình phương. Muốn vậy ta cần nhân hai vế của phương trình với một số chẵn để làm xuất hiện đại lượng dạng* $2ab$ *trong các bình phương của tổng hặc của hiệu. Ta có*

$$2\left(x^2+y^2+xy-x-y\right)=2 \Leftrightarrow \left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=4$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4=2^2+0+0$$

Đến đây ta xét các trường hợp để tìm nghiệm cho phương trình.

- **Lời giải.** Ta có $x^2+y^2+xy-x-y=1 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2+\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$. Ta có bảng giá trị tương ứng(cũng có thể xét từng trường hợp)

$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $\left(x;y\right)$
2	0	0	$\left(1;1\right)$
-2	0	0	Loại
0	2	0	Loại
0	-2	0	$\left(-1;1\right)$
0	0	2	Loại
0	0	-2	$\left(-1;1\right)$

Vậy các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ cần tìm là $\left(1;1\right),\left(-1;1\right),\left(1;-1\right)$.

- ***Nhận xét.*** *Để ý rằng phương trình trên có bậc hai đối với mỗi ẩn nân ta có thể xem phương trình có ẩn và y đóng vai trò tham số. Khi đó ta kiểm tra điều kiện* Δ *là số chính phương hoặc* $\Delta \ge 0$.

Ta viết lại phương trình thành $x^2+\left(y-1\right)x+y^2-y-1=0$.

Khi đó ta có $\Delta=\left(y-1\right)^2-4\left(y^2-y-1\right)=-3y^2+2y+5$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0$ *hay* $-3y^2+2y+5 \ge 0 \Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(5-3y\right) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le y \le \frac{5}{3}$

Đến đây xét các giá trị y nguyên và thay vào phương trình để tìm x tương ứng.

b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{\left(n-1\right)\sqrt{n}}}}}<3$.

- ***Phân tích.*** *Để chứng minh được bất đẳng thức số học trên ta sẽ đi chứng minh một bất đẳng thức dạng* $\left(n-1\right)\sqrt{n}<A\left(n\right)$, *trong đó* $A\left(n\right)$ *là biểu thức chứa n và là số chính phương thì càng tốt hoặc đưa số 3 vào trong căn bậc hai rồi phân tích sao cho xuất hiện tích để đưa tiếp thừa số vào trong căn. Trong hai ý tưởng trên thì việc tìm* $A\left(n\right)$ *khá là khó khăn. Do đó ta đi theo hướng thứ hai.*

Ta có $3=\sqrt{9}=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}=...$.

Rõ ràng ta thấy $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}$. *Như vậy ý tưởng này có thể thực hiện được. Vấn đề là ta tìm được công thức tổng quát áp dụng cho các số tự nhiên 3, 4, 5, ..., n. Để ý ta thấy*

$$\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+\left(3-1\right)\left(3+1\right)};\sqrt{1+3.5}=\sqrt{1+\left(4-1\right)\left(4+1\right)};\sqrt{1+4.6}=\sqrt{1+\left(5-1\right)\left(5+1\right)}$$

Như vậy ta dự đoán $k=\sqrt{k^2}=\sqrt{1+\left(k^2-1\right)}=\sqrt{1+\left(k-1\right)\left(k+1\right)}$. *Đến đây ta có thể giải được bài toán.*

• **Lời giải.** Với mỗi số nguyên dương k ta có $k=\sqrt{k^2}=\sqrt{1+\left(k^2-1\right)}=\sqrt{1+\left(k-1\right)\left(k+1\right)}$.

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k=3,4,\ldots,n$ ta được

$$3=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}}=\cdots$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\left(n-1\right)\left(n+1\right)}}}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\left(n-1\right)\sqrt{\left(n+1\right)^2}}}}}>\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{\left(n-1\right)\sqrt{n}}}}}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

• ***Nhận xét.*** *Có thể nói đây là bài toán số học khó, để tìm ra công thức* $k=\sqrt{1+\left(k-1\right)\left(k+1\right)}$ *ta đi phân tích một vài trường hợp cụ thể rồi suy ra trường hợp tổng quát.*

Để xác định $A\left(n\right)$ *cho bất đẳng thức* $\left(n-1\right)\sqrt{n}<A\left(n\right)$ *ta có thể làm như sau*

$$\left(n-1\right)\sqrt{n}<\left(n-1\right)\sqrt{n+1}<\left(n-1\right)\sqrt{\left(n+1\right)^2}=\left(n-1\right)\left(n+1\right)=n^2-1$$

Đến đây ta lại có $n^2-1<n^2$. *Như vậy ta có thể áp dụng để giải bìa toán trên theo cách khác như sau*

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{\left(n-1\right)\sqrt{n}}}}}<\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{\left(n-1\right)\sqrt{n+1}}}}}<\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}}}}$$
$$=\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n^2-1}}}}<\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n^2}}}}=\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{\left(n-2\right)n}}}}<\ldots<\sqrt{2.\sqrt{3.5}}<3$$

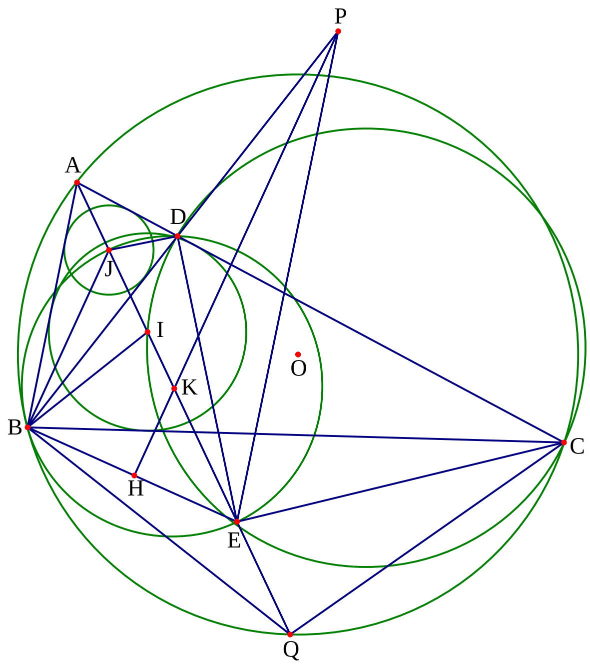
Câu 4 (7.0 điểm).

a) Chứng minh tam giác QBI cân.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh tam giác ABI cân tại I ta đi chứng minh* $\widehat{IBQ}=\widehat{BIQ}$.

• **Lời giải.** Ta có AI là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên Q là điểm chính giữa của cung BC của đường tròn (O).

Suy ra $\widehat{BAQ}=\widehat{QAC}=\widehat{QBC}$ do đó ta được $\widehat{IBQ}=\widehat{IBC}+\widehat{QBC}=\widehat{IBA}+\widehat{BAQ}=\widehat{BIQ}$ hay tam giác QBI cân tại Q.



b) Chứng minh $BP.BI=BE.BQ$.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh được hệ thức* $BP.BI=BE.BQ$ *ta đi chứng minh hai tam giác PBE và QBI đồng dạng.*

Để ý rằng ta có $\widehat{BPE}=\widehat{ABD}=\widehat{ACB}=\widehat{BQI}$, *như vậy ta cần chỉ ra được* $\widehat{BIQ}=\widehat{BEP}$. *Mà theo ý thứ nhất ta đã có* $\widehat{BIQ}=\dfrac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$. *Như vậy ta đi chứng minh* $\widehat{BEP}=\dfrac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}}{2}$.

• **Lời giải.** Tam giác ABD đồng dạng tam giác ACB. Suy ra $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}$ hay $AB^2=AD.AC$ (1).

Tam giác ADI đồng dạng tam giác AEC (có góc A chung và $\widehat{AID}=\widehat{ACE}$)

Suy ra $\frac{AD}{AE}=\frac{AI}{AC}$ hay $AI.AE=AD.AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI.AE=AB^2$, suy ra tam giác ABI đồng dạng tam giác AEB.

Suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{ABI}=\frac{\widehat{ABC}}{2}$. Ta có $\widehat{AEP}=\widehat{BAE}=\frac{\widehat{BAC}}{2}$ suy ra $\widehat{BEP}=\frac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}}{2}$.

Theo ý a ta có $\widehat{BIQ}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$, từ đó suy ra $\widehat{BIQ}=\widehat{BEP}$.

Do đó ta được $\widehat{BPE}=\widehat{ABD}=\widehat{ACB}=\widehat{BQI}$. Nên hai tam giác PBE và QBI đồng dạng với nhau, suy ra $\frac{BP}{BQ}=\frac{BE}{BI}\Leftrightarrow BP.BI=BE.BQ$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD, K là trung điểm của JE. Chứng minh PK//JB.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy HK là đường trung bình của tam giác EBJ. Do để chứng minh được PK//BJ ta đi chứng minh P, H, K thẳng hàng. Muốn vậy ta đi chứng minh BJ vuông góc với BE.*

• **Lời giải.** Tam giác BQI đồng dạng tam giác BPE và tam giác BQI cân tại Q nên tam giác PBE cân tại P, suy ra $\widehat{PBE}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$ và $PH\perp BE$ với H là trung điểm của BE.

Do HK là đường trung bình của tam giác EBJ nên HK//BJ

Ta có $\widehat{JBD}=\frac{\widehat{ACB}}{2}$ và $\widehat{DBE}=\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$, suy ra $\widehat{JBE}=90^0$ hay JB vuông góc BE.

Suy ra PH//JB do đó P, H, K thẳng hàng hay PK//JB.

Câu 5 (2.0 điểm). Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

• ***Phân tích.*** *Từ giả thiết và yêu cầu chứng minh của bài toán ta dự đoán rằng chỉ có bốn câu lạc bộ mà các học sinh tham gia vì theo nguyên lí Dirichlet thì với 35 học sinh sẽ có một câu lạc bộ có ít nhất* $\left[\frac{35}{4}\right]+1=9$ *học sinh tham gia. Như vậy ta chỉ cần chứng minh số câu lạc bộ là 4.*

• **Lời giải.** Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh.

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh.

+ Nếu $N>4$ khi đó từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.

+ Nếu $N<4$ khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8=24$, nghĩa là còn ít nhất $35-24=11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $N = 4$. Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8 = 32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia.

Đề số 11

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH QUẢNG BÌNH

Năm học 2015 – 2016

Câu 1. (2.0 điểm).

Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-1}$ với $0 < x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. (3.0 điểm).

a) Cho phương trình $2x^2+2mx+m^2-2=0$ (tham số m). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|2x_1x_2+x_1+x_2-4\right| = 6$.

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-2x^2y+x = y^3-2xy^2+y \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = y^2-6x+11 \end{cases}$

Câu 3 (2.5 điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), AI cắt đường tròn (O) tại M (khác A), J là điểm đối xứng với I qua M. Gọi N là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{ABM}$, NI và NJ lần lượt cắt đường tròn (O) tại E và F.

a) Chứng minh $MI = MB$. Từ đó suy ra ΔBIJ và ΔCIJ là các tam giác vuông.

b) Chứng minh bốn điểm I, J, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (1.5 điểm).

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{1}{a+b^2} + \dfrac{1}{b+a^2}$.

Câu 5 (1.0 điểm).

Tìm tất cả các số nguyên dương m và n thỏa mãn điều kiện:

$$n^2+n+1 = \left(m^2+m-3\right)\left(m^2-m+5\right)$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. (2.0 điểm). Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-1}$ với $0 < x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $0 < x \neq 1$ ta có $\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x+\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = x-\sqrt{x}$

Lại có $\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+1$ và $\dfrac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1} = 2\left(\sqrt{x}+1\right)$

Từ đó ta được $P = x - \sqrt{x} - \left(2\sqrt{x} + 1\right) + 2\left(\sqrt{x} + 1\right) = x - \sqrt{x} + 1$

Vậy $P = x - \sqrt{x} + 1$ khi $0 < x \neq 1$

b) Tìm x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Với $0 < x \neq 1$ ta có $P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$(thỏa mãn).

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$.

Câu 2. (3.0 điểm).

a) Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$ (tham số m). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4\right| = 6$.

• **Lời giải.** Ta có $\Delta' = m^2 - 2\left(m^2 - 2\right) = 4 - m^2$

Phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

Theo định lý Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = \dfrac{m^2 - 2}{2} \end{cases}$

Mà theo bài ra ta lại có $\left|2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4\right| = 6 \Leftrightarrow \left|2.\dfrac{m^2 - 2}{2} - m - 4\right| = 6$

Hay ta được $\left|m^2 - m - 6\right| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - m - 6 = 6 \\ m^2 - m - 6 = -6 \end{array}\right.$

+ Với $m^2 - m - 6 = 6 \Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -3 \end{array}\right.$

+ Với $m^2 - m - 6 = -6 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm của phương trình ta được $m = 0; m = 1$ là các giá trị cần tìm.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2x^2y + x = y^3 - 2xy^2 + y \\ \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = y^2 - 6x + 11 \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Quan sát phương trình thứ nhất ta nhận thấy phương trình luôn đúng với mọi* $x = y$*, điều này có nghĩa là khi phân tích phương trình thành tích thì có chứa nhân tử* $x - y$*. Do đó ta biến đổi phương trình thứ nhất về dạng* $\left(x - y\right)\left(x^2 - xy + y^2 + 1\right) = 0$*. Khi thế vào phương trình thứ hai của hệ ta thu được phương trình* $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11$*. Nhẩm một số giá trị đặc biệt ta thấy* $x = 3$ *là một nghiệm nên ta có thể sử dụng phép nhân lương liên hợp.*

Ngoài ra để ý ta thấy $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$ *và theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có*

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{(x-2).1} + \sqrt{(4-x).1} \le \frac{x-2+1}{2} + \frac{4-x+1}{2} = 2$$

Điều đó có nghĩa là $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2 \le x^2 - 6x + 11$. *Đến đây ta có thể giải được phương trình theo phương pháp đánh giá.*

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$\begin{aligned} & x^3 - 2x^2y + x = y^3 - 2xy^2 + y \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x - y^3 + 2xy^2 - y = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3 - y^3) - 2xy(x-y) + (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left[(x^2 + xy + y^2) - 2xy + 1\right] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y)(x^2 - xy + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Do $x^2 - xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x, y là số thực.

Thay $x = y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Nhận thấy $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$ với $2 \le x \le 4$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Lại theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{(x-2).1} + \sqrt{(4-x).1} \le \frac{x-2+1}{2} + \frac{4-x+1}{2} = 2$$

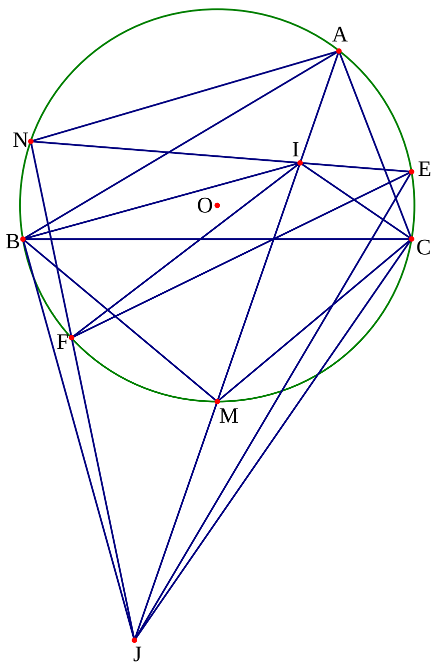
Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Như vậy $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ x^2 - 6x + 11 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Do $x = 3$ nên ta được $y = 3$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; 3)$.

Câu 3 (2.5 điểm).

a) Chứng minh $MI = MB$. Từ đó suy ra ΔBIJ và ΔCIJ là các tam giác vuông.



• ***Phân tích.*** *Để chứng minh* $MI = MB$ *ta đi chứng minh tam giác MIB cân tại M. Muốn vậy ta cần chỉ ra được* $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$.

Dễ thấy $\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$ *và theo tích chất góc ngoài ta lại có* $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$.

Do đó ta suy ra được $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$. *Lại thấy trong tam giác BIJ ta có* $MB = MI = \frac{1}{2}IJ$ *nên tam giác BIJ vuông tại B. Hoàn toàn tương tự ta cũng có tam giác CIJ là các tam giác vuông tại B và C.*

• **Lời giải.** Do AM là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên ta có $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \frac{\widehat{A}}{2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$

Mặt khác theo tính chất góc ngoài của tam giác ta lại có $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$

Từ đó ta được $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$ nên tam giác MBI cân tại M, do đó suy ra $MI = MB$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $MI = MC$. Xét tam giác BIJ ta có $MB = MI = \frac{1}{2}IJ$ nên tam giác BIJ vuông tại B. Tương tự ta có tam giác CIJ vuông tại C. Vậy các tam giác BIJ và CIJ là các tam giác vuông tại B và C.

b) Chứng minh bốn điểm I, J, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh I, J, E, F nằm trên một đường tròn ta đi chứng minh* $\widehat{EFJ} = \widehat{EIJ}$. *Để ý rằng* $\widehat{NFE} = \widehat{AIE}$ *Mặt khác Mặt khác* $\widehat{NFE} + \widehat{EFJ} = 180^0$ *và* $\widehat{AIE} + \widehat{EIJ} = 180^0$. *Từ đó ta có điều phải chứng minh.*

• **Lời giải.** Ta có $\widehat{NFE} = \frac{1}{2}\left(sd\overparen{NA} + sd\overparen{AE}\right)$ và $\widehat{AIE} = \frac{1}{2}\left(sd\overparen{NM} + sd\overparen{AE}\right)$

Mà $sd\overparen{NA} = sd\overparen{NA}$ nên $\widehat{NFE} = \widehat{AIE}$

Mặt khác $\widehat{NFE} + \widehat{EFJ} = 180^0$ và $\widehat{AIE} + \widehat{EIJ} = 180^0$ nên ta được $\widehat{EFJ} = \widehat{EIJ}$.

Hơn nữa I và F nằm về cùng một phía so với JE. Vậy bốn điểm I, J, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4 (1.5 điểm). Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b \ge 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = \frac{1}{a + b^2} + \frac{1}{b + a^2}$.

• ***Phân tích.*** *Để ý đến mẫu thức các phân thức và giả thiết của bài toán ta nghĩ đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki* $(a + b)^2 \le (a + b^2)(a + 1)$.

Như vậy ta có đánh giá $\frac{1}{a+b^2} \le \frac{a+1}{(a+b)^2}$. *Dự đoán rằng* $M \le 1$ *tại* $a = b = 1$ *nên ta đi chứng minh bất đẳng thức* $M = \frac{1}{a+b^2} + \frac{1}{b+a^2} \le \frac{a+b+2}{(a+b)^2} \le 1$ *với* $a + b \ge 2$.

- **Lời giải.** Trước hết ta chứng minh với $a > 0$ thì $(a+b)^2 \le (a+b^2)(a+1)$

Thật vậy $(a+b)^2 \le (a+b^2)(a+1) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + a + ab^2 + b^2$

Hay ta được $2ab \le a + ab^2 \Leftrightarrow a(b-1)^2 \ge 0$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Từ $(a+b)^2 \le (a+b^2)(a+1)$ ta được $\frac{1}{a+b^2} \le \frac{a+1}{(a+b)^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b+a^2} \le \frac{b+1}{(b+a)^2}$

Cộng vế theo vế ta được $M = \frac{1}{a+b^2} + \frac{1}{b+a^2} \le \frac{a+b+2}{(a+b)^2}$ (1).

Bây giờ ta đi chứng minh với $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $a + b \ge 2$ thì $\frac{a+b+2}{(a+b)^2} \le 1$ (2)

Thật vậy ta có $\frac{a+b+2}{(a+b)^2} \le 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge (a+b)2 \Leftrightarrow (a+b+1)(a+b-2) \ge 0$

Kết hợp hai bất đẳng thức (1) và (2) ta được $M \le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1, xẩy ra tại $a = b = 1$.

Câu 5 (1.0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương m và n thỏa mãn điều kiện:

$$n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5)$$

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta có* $n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5) = m^4 + m^2 + 8m - 15$. *Trong đẳng thức ta thấy biến n có bậc hai và biến m có bậc bốn. Do đó ta viết đẳng thức thành phương trình bậc hai có ẩn n và m là tham số* $n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0$. *Khi đó để phương trình có nghiệm nguyên thì* $\Delta = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63$ *phải là một số chính phương. Để ý ta phân tích được*

$$\Delta = (2m^2 + 2)^2 - 4(m-4)^2 - 3 \text{ và } \Delta = (2m^2 + 1)^2 + 32(m-2)$$

Do đó khi $m > 2$ *thì* $(2m^2 + 1)^2 < \Delta < (2m^2 + 2)^2$ *nên* Δ *không thể là số chính phương. Như vậy ta đi xét* $m = 1$ *hoặc* $m = 2$ *là giải quyết bài toán.*

- **Lời giải.** Từ điều kiện $n^2 + n + 1 = (m^2 + m - 3)(m^2 - m + 5) = m^4 + m^2 + 8m - 15$

Xét phương trình bậc hai $n^2 + n - (m^4 + m^2 + 8m - 16) = 0$ (1) với n là ẩn số và m là tham số.)

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên dương thì $\Delta = 4m^4 + 4m^2 + 32m - 63$ phải là một số chính phương.

Ta có $\Delta = \left(2m^2 + 2\right)^2 - 4\left(m-4\right)^2 - 3 < \left(2m^2 + 2\right)^2$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác $\Delta = \left(2m^2 + 1\right)^2 + 32\left(m-2\right)$

Do đó $\Delta = \left(2m^2 + 1\right)^2 + 32\left(m-2\right) > \left(2m^2 + 1\right)^2$, $\forall m > 2$

Khi đó ta có $\left(2m^2 + 1\right)^2 < \Delta < \left(2m^2 + 2\right)^2$ với mọi $m > 2$.

Suy ra (1) chỉ có nghiệm nguyên dương n khi $m = 1$ hoặc $m = 2$.

+ Nếu $m = 1$ thì ta được $n^2 + n + 6 = 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m = 2$ thì $n^2 + n - 20 = 0 \Leftrightarrow n = 4$, do n là số nguyên dương.

Thử lại $m = 2$ và $n = 4$ ta thấy thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $m = 2$ và $n = 4$ là các số cần tìm.

Đề số 12

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH BẮC GIANG

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (6.0 điểm).

1. Cho biểu thức $A = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a+2}} - \sqrt{a-2}}{\dfrac{1}{\sqrt{a-2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a+2}}} : \dfrac{\sqrt{a-2}.\sqrt{a^2-4}}{(a+2)\sqrt{a-2} - (a-2)\sqrt{a+2}} + a^2 - 1$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $B = x_1^3 - 2x_2^2 - 5x_1 + 8x_2 + 2008$.

Câu 2 (4.0 điểm).

1. Giải phương trình $6x^2 + 10x - 92 + \sqrt{(x+70)(2x^2+4x+16)} = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + x(x+1)(x+2)(x+3) = 121 \\ y^2 + 1 = x \end{cases}$.

Câu 3 (3.0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $5^x + 12^x = y^2$

2. Chứng minh số $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ là số chẵn.

Câu 4 (6.0 điểm).

1. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N là hai điểm nằm trên đoạn AC sao cho $AC = 3AN = 4AM$. Hai đường thẳng DM và DN cắt AB lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác AMP và AQN đồng dạng, từ đó chỉ ra MNQP là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.

2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;r)$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm P, $(R > r)$. Hai tiếp tuyến chung ngoài AE, BD của hai đường tròn cắt nhau tại C trong đó AE, BD không đi qua P; A, B thuộc (O) và D, E thuộc (I). Tính số đo góc $\widehat{ACB}$ biết $DE = 2cm; AB = 6cm$.

3) Trong hình chữ nhật có chiều dài và rộng lần lượt bằng 4 và 3 cho 49 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các đỉnh thuộc 49 điểm trên mà diện tích nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}$

Câu 5 (1.0 điểm). Cho số thực x thỏa mãn $1 \le x \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{3+x}{x} + \dfrac{6-x}{3-x}$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (6.0 điểm).

1) Cho biểu thức $A = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a+2}} - \sqrt{a-2}}{\dfrac{1}{\sqrt{a-2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a+2}}} : \dfrac{\sqrt{a-2}.\sqrt{a^2-4}}{(a+2)\sqrt{a-2} - (a-2)\sqrt{a+2}} + a^2 - 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

$$A = \frac{\sqrt{a-2} - (a-2)\sqrt{a+2}}{\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2}} : \frac{\sqrt{a-2}.\sqrt{a+2}.\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}.\sqrt{a+2}\left(\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2}\right)} + a^2 - 1$$
$$= \frac{\sqrt{a-2} - (a-2)\sqrt{a+2}}{\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2}} : \frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{a+2} - \sqrt{a-2}} + a^2 - 1$$
$$= 1 - \sqrt{a^2-4} + a^2 - 1 = a^2 - \sqrt{a^2-4}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

$$A = a^2 - \sqrt{a^2-4} = \left(\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \sqrt{a^2-4} + 4 = \left(\sqrt{a^2-4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \ge \frac{15}{4}$$

Do đó A đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{15}{4}$ khi và chỉ khi $\sqrt{a^2-4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $B = x_1^3 - 2x_2^2 - 5x_1 + 8x_2 + 2008$.

- ***Phân tích.*** *Yêu cầu bài toán làm ta nghĩ đến hệ thức Vi – et. Chú ý rằng biểu thức B không chứa tích các nghiệm nên ta chỉ cần đến hệ thức* $x_1 + x_2 = 2$. *Do* x_1, x_2 *là hai nghiệm của phương trình nên ta luôn có* $x_1^2 - 2x_1 - 5 = 0; x_2^2 - 2x_2 - 5 = 0$. *Như vậy ta cần biến đổi biểu thức B sao cho có chứa một trong hai đẳng thức trên. Từ* $x_1 + x_2 = 2$ *ta được* $x_2 = 2 - x_1$, *thay vào đẳng thức B ta được*

$$B = x_1^3 - 2x_2^2 - 5x_1 + 8x_2 + 2008 = x_1^3 - 2(2 - x_1)^2 - 5x_1 + 8(2 - x_1) + 2008$$
$$= x_1^3 - 2x_1^2 - 5x_1 + 2016 = x_1\left(x_1^2 - 2x_1 - 5\right) + 2016$$

Đến đây ta tìm được giá trị của biểu thức B.

- **Lời giải.** Chứng minh phương trình có nghiệm và theo Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2$

$$B = x_1^3 - 2x_2^2 - 5x_1 + 8x_2 + 2008 = x_1^3 - 2(2 - x_1)^2 - 5x_1 + 8(2 - x_1) + 2008$$
$$= x_1^3 - 2x_1^2 - 5x_1 + 2016$$

Mà x_1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$ nên $x_1^2 - 2x_1 - 5 = 0$.

Từ đó ta được $B = x_1\left(x_1^2 - 2x_1 - 5\right) + 2016 = 2016$.

Câu 2 (4.0 điểm).

1) Giải phương trình $6x^2 + 10x - 92 + \sqrt{(x+70)\left(2x^2 + 4x + 16\right)} = 0$.

• ***Phân tích.*** *Quan sát phương trình ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ* $u = \sqrt{2x^2 + 4x + 16}; v = \sqrt{x + 70}$. *Để ý ta lại thấy* $6x^2 + 10x - 92 = 3\left(2x^2 + 4x + 16\right) - 2\left(x + 70\right) = 3u^2 - 2v^2$. *Khi đó ta viết lại được phương trình đã cho thành* $3u^2 - 2v^2 + uv = 0 \Leftrightarrow \left(3u - 2v\right)\left(u + v\right) = 0$. *Đến đây ta có lời giải cho phương trình.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -70$.

Đặt $u = \sqrt{2x^2 + 4x + 16}; v = \sqrt{x + 70}\left(u > 0; v \ge 0\right)$.

Khi đó ta có phương trình $3u^2 - 2v^2 = 6x^2 + 10x - 92$

Phương trình đã cho trở thành $3u^2 - 2v^2 + uv = 0 \Leftrightarrow \left(3u - 2v\right)\left(u + v\right) = 0$

Do $u > 0; v \ge 0$ nên từ phương trình trên ta được $3u - 2v = 0 \Leftrightarrow 3u = 2v$

Từ đó ta có $3\sqrt{2x^2 + 4x + 16} = 2\sqrt{x + 70}$, giải ra được $x = 2$ hoặc $x = -\frac{-34}{9}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{34}{9}; 2\right\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) = 121 \\ y^2 + 1 = x \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Từ phương trình thứ hai của hệ ta được* $y^2 = x - 1$, *thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình* $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) = 122$. *Phương trình thu được có bậc 4 và nhẩm được một nghiệm là* $x = 2$. *Để ý ta thấy khi* $x > 2$ *thì* $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) > 122$ *và đồng thời ta cũng có* $1 \le x < 2$ *thì* $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) < 122$. *Ta giải được phương trình thu được.*

• **Lời giải.** Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra được $x \ge 1$.

Thay $y^2 = x - 1$ vào phương trình thứ nhất ta được ta được $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) = 122$

+ Xét $1 \le x < 2$, khi đó ta có $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) < 122$.

+ Xét $x > 2$, khi đó ta được $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) > 122$.

+ Với $x = 2$ khi đó ta được $x + x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right) = 122$. Suy ra $y = 1; y = -1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(2; 1\right), \left(2; -1\right)$.

Câu 3 (3.0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $\left(x; y\right)$ sao cho $5^x + 12^x = y^2$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy với* $x = 1$ *phương trình không có nghiệm nguyên. Chú ý rằng khi x là số chẵn thì ta chuyển vế và viết được phương trình về dạng phương trình ước số. Ta xét* $x \ge 2$, *khi đó từ phương trình đã cho ta suy ra được y là số lẻ nên* y^2 *chia 8 dư 1. Lại thấy* 12^x *chia hết cho 8, do vậy* 5^x *phải chia 8 dư 1, từ đây suy ra x là số chẵn. Khi đó đặt* $x = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ *và viết phương trình về dạng*

$$5^{2k} = \left(y - 12^k\right)\left(y + 12^k\right)$$

Chú ý rằng 5 là số nguyên tô nên ta viết phương trình thành hệ $\begin{cases} y + 12^k = 5^{2k-m} \\ y - 12^k = 5^m \end{cases}$.

Từ hệ trên ta được $2.12^k = 5^m\left(5^{2k-2m} - 1\right)$*, điều này dẫn đến* $m = 0$*. Nên suy ra* $y = 12^k + 1$*. Đến đây thay vào một trong các phương trình trên ta tìm được k và bài toán được giải.*

- **Lời giải.** Nhận xét $x = 1$ không thoả mãn phương trình. Khi đó ta có $x \geq 2$.

Từ phương trình ta thấy y lẻ nên y^2 chia 8 dư 1.

Mặt khác $12^x \vdots 8$ nên suy ra 5^x chia 8 dư 1, từ đó suy ra x phải là số chẵn.

Đặt $x = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, khi đó ta thu được phương trình $5^{2k} = \left(y - 12^k\right)\left(y + 12^k\right)$

Do 5 nguyên tố nên tồn tại $m \in \mathbb{N}, m < k$ sao cho $\begin{cases} y + 12^k = 5^{2k-m} \\ y - 12^k = 5^m \end{cases}$

Suy ra $2.12^k = 5^m\left(5^{2k-2m} - 1\right)$. Do 2 và 12 đều nguyên tố cùng nhau với 5 mà $2.12^k \vdots 5^m$ nên $m = 0$ và ta được $y = 12^k + 1$. Thay vào phương trình ta được $5^{2k} + 12^{2k} = \left(12^k + 1\right)^2 \Rightarrow 2.12^k = 25^k - 1$

+ Với $k \geq 2$ thì $25^k - 1 > 24^k = 2^k.12^k > 2.12^k$.

+ Với $k = 1$ ta thấy thỏa mãn $2.12^k = 25^k - 1$. Từ đó ta tìm được $x = 2; y = 13$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 13)$.

2) Chứng minh số $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2016} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2016}$ là số chẵn.

- ***Phân tích.*** *Xét biểu thức tổng quát* $S_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ *và nhẩm thấy* S_1, S_2 *là các số tự nhiên chẵn. Để chứng minh* S_{2016} *là số tự nhiên ta cần chứng minh được* S_n *là số tự nhiên. Để ý rằng với* $n \geq 2$ *ta có*

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(2 + \sqrt{3}\right)^{n+1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{n+1} \\ &= \left(2 + \sqrt{3}\right)^{n+1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{n+1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)^n \\ &= \left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right]\left(2 + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}\right) - \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1}\right] \\ &= 4S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

Như vậy do S_1, S_2 *là số chẵn nên* S_3 *là số chẵn. Do đó* S_2, S_3 *là số chẵn nên* S_4 *cũng là số chẵn.*

Lập luận lại quá trình trên ta được S_{2016} *là số chẵn.*

- **Lời giải.** Đặt $S_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$. Kiểm tra S_1, S_2 là các số tự nhiên chẵn.

Xét $n \geq 2$ ta có

$$S_{n+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}$$
$$=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}$$
$$=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\right]\left(2+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right]$$
$$=4S_n-S_{n-1}$$

Do S_1, S_2 là số chẵn nên S_3 là số chẵn. Do đó S_2, S_3 là số chẵn nên S_4 cũng là số chẵn.

Lập luận lại quá trình trên ta được S_{2016} là số chẵn.

Câu 4 (6.0 điểm).

1) Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N là hai điểm nằm trên đoạn AC sao cho $AC = 3AN = 4AM$. Hai đường thẳng DM và DN cắt AB lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng:

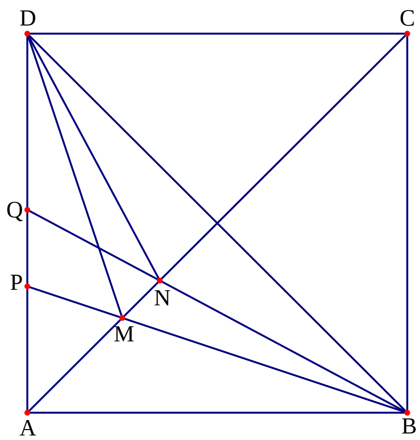
a) Hai tam giác AMP và AQN đồng dạng, từ đó chỉ ra MNQP là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.

- ***Phân tích.***

+ Hai tam giác AMP và AQN đồng dạng, từ đó chỉ ra MNQP là tứ giác nội tiếp.

+ Đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.



- **Lời giải**

a) Đặt $AB = a$..

Ta có $\Delta MAP \backsim \Delta MCD$ nên $\frac{AM}{MC}=\frac{AP}{CD}=\frac{1}{3}$

Do đó ta được $AM=\frac{AC}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{4}; AP=\frac{AB}{3}=\frac{a}{3}$

Ta có $\Delta NAQ \backsim \Delta NCD$ nên $\frac{AN}{NC}=\frac{AQ}{CD}=\frac{1}{2}$ suy ra $AN=\frac{a\sqrt{2}}{3}; AQ=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

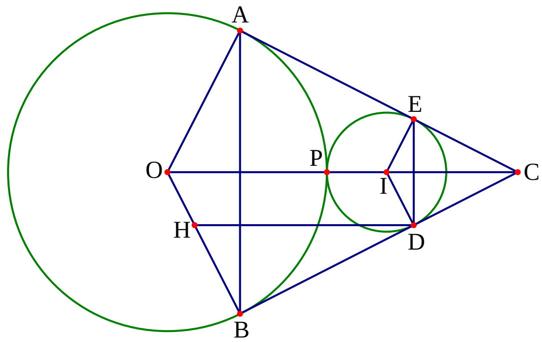
Từ đó ta có $\frac{AP}{AN}=\frac{AM}{AQ}$ suy ra hai tam giác $\Delta AMP \backsim \Delta AQN$

Suy ra $\widehat{AMP}=\widehat{AQN}$ nên tứ giác MNQP nội tiếp.

b) Ta có $CM=\frac{3}{4}AC=\frac{3}{4}a\sqrt{2}; CN=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}a\sqrt{2}$. Suy ra $CM.CN=a^2=CB^2=CD^2$

Do đó BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BNM và DC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.

2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;r)$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm P, $(R > r)$. Hai tiếp tuyến chung ngoài AE, BD của hai đường tròn cắt nhau tại C trong đó AE, BD không đi qua P; A, B thuộc (O) và D, E thuộc (I). Tính số đo góc $\widehat{ACB}$ biết $DE = 2cm; AB = 6cm$.



• **Lời giải.** Kẻ DH song song với OC.

Gọi $\widehat{ACB} = \alpha$ ta có $\widehat{HDB} = \widehat{BCO} = \dfrac{\alpha}{2}$

Trong tam giác vuông HBD có

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{HB}{HD} = \frac{R-r}{R+r}$$

Khẳng định hai tam giác $\Delta OAB \backsim \Delta IED$

$$\frac{R}{r} = \frac{AB}{DE} = 3 \Rightarrow R = 3r$$

Vậy $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\alpha = 60^0$

3) Trong hình chữ nhật có chiều dài và rộng lần lượt bằng 4 và 3 cho 49 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các đỉnh thuộc 49 điểm trên mà diện tích nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}$

• **Lời giải.** Chia hình chữ nhật 4×3 thành 24 hình chữ nhật $\dfrac{1}{2}\times 1$, mỗi hình chữ nhật có diện tích là $\dfrac{1}{2}$.

Vì có 49 điểm nằm trong 24 hình chữ nhật nên tồn tại một hình chữ nhật $\dfrac{1}{2}\times 1$ chứa ít nhất 3 điểm trong 49 điểm đã cho. Tam giác có ba đỉnh là 3 điểm nằm trong hình chữ nhật này có diện tích nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}$

Câu 5 . Cho số thực x thỏa mãn $1 \le x \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{3+x}{x} + \dfrac{6-x}{3-x}$.

• **Lời giải.** Biến đổi biểu thức $T = \dfrac{3+x}{x} + \dfrac{6-x}{3-x} = 2 + \dfrac{9}{3x - x^2}$.

+ Vì $1 \le x \le 2 \Rightarrow 3x - x^2 = x\left(3-x\right) > 0$

Mặt khác $3x - x^2 = \dfrac{9}{4} - \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \le \dfrac{9}{4}$ suy ra $T = 2 + \dfrac{9}{3x - x^2} \ge 2 + 4 = 6$.

Dấu bằng khi và chỉ khi $x = \dfrac{3}{2}$.

+ Ta lại có $3x - x^2 = 2 + \left(x-1\right)\left(2-x\right) \ge 2$ suy ra $T = 2 + \dfrac{9}{3x - x^2} \le 2 + \dfrac{9}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Dấu bằng khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\dfrac{13}{2}$, xẩy ra khi $x = 1$ hoặc $x = 2$. Giá trị nhỏ nhất của T bằng 6, xẩy ra khi $x = \dfrac{3}{2}$.

Đề số 13

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH BẮC NINH

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (3.0 điểm). Rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{2\left(a+b\right)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right)$$

Với $a \geq 0, b > 0, a \neq 2b.$

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2015x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2016x + 1 = 0.$ Tính giá trị của biểu thức

$$M = \left(x_1 + x_3\right)\left(x_2 + x_3\right)\left(x_1 - x_4\right)\left(x_2 - x_4\right).$$

b) Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hình chữ nhật ABCD trong đó $A\left(6;2\right), B\left(6;17\right), C\left(42;17\right), D\left(42;2\right).$ Trên đường thẳng $3x + 5y = 68$ tìm các điểm $M\left(x;y\right)$ (x, y là các số nguyên) thuộc hình chữ nhật ABCD (các điểm này không thuộc các cạnh của hình chữ nhật ABCD).

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a^2 + b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh rằng $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{c}$.

b) Với bộ số $\left(6;5;2\right)$ ta có đẳng thức đúng $\frac{65}{26} = \frac{5}{2}$. Hãy tìm tất cả các bộ số $\left(a;b;c\right)$ gồm các chữ số trong hệ thập phân, biết rằng a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$.

Câu 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, BA = c\left(c < a; c < b\right)$. Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AC và BC. Đường thẳng MN cắt các tia AO, BO lần lượt tại P và Q. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AOQM; BOPN; AQPB$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm Q, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $\frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$.

Câu 5 (30 điểm).

a) Trên cùng một mặt phẳng cho 4033 điểm, biết rằng 3 điểm bất kì trong 4033 điểm trên luôn chọn được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính bằng 1.

b) Cho tam giác OAB với $OA = 2a, OB > a$. Gọi $\left(O\right)$ là đường tròn tâm O bán kính a Tìm điểm M thuộc $\left(O\right)$ sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{2\left(a+b\right)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}\right).\left(\dfrac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}\right)$

• **Lời giải.** Với $a\ge 0, b>0, a\ne 2b$. Ta có

$$\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{2b}\right)^3=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)$$

Suy ra ra được

$$\circ\ \frac{2\left(a+b\right)}{\sqrt{a^3}-2\sqrt{2b^3}}-\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{2ab}+2b}=\frac{2\left(a+b\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}$$
$$=\frac{a+\sqrt{2ab}+2b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(a+\sqrt{2ab}+2b\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.$$

$$\circ\ \frac{\sqrt{a^3}+2\sqrt{2b^3}}{2b+\sqrt{2ab}}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right)}{\sqrt{2b}\left(\sqrt{2b}+\sqrt{a}\right)}-\sqrt{a}$$
$$=\frac{a-\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}-\sqrt{a}=\frac{a-2\sqrt{2ab}+2b}{\sqrt{2b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}.$$

Từ đó ta được $P=\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}.\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{\sqrt{2b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $x^2+2015x+1=0$ và x_3,x_4 là nghiệm của phương trình $x^2+2016x+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=\left(x_1+x_3\right)\left(x_2+x_3\right)\left(x_1-x_4\right)\left(x_2-x_4\right)$.

• **Lời giải.** Theo định lí Vi – et ta có $x_1x_2=x_3x_4=1; x_1+x_2=-2015$. Do đó ta có

$$M=\left[x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)x_3+x_3^2\right]\left[x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)x_4+x_4^2\right]$$

Do ta đã có $x_3^2+1=-2016x_3; x_4^2+1=-2016x_4$

Nên suy ra $M=\left(1-2015x_3+x_3^2\right)\left(1+2015x_4+x_4^2\right)=\left(-4031x_3\right)\left(-x_4\right)=4031$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD với $A\left(6;2\right), B\left(6;17\right), C\left(42;17\right), D\left(42;2\right)$.

Trên đường thẳng $3x+5y=68$ tìm các điểm $M\left(x;y\right)$ (x, y là các số nguyên) thuộc hình chữ nhật ABCD (các điểm này không thuộc các cạnh của hình chữ nhật ABCD).

• **Lời giải.** Ta có $3x+5y=68 \Leftrightarrow 3\left(x+4\right)=5\left(16-y\right)\Rightarrow 3\left(x+4\right)$ chia hết cho 5

Do đó ta được $x+4=5k\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow x=5k-4\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Mặt khác điểm $M\left(x;y\right)$ thuộc hình chữ nhật ABCD (không nằm trên cạnh) nên ta có

$$\begin{cases} 6 < x < 42 \\ 2 < y < 17 \end{cases} \Rightarrow 3x = 68 - 5y < 58 \Rightarrow x < \frac{58}{3} \Rightarrow x \le 19 \left(\text{do } x \in \mathbb{Z}\right)$$

Do đó $6 < 5k - 4 \le 19 \Leftrightarrow 2 < k < \frac{23}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = 4 \end{array}\right.$

+ Với $k = 3 \Rightarrow \left(x; y\right) = \left(11; 7\right)$, thỏa mãn bài toán.

+ Với $k = 4 \Rightarrow \left(x; y\right) = \left(16; 4\right)$, thỏa mãn bài toán.

Vậy các điểm cần tìm là $M\left(11; 7\right), M\left(16; 4\right)$.

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a^2 + b^2 \le 3c^2$. Chứng minh rằng $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{3}{c}$.

• **Lời giải.** Ta sẽ chứng minh $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{9}{2a + b}$ $\left(1\right)$

Thật vậy $\left(1\right) \Leftrightarrow \left(2b + a\right)\left(2a + b\right) \ge 9ab \Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(a - b\right)^2 \ge 0$, luôn đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ta lại có $\left(2a^2 + b^2\right)\left(2 + 1\right) \ge \left(2a + b\right)^2$ nên ta được $\sqrt{3\left(2a^2 + b^2\right)} \ge 2a + b$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Do đó ta có $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{9}{2a + b} \ge \frac{9}{\sqrt{3\left(2a^2 + b^2\right)}} \ge \frac{3}{c}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Với bộ số $\left(6; 5; 2\right)$ ta có đẳng thức đúng $\frac{65}{26} = \frac{5}{2}$. Hãy tìm tất cả các bộ số $\left(a; b; c\right)$ gồm các chữ số trong hệ thập phân, biết rằng a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c\left(10a + b\right) = b\left(10c + a\right) \Leftrightarrow 2.5.c\left(a - b\right) = b\left(a - c\right)$, *đến đây ta suy ra được 5 là ước của* $b\left(a - c\right)$. *Do* $\left(a; b; c\right)$ *là các chữ số nên ta có* $1 \le b \le 9; -8 \le a - c \le 8$, *điều này dẫn đến hoặc* $b = 5$ *hoặc* $c - a = -5$ *hoặc* $c - a = 5$. *Đến đây ta xét các trường hợp để giải quyết bài toán.*

• **Lời giải.** Ta có $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c\left(10a + b\right) = b\left(10c + a\right) \Leftrightarrow 2.5.c\left(a - b\right) = b\left(a - c\right)$.

Suy ra 5 là ước của $b\left(a - c\right)$. Do 5 là số nguyên và $1 \le b \le 9; -8 \le a - c \le 8$ nên hoặc $b = 5$ hoặc $c - a = -5$ hoặc $c - a = 5$.

+ Nếu $b = 5$ thì $2c\left(a - 5\right) = a - c \Leftrightarrow 2c = \frac{2a}{2a - 9} \Leftrightarrow 2c = 1 + \frac{9}{2a - 9}$

Vì $2c \ge 2 \Rightarrow 2a - 9 > 0$ nên $(2a - 9) \in \{1;3;9\} \Leftrightarrow a \in \{5;6;9\}$. Do a, b, c là các chữ số khác nhau nên ta được .

Với $a = 6 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow (a;b;c) = (6;5;2)$

Với $a = 9 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow (a;b;c) = (9;5;1)$

+ Nếu $c - a = -5 \Leftrightarrow a = c + 5$ thì $2c(c + 5 - b) = b \Leftrightarrow b = \dfrac{2c^2 + 10c}{2c + 1}$

Hay ta được $2b = \dfrac{4c^2 + 20c}{2c + 1} \Leftrightarrow 2b = 2c + 9 - \dfrac{9}{2c + 1}$

Suy ra $(2c + 1) \in \{1;3;9\} \Leftrightarrow c \in \{1;4\}$ (do $c \ne 0$).

Với $c = 1 \Rightarrow a = 6; b = 4 \Rightarrow (a;b;c) = (6;4;1)$.

Với $c = 4 \Rightarrow a = 9; b = 8 \Rightarrow (a;b;c) = (9;8;4)$.

+ Nếu $c - a = 5 \Leftrightarrow c = a + 5$ thì $2(a + 5)(a - b) = -b \Leftrightarrow b = \dfrac{2a^2 + 10a}{2a + 9} \Rightarrow 2b = 2a + 1 - \dfrac{9}{2a + 9}$

Do $2a + 9 > 9$ nên $\dfrac{9}{2a + 9} \not\in \mathbb{Z}$ (không thỏa mãn).

Vậy các bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn là $(6;4;1), (9;8;4), (6;5;2), (9;5;1)$.

Câu 4 (6.0 điểm).

a) Chứng minh rằng các tứ giác AOQM; BOPN; AQPB nội tiếp.

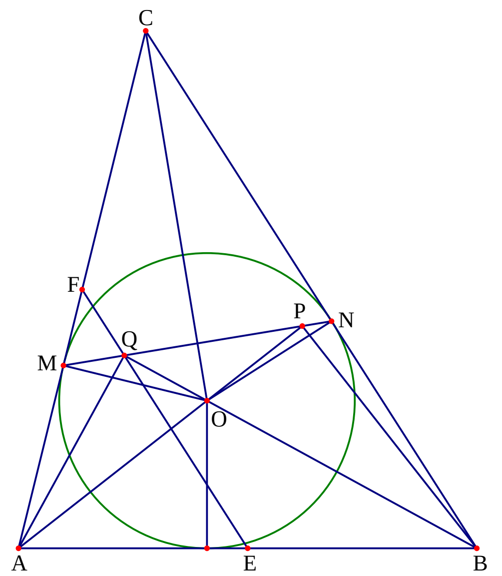
• ***Phân tích.*** *Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta tính được*

$$\widehat{BOP} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$$

$$\widehat{PNC} = 90^0 - \widehat{NCO} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$$

Như vậy ta có $\widehat{BOP} = \widehat{PNC}$ *do đó tứ giác BOPN nội tiếp. Hoàn toàn tương tự cho tứ giác AOQM.*

Từ kết quả trên ta được $\widehat{AQB} = \widehat{APB} = 90^0$ *nên tứ giác AQPB nội tiếp đường tròn.*



• **Lời giải.** Ta có

$$\widehat{BOP} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$$

Lại có $\widehat{PNC} = 90^0 - \widehat{NCO} = \dfrac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$

Từ đó suy ra $\widehat{BOP} = \widehat{PNC}$ do đó tứ giác BOPN nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự ta có tứ giác AOQM nội tiếp.

Do tứ giác AOQM nội tiếp nên $\widehat{AQO} = \widehat{AMO} = 90^0$

Tứ giác BOPN nội tiếp nên $\widehat{BPO} = \widehat{BNO} = 90^0$

Từ đó suy ra $\widehat{AQB} = \widehat{APB} = 90^0$, do đó ta được tứ giác AQPB nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các điểm Q, E, F thẳng hàng.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh ba điểm Q, E, F thẳng hàng ta đi chứng minh QE và EF cùng song song với BC. Dễ thấy EF song song với BC, như vậy ta cần chứng minh QE song song với BC.*

• **Lời giải.** Tam giác AQB vuông tại Q có QE là trung tuyến nên $QE = EB = EA$.

Từ đó ta được $\widehat{EQB} = \widehat{EBQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{QBC}$ do đó QE song song với BC

Mà EF là đường trung bình của tam giác ABC nên EF song song với BC

Suy ra ba điểm Q, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $\frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy hai tam giác MOP và COB đồng dạng với nhau nên* $\frac{MP}{a} = \frac{OM}{OC} = \frac{OP}{OB}$

Như vậy để có $\frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$ *ta đi chứng minh* $\frac{NQ}{b} = \frac{OM}{OC}$ *và* $\frac{PQ}{c} = \frac{OM}{OC}$.

• **Lời giải.** Do tứ giác BOPN nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{MPO} = \widehat{OBC}$.

Mặt khác ta lại có tứ giác MONC nội tiếp nên $\widehat{PMO} = \widehat{BOC}$

Do đó hai tam giác MOP và COB đồng dạng với nhau, do đó $\frac{MP}{a} = \frac{OM}{OC} = \frac{OP}{OB}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\Delta NOQ \backsim \Delta COA$ nên $\frac{NQ}{b} = \frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OC}$

Do tứ giác AOQM nội tiếp nên $\widehat{OQP} = \widehat{MAO} = \widehat{OAB}$. Tương tự ta cũng có $\widehat{QPO} = \widehat{OBA}$.

Do đó hai tam giác POQ và BOA đồng dạng nên ta được $\frac{PQ}{c} = \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OC}$

Từ đó ta được $\frac{OM}{OC} = \frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c} = \frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c}$

Câu 5 (3.0 điểm).

a) Trên cùng một mặt phẳng cho 4033 điểm, biết rằng 3 điểm bất kì trong 4033 điểm trên luôn chọn được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính bằng 1.

Cách 1. Gọi A là 1 trong 4033 điểm đã cho. Vẽ đường tròn tâm A bán kính là 1. Kí hiệu $(A, 1)$.

+ Nếu tất cả 4033 điểm còn lại đều nằm trong đường tròn này thì bài toán được giải quyết.

+ Giả sử B nằm ngoài đường tròn $(A, 1)$ Khi đó $AB > 1$, vẽ đường tròn tâm B bán kính bằng 1, kí hiệu là $(B, 1)$. Gọi C là điểm thứ 3 trong 4031 điểm còn lại. Do A, B, C là ba điểm bất kì và $AB > 1$ nên theo giả thiết hoặc $AC < 1$ hoặc $BC < 1$. Nên C nằm trong $(A, 1)$ hoặc $(B, 1)$ do đó hai hình tròn $(A, 1)$ và

$(B,1)$ chứa tất cả 4033 điểm đã cho. Mà $4033 = 2.2016 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet một trong hai đường tròn này chứa 2016 điểm.

Cách 2. Nối hai điểm bất kì trong các điểm trên ta được hữu hạn các đoạn thẳng, khi đó theo nguyên lí cực hạn thì tồn tại đoạn thẳng có độ dài lớn nhất. Không mất tính tổng quát ta giả sử đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất. Lấy điểm M trong số 2013 điểm còn lại. Khi đó trong ba đoạn thẳng AB, AM, BM luôn tồn tại một đoạn thẳng có độ dài không vượt quá 1. Khi đó ta có các khả năng xẩy ra như sau:

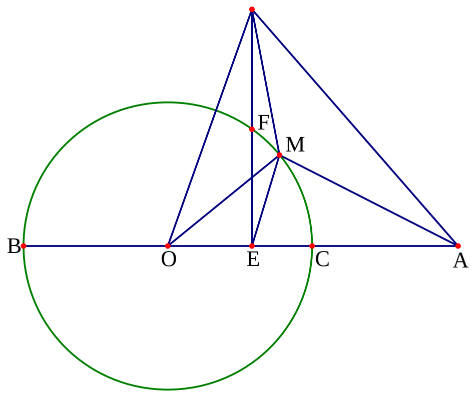
+ Nếu $AB \le 1$ thì $AM \le 1; BM \le 1$.

+ Nếu $AB > 1$ thì $AM \le 1$ hoặc $BM \le 1$.

Như vậy trong hai đoạn AM và BM có một đoạn thẳng có độ dài không vượt quá 1. Như vậy điểm M nằm trong đường tròn tâm A hoặc đường tròn tâm B có bán kính bằng 1. Như vậy một trong hai đường tròn này chưa ít nhất 1008 điểm trong số 2015 điểm đã cho.

Nhận xét. *Bài toán tổng quát: Cho* $2n + 1$ *điểm trên mặt phẳng với* $n \ge 3$. *Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn* $n + 1$ *điểm đã cho.*

b) Cho tam giác OAB với $OA = 2a, OB > a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



• **Lời giải.** Đường thẳng OA cắt (O) tại C, D với C là trung điểm của OA. Gọi E là trung điểm của OC. Nếu M không trùng với C, D thì ta được $\widehat{MOE} = \widehat{AOM}$ và $\frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OM}$ nên hai tam giác OEM và OMA đồng dạng.

Suy ra $\frac{ME}{AM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2EM.$

Nếu M trùng với C thì $MA = CA = 2EC = 2EM$.

Nếu M trùng với D thì $MA = DA = 2ED = 2EM$

Vậy ta luôn có $MA = 2EM$.

Do đó ta được $MA + 2MB = 2EM + 2MB \ge 2EB$ là hằng số.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của BE với (O).

Vậy $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của BE với (O).

Đề số 14

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH

Năm học 2015 – 2016

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Tính tổng $T=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2015^2}+\frac{1}{2016^2}}$

b) Tìm các giá trị nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $\left(y+2\right)x^2+1=y^2$

Bài 2 (3.0 điểm).

Cho phương trình $x^2+ax+b+1=0$ với a, b là tham số. Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ x_1^3-x_2^3=9 \end{cases}$.

Bài 3 (3.0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{a+c-b}+\frac{16c}{a+b-c}$$

Bài 4 (9.0 điểm).

1. Cho đường tròn $\left(O\right)$ có đường kính $BC=2R$ và điểm A thay đổi trên đường tròn $\left(O\right)$(A không trùng với B, C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn tại điểm K $\left(K\neq A\right)$. Hạ AH vuông góc với BC.

a) Đặt $AH=x$. Tính diện tích S của tam giác AHK theo R và x. Tìm x sao cho S đạt giá trị lớn nhất.

b) Tính số đo góc B của tam giác ABC biết rằng $\frac{AH}{HK}=\sqrt{\frac{3}{5}}$.

2. Một đường thẳng d thay đổi cắt hai cạnh Ox, Oy của một góc nhọn $\widehat{xOy}$ lần lượt tại hai điểm M, N nhưng luôn thoả hệ thức $\frac{1}{OM}+\frac{2}{ON}=1$. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1 (5.0 điểm).

$$\boxed{\text{a) Tính tổng } T=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2015^2}+\frac{1}{2016^2}}}$$

- ***Phân tích.*** *Qua sát các biểu thức trong căn thức ta thấy dạng tổng quát là* $1+\frac{1}{\left(a-1\right)^2}+\frac{1}{a^2}$ *và ta cần viết biểu thức đó về dạng bình phương để triệt tiêu căn thức bậc hai. Từ đó ta có biến đổi sau*

$$1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}=1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}+2.\frac{a-(a-1)-1}{a(a-1)}$$

$$=1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}+2\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}.\frac{1}{a}\right)=\left(1+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}\right)^2$$

Đến đây áp dụng cho $a=3;4;5;\ldots$ ta có lời giải cho bài toán.

- **Lời giải.** Với a là số tự nhiên khác 0 thì ta luôn có

$$\left(1+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}\right)^2=1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}+2\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}.\frac{1}{a}\right)$$

$$=1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}+2.\frac{a-(a-1)-1}{a(a-1)}=1+\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a^2}$$

Áp dụng đẳng thức trên với $a=3;4;5;\ldots$ ta được

$$T=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)$$

$$=2014+\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}=\frac{2014.2016+1008-1}{2016}=\frac{4061231}{2016}$$

b) Tìm các giá trị nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $(y+2)x^2+1=y^2$

- ***Phân tích.*** *Nhận thấy $y=-2$ không phải là nghiệm phương trình trên nên $y\neq-2$. Khi đó ta viết phương trình đã cho về dạng $x^2=\frac{y^2-1}{y+2}=y-\frac{2y+1}{y+2}=y-2+\frac{3}{y+2}$. Đến đây ta cần tìm y nguyên để $3\,\vdots\, y+2$. Chú ý rằng ta có thêm điều kiện $x^2=\frac{y^2-1}{y+2}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<y\leq-1\\ y\geq 1\end{array}\right.$.*

- **Lời giải.** Ta có $(y+2)x^2+1=y^2\Leftrightarrow(y+2)x^2=y^2-1$

Ta thấy $y=-2$ không phải là nghiệm phương trình trên nên $y\neq-2$, khi đó ta có:

$$(y+2)x^2=y^2-1\Leftrightarrow x^2=\frac{y^2-1}{y+2}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<y\leq-1\\ y\geq 1\end{array}\right.$$

Do $x^2\in Z\Rightarrow(y^2-1)\,\vdots\,(y+2)$ mà $(y^2+2y)\,\vdots\,(y+2)$ suy ra $(2y+1)\,\vdots\,(y+2)$

Mà ta lại có $(2y+4)\,\vdots\,(y+2)\Rightarrow 3\,\vdots\,(y+2)\Rightarrow y\in\{-5;-3;-1;1\}$

Thay các giá trị y tìm được vào phương trình đac ho ta được các nghiệm là $(x;y)=(0;1),(0;-1)$.

Bài 2 (3.0 điểm). Cho phương trình $x^2+ax+b+1=0$ với a, b là tham số. Tìm giá trị của a, b để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện $\begin{cases}x_1-x_2=3\\ x_1^3-x_2^3=9\end{cases}$.

- **Lời giải.** Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khi và chỉ khi $\Delta=a^2-4(b+1)>0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1x_2 = b + 1 \end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ \left(x_1 - x_2\right)^3 + 3x_1x_2\left(x_1 - x_2\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$ (2).

Từ hệ (2) ta có $\left(x_1 + x_2\right)^2 = \left(x_1 - x_2\right)^2 + 4x_1x_2 = 3^2 + 4\left(-2\right) = 1$

Kết hợp với (1) được $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; b = -3 \\ a = -1; b = -3 \end{array}\right.$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4a}{b + c - a} + \frac{9b}{a + c - b} + \frac{16c}{a + b - c}$$

- **Lời giải.** Đặt $b + c - a = 2x;\ c + a - b = 2y;\ a + b - c = 2z$. Vì trong tam giác tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh còn lại nên x, y, z dương và $a = y + z;\ b = z + x;\ c = x + y$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$2P = 4\left(\frac{y + z}{x}\right) + 9\left(\frac{z + x}{y}\right) + 16\left(\frac{x + y}{z}\right) =$$
$$= \left(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\right) + \left(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\right) + \left(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\right) \ge 12 + 16 + 24 = 52$$

Từ đó ta được $P \ge 26$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}; \frac{z}{x} = 2; \frac{z}{y} = \frac{4}{3}$ hay $6x = 4y = 3z$.

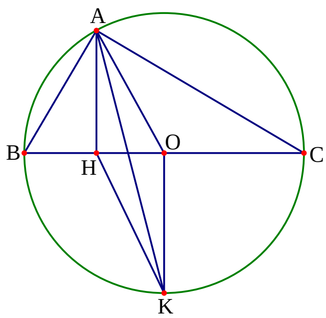
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 26, đạt được khi $6x = 4y = 3z$.

Bài 4 (9.0 điểm).

1. Cho đường tròn $\left(O\right)$ có đường kính $BC = 2R$ và điểm A thay đổi trên đường tròn $\left(O\right)$(A không trùng với B, C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn tại điểm K $\left(K \ne A\right)$. Hạ AH vuông góc với BC.

a) Đặt $AH = x$. Tính diện tích S của tam giác AHK theo R và x.
Tìm x sao cho S đạt giá trị lớn nhất.

- ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $S_{AHK} = S_{OAH} = \frac{1}{2}AH.OH = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2}$. *Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có* $x\sqrt{R^2 - x^2} \le \frac{x^2 + \left(R^2 - x^2\right)}{2} = \frac{R^2}{2}$. *Từ đó ta có giác trị lớn nhất của* S_{AHK}.



• **Lời giải.** Ta có AH song song với OK nên ta có

$$S_{AHK} = S_{OAH} = \frac{1}{2}AH.OH = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$S_{AHK} = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2} \le \frac{1}{2}\left[\frac{x^2 + \left(R^2 - x^2\right)}{2}\right] = \frac{R^2}{4}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{4}$ đạt được khi $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

b) Tính số đo góc B của tam giác ABC biết rằng $\frac{AH}{HK} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

• **Lời giải.** Theo định lý Pitago ta có $HK^2 = R^2 + OH^2; AH^2 = R^2 - OH^2$

Do đó ta được $AH^2 + HK^2 = 2R^2$. Lại có $\frac{AH}{KH} = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{AH^2}{KH^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow HK^2 = \frac{5}{3}AH^2$.

Mà $AH^2 + HK^2 = 2R^2$ hay $AH^2 + \frac{5}{3}AH^2 = 2R^2 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Tam giác OAH vuông tại H nên có $AH = OA\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên là nửa tam giác đều.

Từ đó suy ra $\widehat{AOH} = 60^0$

+ Nếu H trên đoạn OB ta có tam giác OAB cân tại O và có $\widehat{ACB} = 60^0$ nên là tam giác đều

Suy ra $\widehat{ABC} = 60^0$

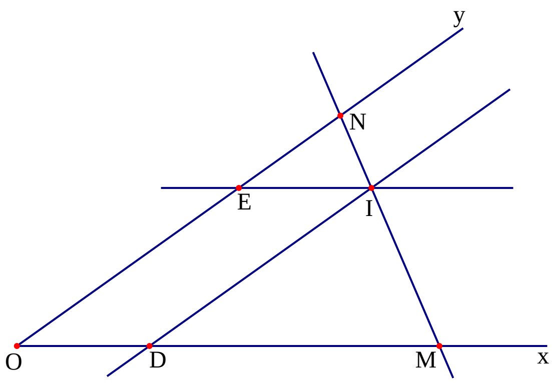
+ Nếu H trên đoạn OC thì tương tự ta có $\widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 30^0$.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$ hoặc $\widehat{ABC} = 30^0$.

2. Một đường thẳng d thay đổi cắt hai cạnh Ox, Oy của một góc nhọn $\widehat{xOy}$ lần lượt tại hai điểm M, N nhưng luôn thoả hệ thức $\frac{1}{OM} + \frac{2}{ON} = 1$. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Do $\frac{1}{OM} + \frac{2}{ON} = 1$ nên $OM > 1$. Trên tia Ox lấy điểm D thoả mãn $OD = 1$ thì D nằm giữa hai điểm O và M. Qua D kẻ đường thẳng song song với Oy cắt d tại I. Trên tia Oy lấy điểm E sao cho $OE = ID$. Ta có OEID là hình bình hành nên

$$\frac{OD}{OM} + \frac{OE}{ON} = \frac{EI}{OM} + \frac{DI}{ON} = \frac{NI}{MN} + \frac{MI}{MN} = 1$$



Từ đó ta có $\frac{1}{OM} + \frac{OE}{ON.OD} = \frac{1}{OD} = 1$. Mà theo giả thiết ta có $\frac{1}{OM} + \frac{2}{ON} = 1$

Do đó $\frac{OE}{OD} = 2$ hay ta được $OE = 2.OD = 2$. Suy ra điểm E cố định.

Do D, E cố định nên I cũng cố định. Vậy I là điểm cố định mà đường thẳng d luôn đi qua.

Đề số 15

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

Năm học 2015 – 2016

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 - 6x + 1976$ với $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$. Rút gọn biểu thức:

$$B = \sqrt{x\left(4 - y\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{y\left(4 - x\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{z\left(4 - x\right)\left(4 - y\right)} - \sqrt{xyz}$$

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giả sử $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$. Chứng minh $\left(x_1 - x_3\right)\left(x_2 - x_3\right)\left(x_1 + x_4\right)\left(x_2 + x_4\right) = q^2 - p^2$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^2 + 2xy = 7x + 5y - 9 \end{cases}$

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm 3 số x, y, z nguyên dương thỏa mãn điều kiện $2016\left(x - y\sqrt{2001}\right) = 2015\left(y - z\sqrt{2001}\right)$ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

b) Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + xz}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \le 1$$

Bài 4 (3.0 điểm).

1. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} < 90^0\right)$, vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm B và C. Trên cung nhỏ BC của (O) nằm trong tam giác ABC lấy một điểm M (M khác B, C). Gọi I, H, K theo thứ tự là hình chiếu của điểm M trên BC, CA, AB và P là giao điểm của MB và IK, Q là giao điểm của MC với IH. Gọi $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPK và MQH. Gọi D là trung điểm của đoạn BC, N là giao điểm thứ hai của $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$.

a) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$.

b) Chứng minh rằng ba điểm M, N, D thẳng hàng.

2. Trên dây cung AB của đường tròn $\left(O\right)$ (AB không đi qua tâm O) lấy hai điểm P và Q sao cho $AP = PQ = QB$. Vẽ bán kính OK, OH thứ tự qua điểm P và điểm Q. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AK} < \overset{\frown}{KH}$

Bài 5 (1.0 điểm). Cho 2017 đường thẳng phân biệt đều cắt hai cạnh đối của một hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng trong 2017 đường thẳng trên có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 - 6x + 1976$ với $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

• **Lời giải.** Đặt $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}; v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Khi đó ta có $x = u + v$ và $u^3 + v^3 = 40$. Ta lại có $uv = \sqrt[3]{\left(20 + 14\sqrt{2}\right)\left(20 - 14\sqrt{2}\right)} = 2$

Do đó $x = u + v \Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv\left(u + v\right) = 40 + 6x$ hay $x^3 - 6x = 40$.

Vậy ta được $A = x^3 - 6x + 1976 = 40 + 1976 = 2016$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$. Rút gọn biểu thức:

$$B = \sqrt{x\left(4 - y\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{y\left(4 - x\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{z\left(4 - x\right)\left(4 - y\right)} - \sqrt{xyz}$$

• ***Phân tích.*** *Để tính được giá trị của B ta cần tìm được mối liên hệ giữa xác biểu thức trong căn và giả thiết của bài toán. Dễ thấy* $x\left(4 - y\right)\left(4 - z\right) = x\left(16 - 4y - 4z + zy\right)$. *Ta thấy trong biểu thức có chứa đại lượng* $4y + 4z$ *và trong giả thiết có chứa đại lương* $y + z$. *Do đó ta có thể rút đại lượng* $y + z$ *trong giả thiết rồi thế vào biểu thức trong căn thức. Với ý tưởng như vậy ta thu được biểu thức*

$$x\left(yz + 4\sqrt{xyz} + 4x\right) = x\left(\sqrt{yz} + 2\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{xyz} + 2x\right)^2$$

Khi áp dụng tương tự thì ta thu được

$$B = 2x + 2y + 2x + 3\sqrt{xyz} - \sqrt{xyz} = 2\left(x + y + z + \sqrt{xyz}\right) = 2.4 = 8$$

Như vậy ta tích được giá trị của biểu thức B.

• **Lời giải.** Ta có $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4 \Leftrightarrow 4\left(x + y + z\right) + 4\sqrt{xyz} = 16$. Khi đó ta có

$$\sqrt{x\left(4 - y\right)\left(4 - z\right)} = \sqrt{x\left(16 - 4y - 4z + yz\right)} = \sqrt{x\left(yz + 4\sqrt{xyz} + 4x\right)}$$
$$= \sqrt{x}.\sqrt{\left(\sqrt{yz} + 2\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{xyz} + 2x$$

Tương tự $\sqrt{y\left(4 - z\right)\left(4 - x\right)} = \sqrt{xyz} + 2y; \sqrt{z\left(4 - x\right)\left(4 - y\right)} = \sqrt{xyz} + 2z$. Từ đó ta được

$$B = \sqrt{x\left(4 - y\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{y\left(4 - x\right)\left(4 - z\right)} + \sqrt{z\left(4 - x\right)\left(4 - y\right)} - \sqrt{xyz}$$
$$= 2\left(x + y + z + \sqrt{xyz}\right) = 2.4 = 8$$

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$. Chứng minh $\left(x_1 - x_3\right)\left(x_2 - x_3\right)\left(x_1 + x_4\right)\left(x_2 + x_4\right) = q^2 - p^2$

• **Lời giải.** Do $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ nên theo định lí Vi – et ta có

$$x_1 + x_2 = -p; x_1x_2 = 1$$

Do $x_3; x_4$ là nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ nên theo định lý Vi – et ta có

$$x_3 + x_4 = -q; x_3x_4 = 1$$

Mặt khác ta có x_3 là nghiệm của phương trình $x^2 + qx + 1 = 0$ nên ta được

$$x_3^2 + qx_3 + 1 = 0 \Rightarrow x_3^2 = -qx_3 - 1$$

Do đó ta được $\left(x_1 - x_3\right)\left(x_2 - x_3\right) = x_1x_2 - x_3\left(x_1 + x_2\right) + x_3^2 = 1 + x_3p + \left(-1 - qx_3\right)$

Suy ra ta có $\left(x_1 - x_3\right)\left(x_2 - x_3\right) = x_3\left(p - q\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có $\left(x_1 + x_4\right)\left(x_2 + x_4\right) = 1 - px_4 + \left(-qx_4 - 1\right) = -x_4\left(p + q\right)$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\left(x_1 - x_3\right)\left(x_2 - x_3\right)\left(x_1 + x_4\right)\left(x_2 + x_4\right) = q^2 - p^2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^2 + 2xy = 7x + 5y - 9 \end{cases}$.

• ***Phân tích.*** *Cả hai phương trình của hệ đều có bậc hai đối với mỗi ẩn, do đó khi sử dụng công thức nghiệm thì ta phân tích được phương trình thứ hai thành tích*

$$2x^2 + y^2 + 3xy - 7x - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(y + 2x - 3\right)\left(y + x - 2\right) = 0$$

• **Lời giải.** Cộng vế với vế hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{aligned} &2x^2 + y^2 + 3xy - 7x - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - \left(5 - 3x\right)y + 2x^2 - 7x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y + 2x - 3\right)\left(y + x - 2\right) = 0 \end{aligned}$$

Như vậy từ hệ phương trình ta có các hệ $\begin{cases} y + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} y + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$, rút y theo x từ phương trình thứ nhất thay thế vào phương trình còn lại ta

được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = 2; y = -1 \end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$, rút y theo x từ phương trình thứ nhất thay thế vào phương trình còn lại ta

được $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(1;1\right), \left(2;-1\right)$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm các số x, y, z nguyên dương thỏa mãn điều kiện $2016\left(x - y\sqrt{2001}\right) = 2015\left(y - z\sqrt{2001}\right)$ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

• ***Phân tích.*** *Để tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn bài toán trước hết ta cần đơn giản hóa các giả thiết của bài toán. Biết đổi giả thiết thứ nhất ta được* $2016x - 2015y = \sqrt{2001}\left(2016y - 2015z\right)$. *Chú ý rằng* $2016x - 2015y; 2016y - 2015z$ *là số nguyên và* $\sqrt{2001}$ *là số vô tỷ.*

Từ đó ta có tích $\sqrt{2001}\left(2016y-2015z\right)$. *Như vậy để đẳng thức xảy ra ta ta cần có*

$$2016x-2015y=2016y-2015z=0\Rightarrow\begin{cases}2016x=2015y\\2016y=2015z\end{cases}\Rightarrow xz=y^2$$

Từ đó ta có $x^2+y^2+z^2=\left(x+z\right)^2-2xz+y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x+y+z\right)\left(x-y+z\right)$. *Mà theo bài ra lại có* $x^2+y^2+z^2$ *là số nguyên tố và* $x+y+z$ *là số nguyên lớn hơn 1 nên* $x-y+z=1$. *Do đó ta được* $x^2+y^2+z^2=x+y+z$. *Chú ý rằng do x, y, z nguyên dương nên* $x^2\ge x;y^2\ge y;z^2\ge z$, *từ đó ta suy ra được* $x=y=z=1$. *Tuy nhiên bộ số này không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy không có bộ số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.*

- **Lời giải.** Ta có $2016\left(x-y\sqrt{2001}\right)=2015\left(y-z\sqrt{2001}\right)$

Hay ta được $2016x-2015y=\sqrt{2001}\left(2016y-2015z\right)$.

Vì $\sqrt{2001}$ là số vô tỉ và x, y, z là các số nguyên dương nên từ đẳng thức trên ta có

$$2016x-2015y=2016y-2015z=0\Rightarrow\begin{cases}2016x=2015y\\2016y=2015z\end{cases}\Rightarrow xz=y^2$$

Ta lại có $x^2+y^2+z^2=\left(x+z\right)^2-2xz+y^2=\left(x+z\right)^2-y^2=\left(x+y+z\right)\left(x-y+z\right)$

Vì $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố và $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 nên $x-y+z=1$.

Do đó $x^2+y^2+z^2=x+y+z$. Nhưng x, y, z là các số nguyên dương nên $x^2\ge x;y^2\ge y;z^2\ge z$.

Suy ra $x^2=x;y^2=y;z^2=z$ do đó $x=y=z=1$

Thử $x=y=z=1$ vào $2016\left(x-y\sqrt{2001}\right)=2015\left(y-z\sqrt{2001}\right)$ ta thấy không thỏa mãn.

Vậy không tìm được x, y, z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+xz}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$$

- ***Phân tích.*** *Để ý đến giả thiết ta có biến đổi* $3x+yz=\left(x+y+z\right)x+yz=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$. *Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá* $\left(\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)\le\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}$. *Như vậy ta được*

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}\le\frac{x}{x+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Đến đây áp dụng tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức.

- **Lời giải.** Ta có $3x+yz=\left(x+y+z\right)x+yz=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$ (vì $x+y+z=3$)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $\left(\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)^2\le\left(x+y\right)\left(z+x\right)$

Suy ra ta được $\left(\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)\le\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}=\sqrt{3x+yz}$

Từ đó ta có $x + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \le x + \sqrt{3x + yz}$.

Do đó $\dfrac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \le \dfrac{x}{x + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$

Chứng minh tương tự ta được $\dfrac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} \le \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$; $\dfrac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \le \dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$

Cộng các vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \le 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 4 (3.0 điểm).

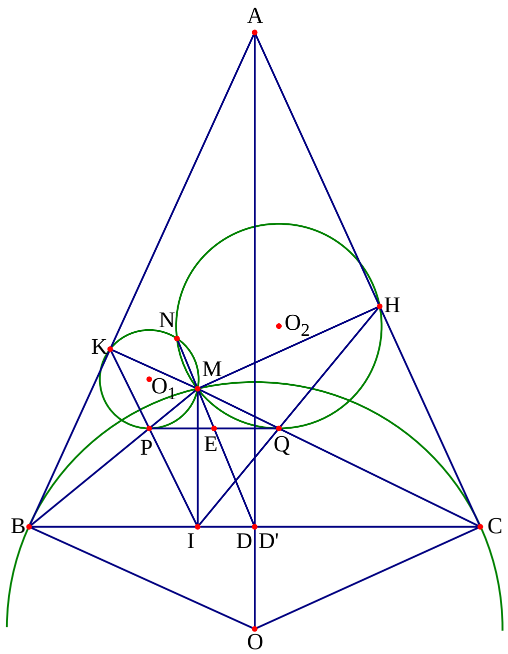
- ***Phân tích.***

+ Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Để chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) ta chứng minh $\widehat{MQP} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{MQ}$. Chú ý đến các tứ giác BIMK và CIMH nội tiếp đường tròn nên ta suy ra được tứ giác MPIQ nội tiếp, điều này dẫn đến $\widehat{MQP} = \widehat{MIK} = \widehat{MHI}$. Như vậy ta có $\widehat{MQP} = \widehat{MHI} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{MQ}$.

Hoàn toàn tương tự ta có điều phỉa chứng minh.

+ Chứng minh rằng ba điểm M, N, D thẳng hàng.



Gọi E và D′ lần lượt là giao điểm của NM với PQ và BC. Khi đó ta cần chứng minh D′ là trung điểm của BC. Để ý rằng ta có hai tam giác PEM và NEP đồng dạng nên $PE^2 = EM.EN$ và hai tam giác QEM và NEQ đồng dạng nên $QE^2 = EM.EN$, dẫn đến $EP = EQ$. Lại thấy PQ và BC song song với nhau nên suy ra $\dfrac{EP}{D'B} = \dfrac{EQ}{D'C}$. Đến đây ta được $BD' = CD'$, do đó hai điểm D′ và D trùng nhau. Suy ra N, M, D thẳng hàng.

- **Lời giải.**

a) Tứ giác BIMK và CIMH nội tiếp $\widehat{KIM} = \widehat{KBM}; \widehat{HIM} = \widehat{HCM}$

Do đó ta có $\widehat{PIQ} = \widehat{KIM} + \widehat{HIM} = \widehat{KBM} + \widehat{HCM}$

Mà $\widehat{KBM} = \widehat{ICM}$ và $\widehat{HCM} = \widehat{IBM}$ nên $\widehat{PIQ} = \widehat{ICM} + \widehat{IBM}$

Ta lại có $\widehat{PMQ} + \widehat{ICM} + \widehat{IBM} = 180^0$ do đó $\widehat{PMQ} + \widehat{PIQ} = 180^0$

Do đó tứ giác MPIQ nội tiếp nên $\widehat{MQP} = \widehat{MIK}$. Mà $\widehat{MIK} = \widehat{MCI}$ nên $\widehat{MQP} = \widehat{MCI}$

Ta có $\widehat{MHI} = \widehat{MCI}$, mà ta có $\widehat{MQP} = \widehat{MCI}$ nên suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MHI} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{MQ}$

Và hai tia QP, QH nằm khác phía đối với QM nên PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) tại tiếp điểm Q

Tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) tại tiếp điểm P.

Từ đó suy ra PQ là tiếp tuyến chung của đường tròn (O_1) và (O_2).

b) Gọi E và D′ lần lượt là giao điểm của NM với PQ và BC

Do hai tam giác PEM và NEP đồng dạng nên $PE^2 = EM.EN$

Do hai tam giác QEM và NEQ đồng dạng nên $QE^2 = EM.EN$

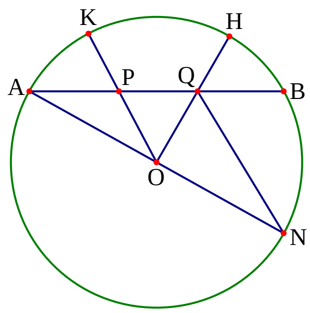
Từ đó suy ra $PE^2 = EQ^2 \Rightarrow EP = EQ$

Trong tam giác MBC có PQ // BC (do $\widehat{MQP} = \widehat{MCI}$ chứng minh trên)

Nên suy ra $\frac{EP}{D'B} = \frac{EQ}{D'C}$. Mà (hệ quả của định lí Thales)

Mà $EP = EQ$ nên $BD' = CD'$ do đó hai điểm D′ và D trùng nhau. Suy ra N, M, D thẳng hàng.

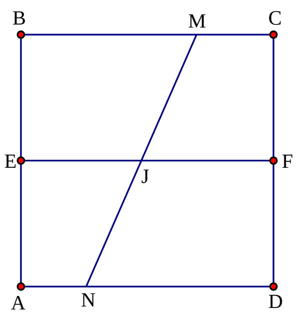
2) Trên dây cung AB của đường tròn (O) (AB không đi qua tâm O) lấy hai điểm P và Q sao cho $AP = PQ = QB$. Vẽ bán kính OK, OH thứ tự qua điểm P và điểm Q. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AK} < \overset{\frown}{KH}$

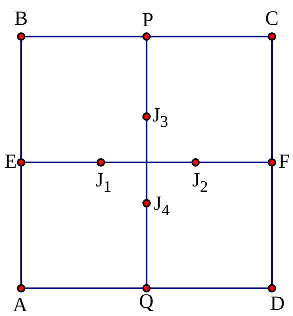


- **Lời giải.** Vẽ đường kính AN của đường tròn (O). Suy ra OP là đường trung bình của tam giác AQN. Suy ra PO song song với QN, do đó ta được $\widehat{AOP} = \widehat{ONQ}$ và $\widehat{POQ} = \widehat{OQN}$, từ đó suy ra PO và QN song song với nhau, nên ta được $\widehat{AOP} = \widehat{ONQ}$ (đồng vị) và $\widehat{POQ} = \widehat{OQN}$ (so le trong). Xét tam giác ONQ có $OQ < ON$ nên $\widehat{ONQ} < \widehat{OQN}$ suy ra $\widehat{AOP} < \widehat{POQ}$. Hay ta được $\widehat{AOK} < \widehat{KOH}$ nên $\overset{\frown}{AK} < \overset{\frown}{KH}$

Bài 5 (1.0 điểm). Cho 2017 đường thẳng phân biệt đều cắt hai cạnh đối của một hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là $\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng trong 2017 đường thẳng trên có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

- **Lời giải.** Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải là chia hình vuông thành hai tứ giác).





Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong số 2017 đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N.

Ta có $\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}.AB.\left(BM + AN\right)}{\frac{1}{2}.CD.\left(MC + ND\right)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{1}{2}$, ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng.

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF và J_3, J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn $\frac{EJ_1}{J_1F} = \frac{FJ_2}{J_2F} = \frac{PJ_3}{J_3Q} = \frac{QJ_4}{J_4P} = \frac{1}{2}$.

Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có 2017 đường thẳng, nên theo nguyên lí dirichlet phải tồn tại ít nhất một trong bốn điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất 505 trong 2017 đường thẳng đã cho đi qua. Vậy có ít nhất ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Bài toán tổng quát 1: *Cho* $4n + 1\left(n \ge 2\right)$ *đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng* $\frac{1}{2}$. *Chứng minh rằng có ít nhất* $n + 1$ *đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.*

Bài toán tổng quát 2: *Cho* $4n + r\left(n \ge 2, r \ge 1\right)$ *đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình Chữ nhật thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng* $\frac{1}{2}$. *Chứng minh rằng có ít nhất* $n + 1$ *đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.*

Đề số 16

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH HƯNG YÊN

Năm học 2015 – 2016

Câu 1. (2.0 điểm). Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016}$

Câu 2. (5.0 điểm).

a) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + 1 - m (m \neq 0)$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

b) Tìm các số có hai chữ số $\overline{ab}(a \neq b)$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương.

Câu 3. (2.0 điểm). Giải phương trình $x^2 + 3x.\sqrt[3]{3x+2} - 12 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}+8}{x}$

Câu 4. (3.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 \end{cases}$

Câu 5. (6.0 điểm).

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC (M không trùng với B,C). Đường thẳng qua A và vuông góc với CM tại H cắt tia BM tại K

a) Chứng minh rằng H là trung điểm của AK

b) Chứng minh rằng điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi. Tính bán kính đường tròn đó khi $R = 3\sqrt{3}$

c) Gọi D là giao của AM và BC. Tìm vị trí điểm M sao cho tích hai bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác MBD, MCD đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (2.0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{3a - ab - ca + 2bc} + \frac{b^3}{3b - bc - ab + 2ca} + \frac{c^3}{3c - ca - bc + 2ab} + 3abc$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (2.0 điểm). Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016}$

- ***Phân tích.*** *Nhìn vào bài toán, với giả thiết có căn bậc 3 và ở trong căn của A cũng có mũ 3 nên ta nghĩ đến việc lập phương 2 vế của giả thiết. Thấy ở vế phải có 3 số nên nghĩ đến việc chuyển 1 sang để xuất hiện hằng đẳng thức. Ta có:*

$$x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow (x-1)^3 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$

Đến đây ta tìm cách liên hệ giữa tổng trong căn và giả thiết. Ta biến đổi lại như sau:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 + 6x - 2017 = 6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$

Chuyển vế phần thừa và để mất căn bậc 3 ta sử dụng lại giả thiết kiểu $x - 1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Khi đó $x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 = 6 + 6(x-1) - 6x + 2017 = 2017$

Lấy căn hai vế ta tính được giá trị của A với vế trái là một số không âm

• **Lời giải.** Từ giả thiết ta có $x > 1$ nên $x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 > 0$. Biến đổi giả thiết ta được

$$x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$
$$\Rightarrow (x-1)^3 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 + 6x - 2017 = 6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 = 6 + 6(x-1) - 6x + 2017$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 2016 = 2017$$

Do đó ta có $A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016} = \sqrt{2017}$.

• ***Nhận xét.***

+ *Cũng với ý tưởng làm gần tương tự nhưng ta lại có thể có suy nghĩ dẫn đến lời giải trên theo một chiều hướng khác. Nhìn vào biểu thức trong căn ta nảy ra ý tưởng sử dụng hằng đẳng thức dạng* $(x-1)^3$. *Có* $x - 1$ *dễ dàng liên tưởng tới việc sử dụng giả thiết. Sau đó xuất hiện* $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ *thì ta lại sử dụng giả thiết thêm một lần nữa và ta tính được A*

$$A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016} = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6x + 2017}$$
$$= \sqrt{(x-1)^3 - 6x + 2017} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 - 6x + 2017}$$
$$= \sqrt{6 + 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 - 6x + 2017} = \sqrt{6 + 6(x-1) - 6x + 2017} = \sqrt{2017}$$

+ *Một cách khác biến đổi giả thiết là* $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x + 1 = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

Khi đó ta được $x + 1 = \sqrt[3]{2}.x$ *nên ta được* $(x+1)^3 = 2x^3$ *hay* $x^3 - 3x^2 - 3x = 1$.

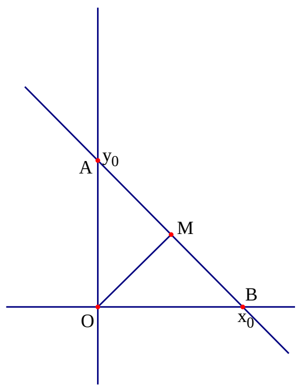
Từ đó ta được $A = \sqrt{x^3 - 3x^2 - 3x + 2016} = \sqrt{2017}$.

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = mx + 1 - m (m \neq 0)$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Do đường thẳng d có hệ số m khác 0 nên đường thẳng d cắt hai trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại* x_0 *và* y_0. *Giả sử đường thẳng d cắt hai trục Ox và Oy như hình vẽ.*

Ta cần biểu diễn được đoạn MO theo m. Muốn vậy ta cần xác định được x_0 *và* y_0.



Cho $x = 0$, *khi đó đường thẳng d cắt Oy tại* $y_0 = 1 - m$.

Cho $y = 0$, *khi đó đường thẳng d cắt Ox tại* $x_0 = \dfrac{m-1}{m}$.

Từ đó ta được $OA = |1 - m|$ *và* $OB = \left|\dfrac{m-1}{m}\right|$. *Tam giác AOB vuông tại H có OM là đường cao nên*

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{(m-1)^2} + \left(\frac{m}{m-1}\right)^2 = \frac{m^2+1}{m^2 - 2m + 1}$$

Chú ý rằng để có hệ thức trên ta cần có $m \neq 1$.

Bài toán yêu cầu tìm OM lớn nhất, do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{OM^2}$.

Từ đó ta có $\frac{1}{OM^2} = \frac{m^2+1}{m^2-2m+1} = \frac{m^2-2m+1+2m-2+2}{m^2-2m+1} = 1 + \frac{2}{m-1} + \frac{2}{\left(m-1\right)^2}$.

Ta có $\frac{2}{\left(m-1\right)^2} + \frac{2}{m-1} + 1 = 2\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, *dấu bằng xảy ra khi* $m = -1$.

Từ đó suy ra $OM \leq \sqrt{2}$, *dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi* $m = -1$.

• **Lời giải.** Do đường thẳng d có hệ số m khác 0 nên đường thẳng d cắt hai trục tọa độ Ox và Oy lần lượt tại x_0 và y_0.

+ Xét trường hợp $m = 1$, khi đó đường thẳng d đi qua góc tọa độ O nên độ dài khoảng cách bằng 0.

+ Xét trường hợp $m \neq 1$, khi đó giả sử đường thẳng d cắt hai trục Õ và Oy như hình vẽ sau.

Cho $x = 0$, khi đó đường thẳng d cắt Oy tại $y_0 = 1 - m$.

Cho $y = 0$, khi đó đường thẳng d cắt Ox tại $x_0 = \frac{m-1}{m}$.

Từ đó ta được $OA = \left|1 - m\right|$ và $OB = \left|\frac{m-1}{m}\right|$. Tam giác AOB vuông tại H có OM là đường cao nên

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{\left(m-1\right)^2} + \left(\frac{m}{m-1}\right)^2 = \frac{m^2+1}{m^2-2m+1}$$

Từ đó ta có $\frac{1}{OM^2} = \frac{m^2+1}{m^2-2m+1} = \frac{m^2-2m+1+2m-2+2}{m^2-2m+1} = 1 + \frac{2}{m-1} + \frac{2}{\left(m-1\right)^2}$.

Mà $\frac{2}{\left(m-1\right)^2} + \frac{2}{m-1} + 1 = 2\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $m = -1$.

Do đó ta được $OM \leq \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất là $\sqrt{2}$, khi $m = -1$.

b) Tìm các số có hai chữ số $\overline{ab}(a \neq b)$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương.

• ***Phân tích.*** *Đây là bài toán số học về chữ số. Khi giải dạng toán này ta thường biểu diễn các số có nhiều chữ số trong đề bài qua các chữ số.*

Ở đây trước hết ta viết lại số $n = 10a + b - 10b - a = 9\left(a - b\right)$. *Vì n là số chính phương và 9 cũng là một số chính phương nên* $a - b$ *là một số chính phương. Đến đây chỉ cần xét các giá trị a và b cho đúng với điều kiện. Ta có* $a, b \neq 0$ *và* a, b *là các chữ số nên* $a - b < 9$ *do đó* $a - b \in \left\{1, 4\right\}$

Đến đây xét từng trường hợp của $a - b$ *ta tìm được các số* $\overline{ab}$ *thỏa mãn bài toán.*

- **Lời giải.** Ta có $n = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a-b)$. Vì n và 9 là các số chính phương nên $(a-b)$ cũng là số chính phương. Mặt khác $a, b \neq 0$ và $a - b < 9$ nên $a - b \in \{1, 4\}$

Với $a, b \neq 0$ và $a \geq b$ ta xét các trường hợp sau:

+ Với $a - b = 1$ thì ta được các số 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98.

+ Với $a - b = 4$ thì ta được các số 51; 62; 73; 84; 95

Vậy các số có hai chữ số thỏa mãn đề bài là 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98; 51; 62; 73; 84; 95.

Câu 3 (2.0 điểm). Giải phương trình $x^2 + 3x.\sqrt[3]{3x+2} - 12 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+8}{x}$

- ***Phân tích.*** *Phương trình có chứa cả bậc 2 và bậc 3. Tuy nhiên căn bậc 2 đứng độc lập nên dễ dàng loại bỏ vì* $\frac{\sqrt{x}+8}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{8}{x}$. *Quy đồng ta được* $x^3 + 3x^2.\sqrt[3]{3x+12} - 12x = 8$. *Ở đây ta không thể sử dụng phép nâng lên lũy thừa vì bậc sẽ quá cao. Nên có thể sử dụng là phương pháp phân tích thành tích. Phương trình chỉ chứa một căn thức bậc ba nên ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa phương trình về phương trình tích. Để làm được ta viết lại phương trình thành* $x^3 + 3x^2.\sqrt[3]{3x+2} - 4(3x+2) = 0$.

Quan sát phương trình ta nhận thấy nếu xem $\sqrt[3]{3x+2}$ *là một ẩn thì phương trình trên có dạng đẳng cấp bậc 3. Do đó khi chia cả hai vế cho* x^3 *thì ta thu được phương trình bậc 3 một ẩn. Chú ý rằng với điều kiện* $x > 0$ *thì phép chia luôn thực hiện được.*

Khi đó ta được $1 + \frac{3\sqrt[3]{3x+2}}{x} - \frac{4(3x+2)}{x^3} = 0$ *Đặt* $\frac{\sqrt[3]{3x+2}}{x} = t > 0$. *Khi đó phương trình trở thành* $1 + 3t - 4t^3 = 0$. *Đến đây xem như ta giải được phương trình.*

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$.

Phương trình tương đương với $x^3 + 3x^2.\sqrt[3]{3x+12} - 12x = 8 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2.\sqrt[3]{3x+2} - 4(3x+2) = 0$

Chia cả hai vế cho x^3 ta được phương trình $1 + \frac{3\sqrt[3]{3x+2}}{x} - \frac{4(3x+2)}{x^3} = 0$

Đặt $\frac{\sqrt[3]{3x+2}}{x} = t > 0$. Khi đó phương trình trở thành $1 + 3t - 4t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, do $t > 0$.

Từ đó suy ra $\sqrt[3]{3x+2} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, do $x > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

- ***Nhận xét.*** *Với tư tưởng đưa về phương trình tích, ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ không hoàn toàn như sau. Phương trình đã cho tương đương với* $x^3 + 3x^2.\sqrt[3]{3x+2} - 4(3x+2) = 0$.

Đặt $\sqrt[3]{3x+2} = y \geq 0$ *thì phương trình trở thành* $x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 0$. *Đến đây dễ dàng phân tích được phương trình trên thành tích*

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2y + 4x^2y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-y) + 4y(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 4xy + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)^2 = 0$$

Vì $x > 0, y \geq 0$ *nên* $x = y$ *hay* $\sqrt[3]{3x+2} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Câu 4. (3.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 \end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Hệ phương trình đã cho có một phương trình có bậc hai nên ta sẽ đi kiểm tra xem phương trình này có thể phân tích được hay không. Do là phương trình có bậc hai đối với mỗi ẩn nên ta sẽ kiểm tra xem phương trình có biệt thức* Δ *chính phương hay không.*

Xét phương trình thứ nhất $2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x-1)3y + 2x^2 - 4x + 2 = 0$ *là phương trình bậc hai ẩn y và x là tham số.*

Khi đó ta có $\Delta = 9(x-1)^2 - 4(2x^2 - 4x + 2) = (x-1)^2$, *như vậy phương trình thứ nhất phân tích được thành tích. Đến đây ta giải được hệ phương trình.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x^2 - y + 3 \geq 0; y - x + 1 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x-1)3y + 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn y có x là tham số.

Khi đó ta có $\Delta = 9(x-1)^2 - 4(2x^2 - 4x + 2) = (x-1)^2$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x - 1 - (x-1)}{2} \\ y = \dfrac{x - 1 + (x-1)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x - 1 \end{array}\right.$

○ Với $y = 0$ suy ra $x = 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được một phương trình đúng

Nên đó là 1 nghiệm của phương trình

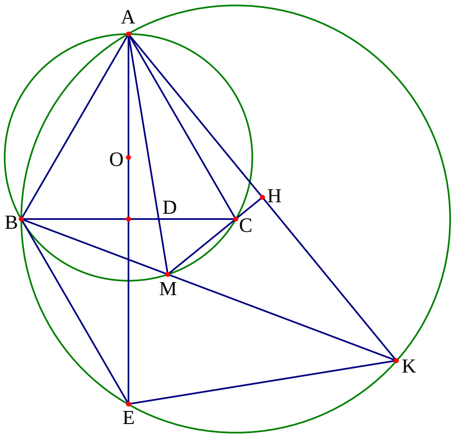
○ Với $y = x - 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

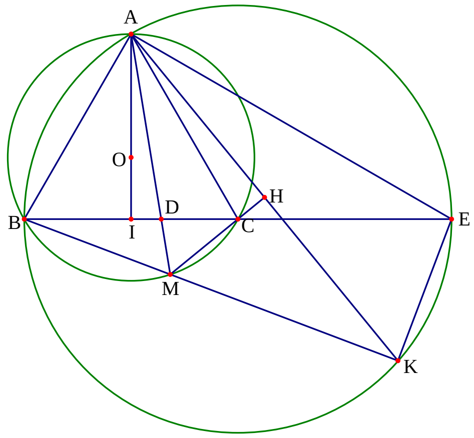
$$\sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = -1 \\ x = 1; y = 0 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;0)$ và $(0;-1)$.

• ***Nhận xét.*** *Bản chất của phương trình thứ nhất của hệ trên là phương trình phân tích được thành tích. Do là phương trình thứ nhất có bậc hai đối với mỗi ẩn nên ta có thể xem một ẩn là tham số và khi đó ta sử dụng điều kiện* Δ *chính phương để phân tích phương trình thành tích.*

Câu 5 (6.0 điểm).





a) Chứng minh rằng H là trung điểm của AK

• ***Phân tích.*** *Bài toán cho AK vuông góc với MC tại H, do đó để chứng minh* $AH = KH$ *ta đi chứng minh tam giác AMK cân. Để ý rằng* $\widehat{BMA} = \widehat{CMA} = 60^0$ *và* $\widehat{HMC} = \widehat{BAC} = 60^0$*, như vậy trong tam giác AMK có MH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên AMK là tam giác cân. Đến đây ta có lời giải.*

• **Lời giải.** Tam giác ABC đều và tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{BMA} = \widehat{CMA} = 60^0$.

Mà ta có tứ giác ABMC nội tiếp nên $\widehat{KMC} = \widehat{BAC} = 60^0$. Từ đó ta được $\widehat{KMC} = \widehat{CMA} = 60^0$ nên KH là đường phân giác của tam giác AMK. Như vậy tam giác AMK có MH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên cân tại M. Do đó MH là đường trung tuyến hay H là trung điểm của AK.

b) Chứng minh rằng điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi. Tính bán kính đường tròn đó khi $R = 3\sqrt{3}$

• ***Phân tích.***

∘ *Để chứng minh điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi ta cần tìm được đường tròn cố định đi qua K. Gọi chân đường vuông góc từ đỉnh A trên BC là I*

+ Yếu tố cố định: Tam giác đều ABC và đường tròn (O)

+ Dự đoán điểm cố định: Khi M trùng với B thì H trùng với I thì AK là đường trung trực của BC, BC là đường trung trực của AK nên khi đó ta có $AC = KC$*. Khi M trùng với C thì ABK là tam giác vuông và H là trung điểm của AK nên ta lại có* $AC = KC$*. Chú ý rằng C cố định và CA không đổi nên ta dự đoán K luôn di chuyển trên đường tròn cố định* $\left(C;CA\right)$*.*

Ta có các hướng để chứng minh K thuộc đường tròn $\left(C;CA\right)$*.*

+ Hướng 1. *Sử dụng phần hình khi B trùng với M. Gọi điểm đối xứng với A qua BC là E. Vì A cố định nên E cố định. Vẽ đường tròn tâm C bán kính CA. Như vậy ta thấy E thuộc đường tròn* $\left(C;CA\right)$*. Ta cần chứng minh tứ giác ABEK nội tiếp đường tròn tâm C. Nhìn lại ý a ta thấy cần chứng minh tam giác AMK cân, ta thử xem nó giúp được điều gì. Muốn chứng minh tứ giác ABEK nội tiếp thì ta đi chứng minh* $\widehat{AEB} = \widehat{AKB}$ *là hợp lý nhất vì có một góc của tam giác AMK.*

Ta có $\widehat{AMK} = 180^0 - \widehat{AMB} = 120^0$ *và* $\widehat{AKB} = \dfrac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$.

Mặt khác vì tam giác ABC đều nên AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ *nên* $\widehat{BAE} = 30^0$*, vì E là điểm đối xứng với A qua BC nên tam giác AEB cân suy ra* $\widehat{BAE} = \widehat{BEA} = 30^0$.

Từ đó ta được $\widehat{AEB} = \widehat{AKB}$ *hay tứ giác ABEK nội tiếp. Đến đây ta suy ra điều phải chứng minh.*

+ ***Hướng 2.*** *Sử dụng phần hình khi với C trùng với M.*

Vẽ đường kính BE của đường tròn tâm C bán kính BC, khi đó tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(C, BC\right)$ *cố định. Ta cần chứng minh tứ giác ABKE nội tiếp đường tròn. Nhận thấy tam giác ABE vuông tại A và có* $\widehat{ABE} = 60^0$ *nên* $\widehat{AEB} = 30^0$. *Mà theo như hướng thứ nhất ta thấy* $\widehat{AKB} = 30^0$. *Do đó* $\widehat{AFB} = \widehat{AKB} = 30^0$ *nên tứ giác nội tiếp. Từ đó ta có điều phải chứng minh.*

+ ***Hướng 3.*** *Nhận thấy CH là trung trực của AK nên ta luôn có* $CA = CK$, *điều này có nghĩa là K thuộc đường tròn* $\left(C, CA\right)$ *cố định.*

∘ *Để tính bán kính* $\left(C, CA\right)$ *khi* $R = 3\sqrt{3}$ *ta quy bài toán về tính BC. Để tính được BC ta cần tính được BI theo định lý Pitago ta cần tính OI để áp dụng. Để ý đến* $\widehat{BOI} = 2\widehat{BAE} = 60^0$ *nên ta có*

$$\cos\widehat{BOI} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2} \text{ mà } OB = R = 3\sqrt{3} \text{ nên } OI = \frac{1}{2}.3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$BI = \sqrt{OB^2 - OI^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{27 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} \Rightarrow BC = 2.\frac{9}{2} = 9$$

Vậy bán kính đường tròn $\left(C, CA\right)$ *là 9(cm).*

- **Lời giải.**

+ Chứng minh rằng điểm K luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi.

Cách 1. Gọi điểm đối xứng với A qua BC là E. Vì A cố định nên E cố định. Vẽ đường tròn tâm C bán kính CA. Như vậy ta thấy E thuộc đường tròn $\left(C; CA\right)$ cố định.

Ta có $\widehat{AMK} = 180^0 - \widehat{AMB} = 120^0$. Mà tam giác AMK cân nên $\widehat{AKB} = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$.

Mặt khác vì tam giác ABC đều nên AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = 30^0$, vì E là điểm đối xứng với A qua BC nên tam giác AEB cân suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA} = 30^0$.

Từ đó ta được $\widehat{AEB} = \widehat{AKB}$ hay tứ giác ABEK nội tiếp. Từ đó suy ra K thuộc đường tròn $\left(C; CA\right)$ cố định.

Cách 2. Vẽ đường kính BE của đường tròn tâm C bán kính BC, khi đó tam giác ABC nội tiếp đường tròn $\left(C, BC\right)$ cố định. Ta có tam giác ABE vuông tại A và có $\widehat{ABE} = 60^0$ nên $\widehat{AEB} = 30^0$.

Mặt khác dễ thấy $\widehat{AKB} = 30^0$. Do đó $\widehat{AFB} = \widehat{AKB} = 30^0$ nên tứ giác ABKE nội tiếp. Từ đó suy ra K thuộc đường tròn $\left(C; AB\right)$ cố định.

Cách 3. Theo ý a ta có MH là đường trung trực của AK và C thuộc MK nên ta có $AC = CK$. Mà điểm C cố định và CA không đổi nên K thuộc đường tròn $\left(C; CA\right)$ cố định.

+ Tính bán kính đường tròn $\left(C, CA\right)$ khi $R = 3\sqrt{3}$.

Để ý đến $\widehat{BOI} = 2\widehat{BAE} = 60^0$ nên $\cos\widehat{BOI} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2}$ mà $OB = R = 3\sqrt{3}$ nên

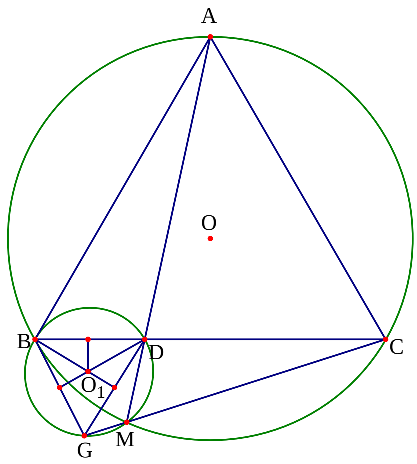
$OI = \frac{1}{2}.3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lý Pitago ta có

$$BI = \sqrt{OB^2 - OI^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{27 - \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} \Rightarrow BC = 2.\frac{9}{2} = 9$$

Vậy bán kính đường tròn $\left(C, CA\right)$ là 9(cm).

c) Tìm vị trí điểm M sao cho tích hai bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác MBD, MCD đạt giá trị lớn nhất.

- ***Phân tích.*** *Gọi* $R_1; R_2$ *lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMB và CMD. Chú ý rằng khi M thay đổi thì D thay đổi trên BC. Do vậy các bán kính* $R_1; R_2$ *thay đổi theo. Tuy nhiên ta thấy có hai góc không đổi đó là* $\widehat{BMD} = \widehat{CMD} = 60^0$. *Do đó để tìm được vị trí của M thỏa mãn cầu bài toán ta cần biểu diễn được hai bán kính* $R_1; R_2$ *theo BD và CD.*



Do $\widehat{BMD} = \widehat{CMD} = 60^0$ *nên các góc ở tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMB và CMD chắn hai cung BD và CD tương ứng có số đo là* 120^0.

Từ đó ta tính được $R_1 = \frac{BD\sqrt{3}}{3}; R_2 = \frac{CD\sqrt{3}}{3}$. *Từ đó ta có* $R_1R_2 = \frac{BD.CD}{3}$.

Mà ta có $BD.CD \le \frac{1}{4}\left(BD + CD\right)^2 = \frac{1}{4}BC^2$ *không đổi, dấu bằng xẩy ra khi* $BD = CD$.

Từ đó $R_1R_2 \le \frac{1}{12}BC^2$, *dấu bằng xẩy ra khi M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn* $\left(O\right)$.

- **Lời giải.** Gọi $R_1; R_2$ lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMB và CMD. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Dễ thấy $\widehat{BMD} = 60^0$ nên ta được $\widehat{BO_1D} = 120^0$.

Từ đó ta được $\widehat{O_1BD} = 30^0$. Ta có $R_1 = O_1B = \frac{1}{2}.\frac{BD}{\cos 30^0} = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{BD\sqrt{3}}{3}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $R_2 = \frac{CD\sqrt{3}}{3}$. Từ đó ta tính được $R_1 = \frac{BD\sqrt{3}}{3}; R_2 = \frac{CD\sqrt{3}}{3}$.

Hay $R_1R_2 = \frac{BD.CD}{3}$. Mà ta có $BD.CD \le \frac{1}{4}\left(BD + CD\right)^2 = \frac{1}{4}BC^2$ không đổi, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $BD = CD$. Từ đó $R_1R_2 \le \frac{1}{12}BC^2$, dấu bằng xẩy ra khi M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn $\left(O\right)$.

Vậy khi M nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O) thì R_1R_2 có giá trị lớn nhất.

∘ ***Nhận xét.*** *Trong ý b của bài toán hình ta thấy có ba cách giải. Về mặt bản chất ba cách này như nhau đó là đều khai thác các kết quả của ý a. Trong hai cách đầu thì việc dựng điểm F dễ thấy hơn điểm E. Còn cách thứ ba ngắn gọn hơn nhiều. Trong ý c của bài toàn, để dễ xác định độ lớn của $R_1;R_2$ theo các đoạn thẳng BD và CD ta có thể dựng các tam giác đều BGD như hình vẽ, khi đó tứ giác BGMD nội tiếp đường tròn tâm O_1.*

Câu 5. (2.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a^3}{3a-ab-ca+2bc}+\frac{b^3}{3b-bc-ab+2ca}+\frac{c^3}{3c-ca-bc+2ab}+3abc$

• ***Phân tích.*** *Vì vai trò của a, b, c như nhau nên kết hợp giả thiết ta dự đoán rằng biểu thức có giá trị lớn nhất $a=b=c=1$. Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có*

$$\frac{a^3}{3a-ab-ca+2bc}=\frac{a^3}{(a+b+c)a-ab-ca+2bc}=\frac{a^3}{a^2+2bc}$$

Khi đó ta viết lại P thành $P=\frac{a^3}{a^2+2bc}+\frac{b^3}{b^2+2ca}+\frac{c^3}{c^2+2ab}+3abc$

Nhìn vào bất đẳng thức ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki nhưng chiều lại bị ngược vì ta đang cần tính giá trị lớn nhất. Nên ta cần đổi chiều bất đẳng thức để sử dụng nó.

Để ý rằng $\frac{a^3}{a^2+2bc}=a-\frac{2abc}{a^2+2bc}$. *Hoàn toàn tương tự thì ta được*

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)-\frac{2abc}{a^2+2bc}-\frac{2abc}{b^2+2ac}-\frac{2abc}{c^2+2ab}+3abc\\&=3+abc\left[3-2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)\right]\end{aligned}$$

Khi đó ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức như sau

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}=1$$

Ngoài ra theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt[3]{abc}\le 1\Rightarrow abc\le 1$

Đến đây ta có thể tìm được giá trị lớn nhất của P.

• **Lời giải.** Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có

$$\frac{a^3}{3a-ab-ca+2bc}=\frac{a^3}{(a+b+c)a-ab-ca+2bc}=\frac{a^3}{a^2+2bc}$$

Khi đó ta viết lại P thành $P=\frac{a^3}{a^2+2bc}+\frac{b^3}{b^2+2ca}+\frac{c^3}{c^2+2ab}+3abc$

Lại thấy $\frac{a^3}{a^2+2bc}=a-\frac{2abc}{a^2+2bc}$ nên áp dụng hoàn toàn tương tự thì ta được

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)-\frac{2abc}{a^2+2bc}-\frac{2abc}{b^2+2ac}-\frac{2abc}{c^2+2ab}+3abc\\&=3+abc\left[3-2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\right)\right]\end{aligned}$$

Khi đó ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức như sau

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}\ge\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}=1$$

Ngoài ra theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt[3]{abc}\le 1\Rightarrow abc\le 1$

Từ đó $P\le 1+3=4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Đề số 17

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH NGHỆ AN

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Chia 18 vật có khối lượng $2016^2;2015^2;2014^2;...;1999^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x+171=y^2$.

Câu 2 (6.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2+6x+1=\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2+1=y^2-4x\\ x^2+xy+y^2=1\end{cases}$

Câu 3 (3.0 điểm).

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

Câu 4 (6.0 điểm).

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm (O; R). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh rằng $\widehat{HPO}=\widehat{HQO}$

b) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (2.0 điểm).

Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm trong chung.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Chia 18 vật có khối lượng $2016^2;2015^2;2014^2;...;1999^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

- **Lời giải.** Ta xó nhận xét

$$n^2+\left(n+5\right)^2=2n^2+10n+25=X+25$$

$$\left(n+1\right)^2+\left(n+4\right)^2=2n^2+10n+17=X+17$$

$$\left(n+2\right)^2+\left(n+3\right)^2=2n^2+10n+13=X+13$$

Lần thứ nhất chia 6 vật có khối lượng $1999^2, 2000^2, 2001^2, 2002^2, 2003^2, 2004^2$ thành ba phần như sau

$$1999^2+2004^2=1999^2+\left(1999+5\right)^2=2.1999^2+10.1999+25=A+25$$
$$2000^2+2003^2=\left(1999+1\right)^2+\left(1999+4\right)^2=2.1999^2+10.1999+9=A+17$$
$$2001^2+2002^2=\left(1999+2\right)^2+\left(1999+3\right)^2=2.1999^2+10.1999+13=A+13$$

Lần thứ hai chia 6 vật có khối lượng $2005^2, 2006^2, 2007^2, 2008^2, 2009^2, 2010^2$ thành ba phần gồm

$$2005^2+2010^2=2005^2+\left(2005+5\right)^2=2.2005^2+10.2005+25=B+25$$
$$2006^2+2009^2=\left(2005+1\right)^2+\left(2005+4\right)^2=2.2005^2+10.2005+17=B+17$$
$$2007^2+2008^2=\left(2005+2\right)^2+\left(2005+3\right)^2=2.2005^2+10.2005+13=B+13$$

Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng $2011^2, 2012^2, 2013^2, 2014, 2015, 2016^2$ thành ba phần như sau

$$2011^2+2016^2=2011^2+\left(2011+5\right)^2=2.2011^2+10.2011+25=C+25$$
$$2012^2+2015^2=\left(2011+1\right)^2+\left(2011+4\right)^2=2.2011^2+10.2011+17=C+17$$
$$2013^2+2014^2=\left(2011+2\right)^2+\left(2011+3\right)^2=2.2011^2+10.2011+13=C+13$$

Nhận thấy

$$A+25+B+17+C+13=A+17+B+13+C+25=A+13+B+25+C+17=A+B+C+55$$

Do đó ta chia theo ba nhóm gồm

Nhóm 1: $A+25+B+17+C+13=1999^2+2004^2+2006^2+2009^2+2013^2+2014^2$

Nhóm 2: $A+17+B+13+C+25=2000^2+2003^2+2007^2+2008^2+2011^2+2016^2$

Nhóm 3: $A+13+B+25+C+17=2001^2+2002^2+2005^2+2010^2+2012^2+2015^2$

Khi đó khối lượng của mỗi nhóm đều bằng $A+B+C+55$ gam.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x+171=y^2$.

• **Lời giải.** Dễ thấy khi $x=1$ thì phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Xét $x\ge 2$, khi đó ta viết phương trình đã cho về dạng: $9.\left(3^{x-2}+19\right)=y^2\left(x\ge 2\right)$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=\left(3^{2k+1}+1\right)+18=4.B+18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương. Do đó $x-2=2k$ là số chẵn

Ta có $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow \left(z-3^k\right)\left(z+3^k\right)=19$.

Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k<z+3^k$ nên $\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được $\left(x;y\right)=\left(6;30\right)$.

Câu 2 (6.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + 6x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

• ***Phân tích.*** *Phương trình đã cho chỉ chứa một căn thức bậc hai và các biểu thức chứa ẩn có bậc hai nên ý tưởng đầu tiên là thực hiện phép nâng lên lũy thừa. Tuy nhiên phương trình thu được sau phép nâng lên lũy thừa có bậc bốn và ta không nhẩm được nghiệm đẹp nào nên ý tưởng này khó thực hiện được. Cũng từ hình thức của phương trình ta để ý đến phép đặt ẩn phụ không hoàn toàn.*

Trước hết ta viết phương trình lại thành $x^2 + 2x + 3 - (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x - 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ *ta thu được phương trình* $t^2 - (2x+1)t + 4x - 2 = 0$, *khi đó ta có*

$$\Delta_t = (2x+1)^2 - 4(4x-2) = 4x^2 + 4x + 1 - 16x + 8 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

Do Δ_t *có dạng chính phương nên phương trình ẩn t phân tích được thành tích.*

Đến đây ta có lời giải cho phương trình.

• **Lời giải.** Phương trình đã cho xác định với mọi x. Phương trình đã cho được viết lại thành

$$x^2 + 2x + 3 - (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x - 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ta thu được phương trình $t^2 - (2x+1)t + 4x - 2 = 0$, khi đó ta có

$$\Delta_t = (2x+1)^2 - 4(4x-2) = 4x^2 + 4x + 1 - 16x + 8 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 \geq 0$$

Suy ra phương trình có hai nghiệm là $t = \dfrac{2x+1-(2x-3)}{2} = 2$ và $t = \dfrac{2x+1+(2x-3)}{2} = 2x-1$.

+ Với $t = 2$ ta có phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

+ Với $t = 2x - 1$ ta có phương trình

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 3 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

Vậy phương đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}; \dfrac{3+\sqrt{15}}{3}\right\}$

• ***Nhận xét.*** *Ngoài phép đặt ẩn phụ không hoàn toàn để giải phương trình như trên ta có thể sử dụng phép nhân lương liên hợp như sau*

Dễ thấy $x = \dfrac{-1}{2}$ *không phải là nghiệm của phương trình.*

Xét $x \neq -\dfrac{1}{2}$, *khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình*

$$\frac{x^2+6x+1}{2x+1}=\sqrt{x^2+2x+3} \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2=\sqrt{x^2+2x+3}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1-2\left(2x+1\right)}{2x+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+2\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-2\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{2x+1}=\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2} \Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+2}-\frac{1}{2x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 \end{array}\right.$$

+ *Với* $x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$.

+ *Với* $\sqrt{x^2+2x+3}+2=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2+2x+3=\left(2x-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2};\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}\right\}$

+ *Ngoài ra ta biến đổi phương trình thành* $x^2+2x+3-\left(2x-1+2\right)\sqrt{x^2+2x+3}+2\left(2x-1\right)=0$.

Đặt $a=\sqrt{x^2+2x+3};b=2x-1\left(a\ge 0\right)$. *Khi đó phương trình trên được viết lại thành*

$$a^2-\left(b+2\right)a+2b=0 \Leftrightarrow a^2-ab-2a+2b=0 \Leftrightarrow \left(a-2\right)\left(a-b\right)=0$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

- ***Phân tích.*** *Để ý ta viết phương trình thứ nhất lại thành*

$$4x^2+1=y^2-4x \Leftrightarrow \left(2x+1\right)^2=y^2 \Leftrightarrow y=\pm\left(2x+1\right)$$

Đến đây ta xét từng trường hợp để giải hệ phương trình đã cho.

- **Lời giải.** Ta có

$$\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+1\right)^2=y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\left(2x+1\right) \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

+ Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+x\left(2x+1\right)+\left(2x+1\right)^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 7x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=-\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

+ Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2-x\left(2x+1\right)+\left(2x+1\right)^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) = (0;1), \left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)(0;-1), (-1;1)$

Câu 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

- ***Phân tích.*** *Chú ý đến chiều bất đẳng thức cần chứng minh ta có biến đổi sau*

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a + 1 - \frac{b+ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$

Ta cần chứng minh $\frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3$ *hay* $\frac{ab+bc+ca}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Để ý rằng ta có $a + b + c = 3$ *nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Ta có lời giải cho bài toán.*

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a + 1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a + 1 - \frac{b+ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b + 1 - \frac{c+bc}{2}$ và $\frac{c+1}{a^2+1} \geq c + 1 - \frac{a+ca}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ hay $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9$

Do đó: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2} + 3 - \frac{9}{6} = 3$

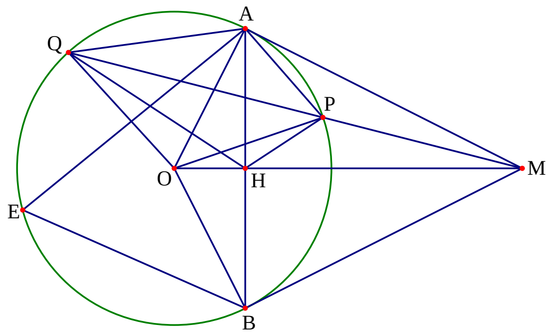
Vậy $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

- ***Nhận xét.*** *Phép chứng minh trong bài toán được gọi là kỹ thuật Cauchy ngược dấu.*

Câu 4 (6.0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm $(O;R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh rằng $\widehat{HPO} = \widehat{HQO}$

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh* $\widehat{HPO} = \widehat{HQO}$ *ta cần chỉ ra được tứ giác HOQP nội tiếp. Muốn vậy ta đi chứng minh* $\widehat{MHP} = \widehat{MQO}$. *Như vậy ta cần phải chỉ ra được* $\Delta MPH \backsim \Delta MOQ$. *Để ý rằng hai tam giác đó có góc* $\widehat{AMQ}$ *chung và* $MH.MO = MP.MQ = MA^2$. *Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*



• **Lời giải.** Tam giác MPA đồng dạng với tam giác MAQ nên ta được $MA^2 = MP.MQ$.

Tam giác MAO vuông tại A có đường cao AH nên $MA^2 = MH.MO$.

Từ hai kết quả trên suy ra $MP.MQ = MH.MO$ hay $\frac{MP}{MH} = \frac{MO}{MQ}$

Hai tam giác MPH và MOQ có góc M chung và $\frac{MP}{MH} = \frac{MO}{MQ}$ nên ta suy ra $\Delta MPH \backsim \Delta MOQ$.

Do đó ta được $\widehat{MHP} = \widehat{MQO}$. Từ đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HPO} = \widehat{HQO} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{OH}$.

b) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

• ***Phân tích.*** *Ta có* $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \ge \frac{2}{EA.EB}$, *như vậy để* $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ *có giá trị nhỏ nhất thì* $\frac{2}{EA.EB}$ *nhận giá trị nhỏ nhất và* $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} = \frac{2}{EA.EB}$. *Như vậy ta quy bài toán về tìm giá trị lớn nhất của* $EA.EB$. *Chú ý rằng* $S_{AEB} = \frac{1}{2}AE.BE.\sin\widehat{AEB}$ *và iểm E di chuyển trên cung lớn AB nên* $\widehat{AEB}$ *luôn là một góc nhọn không đổi. Như vậy ta cần tìm vị trí của E để diện tích tam giác AEB lớn nhất. Ta lại thấy* $S_{AEB} = \frac{1}{2}AB.EK$ *với AB không đổi và EK là đường cao hạ từ E. Như vậy* S_{AEB} *lớn nhất khi và chỉ khi EK lớn nhất, điều này xẩy ra khi E là điểm chính giữa cung lớn AB. Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \ge \frac{2}{EA.EB}$.

Như vậy để $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất thì $\frac{2}{EA.EB}$ nhận giá trị nhỏ nhất và $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} = \frac{2}{EA.EB}$. Như vậy ta cần tìm vị trí của E để $EA.EB$ nhận giá trị lớn nhất.

Điểm E di chuyển trên cung lớn AB nên $\widehat{AEB}$ luôn là một góc nhọn không đổi.

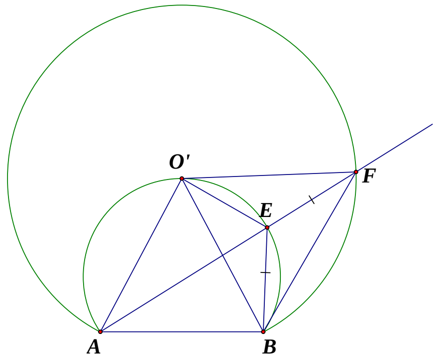
Ta có $S_{AEB} = \frac{1}{2}AE.BE.\sin\widehat{AEB}$ nên $EA.EB$ nhận giá trị lớn nhất khi diện tích tam giác AEB lớn nhất.

Ta lại thấy $S_{AEB} = \frac{1}{2}AB.EK$ với AB không đổi và EK là đường cao hạ từ E. Như vậy S_{AEB} lớn nhất khi và chỉ khi EK lớn nhất, điều này xẩy ra khi E là điểm chính giữa cung lớn AB.

Khi đó ta có $EA = EB$ và $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

• ***Nhận xét.*** *Ta có lời giải khác cho ý b) như sau*

Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho EB = EF hay Δ *EBF cân tại E, suy ra* $\widehat{BFA} = \frac{1}{2}\widehat{BEA}$. *Đặt* $\widehat{AEB} = \alpha$ *khi đó* $\widehat{AFB} = \frac{\alpha}{2}$ *nên F di chuyển trên cung chứa góc* $\frac{\alpha}{2}$ *dựng trên BC.*



Ta có $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \geq \frac{4}{EA + EB}$.

Như vậy $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ *nhỏ nhất khi EA + EB lớn nhất hay EA + EF lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *AF lớn nhất (**).*

Gọi O′ là điểm chính giữa của cung lớn AB, suy ra Δ *O′AB cân tại O′ suy ra* $O'A = O'B$ *(3)*

Δ *O′EB và* Δ *O′EF có EB = EF, O′E chung và* $\widehat{FEO'} = \widehat{BEO'}$ *(cùng bù với* $\widehat{BAO'}$*) Từ đó suy ra được* $\Delta O'EB = \Delta O'EF$ *nên* $O'B = O'F$ *(4).*

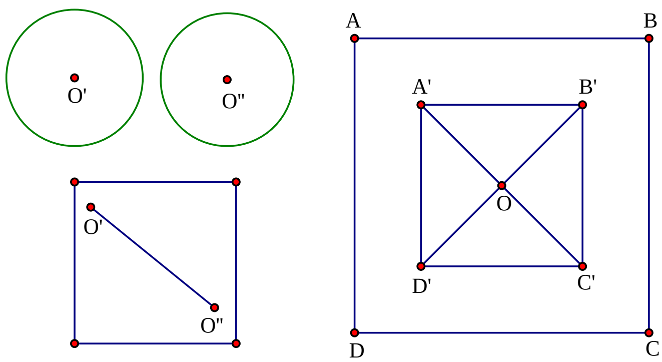
Từ (3) và (4) suy ra O′ là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ *dựng trên đoạn thẳng BC. (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB).*

Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của (O′) khi $E \equiv O'$ *(***).*

Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ *có giá trị nhỏ nhất.*

Câu 5 (2.0 điểm). Tìm hình vuông có kích thước nhỏ nhất để trong hình vuông đó có thể sắp xếp được 5 hình tròn có bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn bất kì nào trong chúng có điểm trong chung.

• **Lời giải.** Giả sử hình vuông ABCD có tâm O và cạnh a, chứa năm hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả năm hình tròn này đều nằm trọn trong hình vuông, nên các tâm của chúng nằm trong hình vuông A’B’C’D’ có tâm O và cạnh $a - 2$, ở đây A’B’//AB. Các đường thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông A’B’C’D’ chưa A’B’C’D’ thành 4 hình vuông nhỏ.



Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong 4 hình vuông nhỏ mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số 5 tâm hình tròn nói trên (không mất tính tổng quát ta giả sử là O′ và O”).

Để ý rằng vì không có hai hình tròn nào(trong số năm hình tròn) cắt nhau nên $O'O'' \geq 2$.

Mặt khác do O′ và O″ cùng nằm trong một hình vuông nhỏ (cạnh của hình vuông nhỏ đó bằng $\frac{a-2}{2}$)

nên ta lại có $O'O'' \le \frac{a-2}{2}.\sqrt{2}$. Từ đó ta suy ra được $\frac{a-2}{2}.\sqrt{2} \ge 2 \Rightarrow a \ge 2\sqrt{2}+2$.

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta đều có $a \ge 2\sqrt{2}+2$. Bây giờ xét hình vuông ABCD có $a = 2\sqrt{2}+2$. Xét năm hình tròn có tâm là O, A′, B′, C′, D′ (xem hình vẽ) , thì mọi yêu cầu của đề bài thỏa mãn. Tóm lại, hình vuông có kích thước bé nhất cần tìm là hình vuông với cạnh $a = 2\sqrt{2}+2$.

Đề số 18

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH HÀ NAM

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (4.0 điểm).

Cho biểu thức $P = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x} + 2x - 3\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để P là số tự nhiên chẵn.

Câu 2(4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P), đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A ,B sao cho tam giác OAB vuông tại O với $O\left(0;0\right)$.

b) Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^y + 1 = z^2$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x\sqrt{x^2 - x + 1} + 2\sqrt{3x + 1} = x^2 + x + 3$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = xy \\ 2x^3 - x^2 - y^2 = 2xy \end{cases}$

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. Đường thẳng MA cắt DB và DC theo thứ tự tại H và K, đường thẳng MB cắt DC, AC theo thứ tự tại E và E. Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng: HE là phân giác của góc MHC

b) Gọi G là giao điểm của KF và HE. Chứng minh rằng G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{NH}{MH} + \dfrac{NF}{MF} + \dfrac{KE}{CD} = 1$.

Câu 5 (2.0 điểm). Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 - xy}{2 + x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y}{1 + 2x^2 + y^2} + \frac{y^2 - x}{1 + x^2 + 2y^2} \ge 0.$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (4.0 điểm). Cho biểu thức $P = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x} + 2x - 3\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P

+ Điều kiện xác định của biểu thức P là $x \ge 0; x \ne 1$.

+ Rút gọn biểu thức P.

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}+2x-3\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{x\sqrt{x}+2x-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-2x+x-1+x\sqrt{x}+2x-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2x\sqrt{x}+x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Tìm x để P là số tự nhiên chẵn.

- ***Phân tích.*** *Để tìm x thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có các hướng sau*

+ *Hướng 1. Đặt* $\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} = k\left(k \in N\right)$ *và* $\sqrt{x} = a \ge 0$*, khi đó ta quy bài toán về tìm số tự nhiên k chẵn thỏa mãn* $k = \frac{2a+3}{a^2+a+1}$*. Chú ý rằng vì giả thiết không cho x là số nguyên nên ta không thể sử dụng quan hệ chia hết để tìm k. Do đó ta viết lai đẳng thức trên thành* $ka^2+ka+k-2a-3=0$*. Để ý là* $k>0$ *nên ta xem đẳng thức trên là phương trình bậc hai ẩn a, khi đó ta sử dụng điều kiện có nghiệm để tìm các giá trị k.*

+ *Hướng 2. Dễ thấy* $k = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} > 0$*, do đó ta đi tìm giá trị lớn nhất của* $k = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}$*. Để ý rằng k nhận giá trị lớn nhất thì* $\frac{1}{k}$ *nhận giá trị nhỏ nhất.*

Ta có $k = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}\ \frac{1}{k} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+3} = \frac{1}{2}$

- **Lời giải.** Với $x \ge 0; x \ne 1$ thì $P = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1}$. Đặt $a = \sqrt{x} \ge 0$ và $\frac{2\sqrt{x}+3}{x+\sqrt{x}+1} = k\left(k \in N\right)$.

Ta có $k = \frac{2a+3}{a^2+a+1} \Leftrightarrow ka^2+ka+k-2a-3=0 \Leftrightarrow ka^2+a\left(k-2\right)+k-3=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc 2 ẩn a $\left(k>0\right)$, khi đó ta có

$$\Delta = \left(k-2\right)^2 - 4k\left(k-3\right) = k^2-4k+4-4k^2+12k = -3k^2+8k+4$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0$ hay

$$-3k^2+8k+4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{7}}{3} \le k \le \frac{4+2\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow 0 \le k \le 3\left(k \in \mathbb{N}\right)$$

Do k là số tự nhiên chẵn nên ta chọn được $k=0$ hoặc $k=2$

+ Với $k=0$ ta có $2a+3=0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = -\frac{3}{2}$, không thỏa mãn.

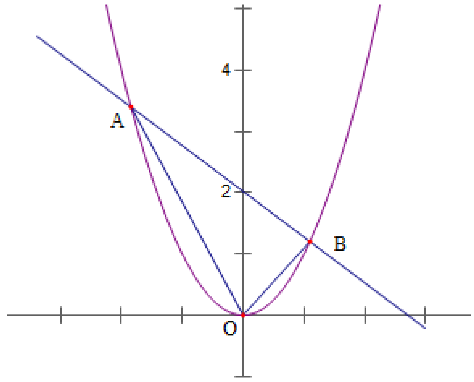
+ Với $k=2$ ta có $2a+3 = 2a^2+2a+2 \Leftrightarrow 2a^2-1=0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, thỏa mãn.

Vậy với $x = \frac{1}{2}$ thì biểu thức P nhận giá trị là số tự nhiên chẵn.

Câu 2(4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O với $O\left(0;0\right)$.

- ***Phân tích.*** *Giả sử ta vẽ được Parabol và đường thẳng cắt nhau như hình vẽ.*



Gọi toạ độ điểm A và B lần lượt là $\left(x_1;y_1\right),\left(x_2;y_2\right)$. *Vì đường thẳng* $y = 2x + m$ *cắt parabol* $y = x^2$ *nên* $\left(x_1;y_1\right),\left(x_2;y_2\right)$ *là 2 nghiệm phân biệt của hệ phương trình* $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + m \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - m = 0$.

Ta có $\Delta = 4 - m$ *để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì* $4 > m$

Theo hệ thức Vi-ét cho phương trình trên ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Theo định lý Pitago ta được $OA^2 = x_1^2 + y_1^2; OB^2 = x_2^2 + y_2^2; AB^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$

Theo định lý Pitago đảo để tam giác OAB vuông thì

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 - 2y_2y_1 \Leftrightarrow x_1x_2 = y_1y_2$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2 = x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow m^2 = -m \Leftrightarrow m\left(m+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Nếu $m = 0$ *thì đường thẳng d cắt P tại điểm O. Khi đó không có tam giác AOB.*

Do vậy $m = -1$ *là giá trị cần tìm.*

- **Lời giải.** Gọi toạ độ điểm A và B lần lượt là $\left(x_1;y_1\right),\left(x_2;y_2\right)$.

Vì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt parabol $y = x^2$ nên $\left(x_1;y_1\right),\left(x_2;y_2\right)$ là 2 nghiệm phân biệt của hệ phương trình $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + m \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - m = 0$.

Ta có $\Delta = 4 - m$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $4 > m$

Theo hệ thức Vi-ét cho phương trình trên ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Theo định lý Pitago ta được $OA^2 = x_1^2 + y_1^2; OB^2 = x_2^2 + y_2^2; AB^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$

Theo định lý Pitago đảo để tam giác OAB vuông thì

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 - 2y_2y_1 \Leftrightarrow x_1x_2 = y_1y_2$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2 = x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow m^2 = -m \Leftrightarrow m\left(m+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$$

Nếu $m = 0$ thì đường thẳng d cắt P tại điểm O. Khi đó không có tam giác AOB.

Do vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

b) Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^y + 1 = z^2$.

• ***Phân tích.*** *Ngay khi nhìn vào giả thiết ta nhìn thấy ngay sự khác nhau về tính chẵn lẻ của* x^y *và* z^2 *khi mà hai số này là hai số tự nhiên liên tiếp nhau, từ đó suy ra x và z khác tính chẵn lẻ và đề bài thì x, y, z là số nguyên tố nên ta có thể nhận ra ngay rằng x hoặc z bằng 2. Đến đây ta xét các trường hợp* $x = 2$ *và* $z = 2$ *để giải bài toán.*

• **Lời giải.** Từ giả thiết ta suy ra x^y và z^2 khác tính chẵn lẻ dẫn đến x và z cũng khác tính chẵn lẻ. Mà x và z là hai số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau trường hợp

+ Với $x = 2$ và $z \neq 2$ thì phương trình tương đương với $2^y + 1 = z^2 \Leftrightarrow 2^y = \left(z-1\right)\left(z+1\right)$

suy ra $z - 1$ và $z + 1$ là các số luỹ thừa của 2.

Đặt $\begin{cases} z - 1 = 2^u \\ z + 1 = 2^v \end{cases} \left(u, v \in \mathbb{N}^*; v > u; u + v = y\right)$.

Khi đó ta có $2^v - 2^u = 2 \Leftrightarrow 2^u\left(2^{v-u} - 1\right) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^u = 2 \\ 2^{v-u} - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$, vì $2^{v-u} - 1$ là số lẻ

Suy ra $z = 3$ và $y = 3$. Thử bộ số $\left(2;3;3\right)$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

+ Với $x \neq 2$ và $z = 2$ phương trình trở thành $x^y + 1 = 4 \Leftrightarrow x^y = 3$. Do x là số lẻ nên từ phương trình trên suy ra $x = 3; y = 1$, không thỏa mãn vì $y = 1$ không phải là số nguyên tố.

Vậy bộ số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x;y;z\right) = \left(2;3;3\right)$.

• ***Nhận xét.*** *Ngoài các xét như trên ta có thể xét tính chẵn lẻ của x, y, z như sau*

Nếu x là số lẻ suy ra x^y *là số lẻ suy ra* z^2 *chẵn hay* $z = 2$. *Từ đó suy ra* $x^y = 3$

Mặt khác vì x, y là số nguyên tố nên ta được $x \geq 2; y \geq 2$ *suy ra* $x^y \geq 2^2 = 4$. *Từ đó ta có mâu thuẫn.*

Do đó x là số chẵn nên suy ra $x = 2$. *Khi đó ta được phương trình đã cho trở thành* $2^y + 1 = z^2$

Ta xét các trường hợp sau:

+ *Trường hợp 1. Xét y là số nguyên tố chẵn. Khi đó* $y = 2$, *suy ra* $z^2 = 5$. *Không tồn tại z là số nguyên tố thỏa mãn.*

+ *Trường hợp 2. Xét y là số nguyên tố lẻ. Khi đó y có dạng* $y = 2k + 1\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Khi đó $2^y + 1 = z^2 \Leftrightarrow 2^{2k+1} + 1 = z^2 \Rightarrow 2.4^k + 1 = z^2 \Rightarrow 2.\left(3+1\right)^k + 1 = z^2 \Rightarrow 2.3A + 3 = z^2$.

Từ đó suy ra z^2 chia hết cho 3 hay z hia hết cho 3, mà z là số nguyên tố nên suy ra $z=3$.

Từ đó ta lại có $2^y+1=3^2$ suy ra $y=3$. Thử lại ta thấy bộ số $\left(x;y;z\right)=\left(2;3;3\right)$ thỏa mãn.

Vậy bộ số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x;y;z\right)=\left(2;3;3\right)$.

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}=x^2+x+3$

• ***Phân tích.*** *Thử một vài giá trị đặc biệt ta được $x=1$ là một nghiệm của phương trình. Do đó ta có thể nghĩ đến phương pháp nhân lương liên hợp. Tuy nhiên vì ta chưa biết chắc chắn phương trình có mấy nghiệm nên khi sử dụng nhân liên hợp thị xử lý sau đó rất khó khăn. Do đó ta tạm thời dừng phương pháp nhân lượng liên hợp. Để ý lại phương trình ta thấy có sự xuất hiện của $2\sqrt{3x+1}$, điều này làm ta liên tưởng đến việc chuyển phương trình thành bình phương. Như vậy nếu đưa $2\sqrt{3x+1}$ vào trong bình phương thì phương trình vẫn còn một biểu thức chứa căn khác là $x\sqrt{x^2-x+1}$. Điều này làm ta nghĩ đến đưa tiếp biểu thức đó vào trong căn. Muốn vậy ta viết phương trình lại thành.*

$$2x^2+2x+6-2x\sqrt{x^2-x+1}-4\sqrt{3x+1}=0.$$

Với tư tưởng đó ta viết phương trình lại thành

$$x^2-2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1+3x+1-4\sqrt{3x+1}+4=0$$

Hay ta được $\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}+2\right)^2=0$, đến đây ta giải được phương trình.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&x^2+x+3-x\sqrt{x^2-x+1}-2\sqrt{3x+1}=0\\
\Leftrightarrow\ &2x^2+2x+6-2x\sqrt{x^2-x+1}-4\sqrt{3x+1}=0\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2x\sqrt{x^2-x+1}+x^2-x+1+3x+1+4\sqrt{3x+1}+4=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3x+1}+2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{x^2-x+1}\\ \sqrt{3x-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

•***Nhận xét.***

+ *Vì phương trình có thể phân tích thành các bình phương không âm. Nên ta có thể sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình. Chú ý rằng phương trình có nghiệm $x=1$ nên ta dự đoán các bất đẳng thức xẩy ra dấu bằng khi $x=1$. Ta có lời giải khác cho bài toán như sau*

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2\sqrt{3x+1}\le\frac{3x+1+4}{2}\ \text{và}\ x\sqrt{x^2-x+1}\le\frac{2x^2-x+1}{2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$x\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{3x+1}\le\frac{3x+5+2x^2-x+1}{2}=x^2+x+3$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi vào chỉ khi $x=1$.

Kết hợp với phương trình đã cho ta suy ra các bất đẳng thức trên đồng thời xẩy ra dấu bằng.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

+ *Vì phương trình đã cho có* $x = 1$ *là nghiệm duy nhất do đó ta có thể sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp.*

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = xy \\ 2x^3 - x^2 - y^2 = 2xy \end{cases}$

- **Phân tích.** *Ngay khi nhìn vào hệ phương trình thấy có xuất hiện sự lặp lại của các đại lượng ở cả hai phương trình như* $x^2 + y^2; xy$ *ta lao vào ngay tìm cách để thế vào một trong 2 phương trình hay phân tích thành bình phương. Ta được kết quả không mong muốn khi phương trình càng khó mà ta không biết phải đi tiếp thế nào. Để ý kỹ vào hệ phương trình thì đại lượng* $2x^3$ *đứng một mình và không hệ liên quan với phần còn lại các đại lượng của cả 2 phương trình trong khi* $x^2 + y^2; xy; x + y$ *lại rất liên quan đến nhau khi có thể biến đổi thành bình phương. Vậy ta sẽ tìm cách biến đổi* $2x^3$ *sao cho có mối liên hệ với các đại lượng khác trong phương trình.*

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được $x^2 + y^2 - xy = x + y$. *Để ý là đại lượng* $x^2 + y^2 - xy$ *làm ta liên tưởng tới hằng đẳng thức* $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. *Như vậy ta sẽ làm xuất hiện* $x^3 + y^3$ *từ* $2x^3$ *bằng cách* $2x^3 = x^3 + y^3 + x^3 - y^3$. *Đến đây ta thay vào hệ phương trình và giải xem như thế nào*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = xy \\ 2x^3 - x^2 - y^2 = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ x^3 + y^3 + x^3 - y^3 - (x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ (x + y)^2 + (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

Kết quả thật đẹp khi hệ phương trình thu được có một phương trình tích. Đến đây ta có lời giải như sau.

- **Lời giải.** Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = xy \\ 2x^3 - x^2 - y^2 = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ x^3 + y^3 + x^3 - y^3 - (x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ (x + y)^2 + (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = x + y \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình trên ta được ta có $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{array} \right.$

+ Với $x = y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{array} \right.$$

+ Với $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (0;0), (2;2)$.

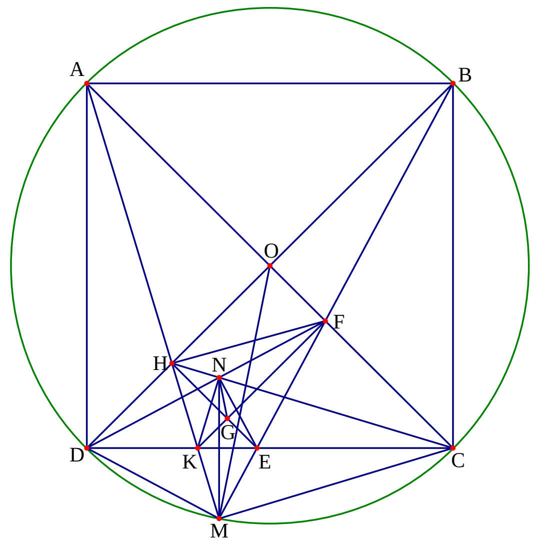
• ***Nhận xét.*** *Hệ phương trình có sự lặp đi lặp lại của nhiều đại lương nên ta dễ bị sa vào các phương pháp thế hay đặt ẩn phụ dẫn đến không giải được bài toán. Điểm mấu chốt để giải quyết bài toán hệ phương trình này là biến đổi được*

$$2x^3 = x^3 + y^3 + x^3 - y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Câu 4 (6.0 điểm).

a) Chứng minh rằng HE là phân giác của góc $\widehat{MHC}$

• ***Phân tích.*** *Muốn chứng minh HE là phân giác của góc $\widehat{MHC}$ ta đi chứng minh $\widehat{MHE} = \frac{1}{2}\widehat{MHC}$. Quan sát hình vẽ ta dự đoán HE vuông góc với BD bởi vì nếu ta được điều đó thì ta sẽ có $\widehat{DHE} = \widehat{BHC}$ từ kết luận bài toán. Điều này đúng vì ta chứng minh được $\widehat{BHC} = \widehat{BHA}$ do tam giác AHC cân và OH là trung trực của AC, mà lại có $\widehat{BHA} = \widehat{DHM}$. Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được HE vuông góc với BD. Dễ thấy ngay $\widehat{DME} = \widehat{DMB} = 90^0$, như vậy để chứng minh $\widehat{DHE} = 90^0$ ta chỉ cần chứng minh được tứ giác DHME nội tiếp.*



• **Lời giải.** Vì hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn O nên O cũng là giao điểm hai đường chéo của hình vuông ABCD. Vì $\widehat{DMB}$ chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{DMB} = \widehat{DME} = 90^0$

Ta có $\widehat{DHM} = \widehat{DEM} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{DM} + sd\overset{\frown}{AB}\right)$ nên tứ giác DHEM nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{DHE} = \widehat{DME} = 90^0$. Vì ABCD là hình vuông nên BC là đường trung trực của đoạn AC và H thuộc BD nên tam giác AHD cân suy ra HB là tia phân giác góc $\widehat{AHC}$.

Ta có $\widehat{OHE} = \frac{1}{2}\widehat{AHM} \Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{OHC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AHC} + \widehat{MHC}\right)$ mà $\widehat{BHC} = \frac{1}{2}\widehat{AHC}$

Nên ta suy ra được $\widehat{MHE} = \frac{1}{2}\widehat{MHC}$ hay HE là phân giác của góc $\widehat{MHC}$.

• ***Nhận xét.*** *Một cách khác để chứng minh tứ giác DHEM nội tiếp đó là chỉ ra $\widehat{HDE} = \widehat{HME} = 45^0$.*

b) Chứng minh rằng G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh tam giác KNE nội tiếp đường tròn tâm G ta sẽ chứng minh $GN = GK = GE$ hay chứng minh hai trong ba $\Delta GKN; \Delta GKE$ và ΔNGE cân. Để ý rằng việc chứng minh hai tam giác GKN và GNE tương tự nhau.*

+ Chứng minh tam giác GKE cân: Trước hết dễ thấy tam giác DHE vuông cân nên $\widehat{GEK} = 45^0$, vậy nếu tam giác GEK cân thì tam giác này cũng sẽ vuông cân. Như vậy lúc này ta cần chứng minh $\widehat{KGE} = 90^0$. Giả sử ta có điều này thì ta có OHGF là hình chữ nhật, vậy thì theo hướng này ta cần phải chứng minh KF vuông góc với OC. Điều này hoàn toàn tương tự cách chứng minh EH vuông góc với BD. Như vậy ta đã chứng minh được tam giác GKE cân.

+ Chứng minh tam giác NGK cân: Để có điều này ta cần chứng minh $\widehat{GKN} = \widehat{GNK}$. Quan sát lại hình vẽ ta đoán rằng KN vuông góc với HC. Điều dự đoán này hoàn toàn có cơ sở vì nếu có được điều này thì tứ giác HNGK nội tiếp suy ra $\widehat{KNG} = \widehat{KHG}; \widehat{GHN} = \widehat{GKN}$ mà $\widehat{KHG} = \widehat{GHN}$ (theo ý a) thì ta sẽ được điều đang chứng minh là $\widehat{GKN} = \widehat{GNK}$. Vậy bây giờ chứng minh được KN vuông góc với HC là ta sẽ giải quyết được toàn bộ ý b.

Trước hết dễ thấy KM vuông góc với MC. Vậy ta sẽ chứng minh $\widehat{KNC} = \widehat{KMC} = 90^0$. Quan sát hình vẽ ta nhận thấy ΔHMC có HE và ME là các tia phân giác, từ đó ta thấy E chính là giao điểm ba đường phân giác của tam giác HMC. Từ đây ta nghĩ đến hai tam giác KMC và CKN bằng nhau. Nếu chứng minh được điều nay thì xem như bài toán được giải quyết. Muốn chứng minh được hai tam giác KMC và KNC bằng nhau ta cần chưng minh được $NC = MC$ hoặc $\widehat{NKC} = \widehat{MKC}$. Tuy nhiên cả hai điều này đồng nghĩa với CD là trục đối xứng của MN. Theo như các lập luận trên thì ta cũng có K là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DMF nên DK là phân giác của góc NDM. Đến đây thì ta có được CD là đường trung trực của MN. Từ đó ta có được điều phải chứng minh.

- **Lời giải.** Tam giác HDE có $\widehat{DHE} = 90^0; \widehat{HDE} = 45^0$ suy ra $\widehat{GEK} = 45^0$

Ta có $\widehat{MKC} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AD} + sd\overset{\frown}{MC}\right); \widehat{MFC} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AB} + sd\overset{\frown}{MC}\right)$ mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$ suy ra $\widehat{MKC} = \widehat{MFC}$ dẫn đến tứ giác MKFC nội tiếp. Mà $\widehat{KMC} = \widehat{AMC} = 90^0$ nên $\widehat{KFC} = 90^0$ hay KF vuông góc với AC.

Vì $\widehat{GHO} = \widehat{HOF} = \widehat{GFO} = 90^0$ nên GHOF là hình chữ nhật hay $\widehat{HOF} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{HOK} = 90^0$ và $\widehat{KGE} = 90^0$ dẫn đến tam giác KGE cân nên $KG = GE$.

Vì $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ nên MB là phân giác góc $\widehat{AMC}$. Tam giác MHC có HE là phân giác góc $\widehat{MHC}$ và ME là phân giác góc $\widehat{HMC}$ nên E là tâm đường tròn nội tiếp. Do đó EC là phân giác của góc $\widehat{HCM}$ hay ta được $\widehat{NCD} = \widehat{MCD}$. Chứng minh tương tự như câu ta có KF là phân giác góc $\widehat{MFD}$.

Ta cũng có $\widehat{AMD} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AD}; \widehat{AMB} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}$ nên $\widehat{DMA} = \widehat{AMB}$ hay MK là phân giác góc $\widehat{DMF}$ điều này dẫn đến K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KMD và DC là phân giác của góc NDM nên suy ra $\widehat{NDC} = \widehat{MDC}$. Hai tam giác NCD và MCD có $\widehat{NDC} = \widehat{MDC}; \widehat{NCD} = \widehat{MCD}$ và chung CD nên $\Delta NDC = \Delta MDC$, từ đó ta suy ra được $NC = MC$.

Hai tam giác NKC và MCK có $NC = MC; \widehat{NCK} = \widehat{KCM}$ và chung KC nên $\Delta NKC = \Delta MKC$.

Từ đó ta được $\widehat{KNC} = \widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HNK} = 90^0$ mà $\widehat{HGK} = 90^0$ nên tứ giác HNGK nội tiếp.

Lại có $\widehat{KHG} = \widehat{GHN}$ nên $\overset{\frown}{GK} = \overset{\frown}{GN} \Rightarrow \widehat{KNG} = \widehat{GKN}$, do đó tam giác NGK cân tại G.

Suy ra $NG = GK$, kết hợp với $KG = GE$ ta có G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE.

c) Chứng minh rằng $\frac{NH}{MH}+\frac{NF}{MF}+\frac{KE}{CD}=1$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $CD = DK + KE + EC$ *và trong hệ thức trên lại có tỉ số* $\frac{KE}{CD}$. *Như vậy ta sẽ chứng minh được hệ thức nếu chỉ ra được* $\frac{NH}{MH}+\frac{NF}{MF}=\frac{DK+EC}{CD}$

Quan sát hình vẽ và với các dự đoán trên ta đi chứng minh $\frac{NH}{MH}=\frac{DK}{CD};\frac{NF}{MF}=\frac{EC}{CD}$.

+ Trước hết ta chứng minh $\frac{NH}{MH}=\frac{DK}{CD}$. *Nhận thấy ba điểm D, K, C thẳng hàng mà ba điểm N, M, H không thẳng hàng nên ta không thể chứng minh đẳng thức trên một cách trực tiếp. Vậy ta sẽ đi bằng con đường gián tiếp. Ta đi tìm tam giác đồng dạng với tam giác NHM. Lại nhờ vào việc phán đoán hình học trên hình vẽ ta lại thấy rằng tam giác KHC đồng dạng với NHM. Điều này được khẳng định vì hai tam giác này có một góc chung và* $\widehat{HMN}=\widehat{KCH}$ *do tứ giác KNCM nội tiếp. Như vậy ta ta có được* $\frac{NH}{MH}=\frac{HK}{HC}$. *Chú ý tiếp ta lại có* $\frac{HK}{HC}=\frac{KE}{KC}$ *do HE lại là phân giác của góc* $\widehat{KHC}$. *Đến đây ta sẽ chứng minh* $\frac{KE}{EC}=\frac{DK}{CD}$. *Vì vì bốn điểm D, K, E, C thẳng hàng nên ta sẽ phải tiếp tục tìm đến công cụ phân giác. Ta đi tìm xung quanh các cạnh KE, EC xem có những đường phân giác nào. Ta có những góc sau bằng nhau* $\widehat{KME}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}=45^0;\widehat{EMC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}=45^0;\widehat{DMA}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC}=45^0$, *khi đó ta thấy được ME là phân giác của tam giác KMC có liên hệ với KE và EC(Ta có thể chọn theo tam giác NKC nhưng vì điểm M nằm trên đường tròn nên ta sẽ dễ chứng minh tam giác đồng dạng hơn sau này mà điểm N lại khó chứng minh hơn). Qua đây ta có được hệ thức liên hệ* $\frac{KE}{EC}=\frac{KM}{MC}$, *bây giờ trở lại với tỉ số kia* $\frac{DK}{CD}$ *ta cũng tìm các phân giác xung quanh nó, nhìn các đường thẳng HK, NK, FK ta không thấy một phân giác trong tam giác nào ứng với hai đỉnh D và C vậy ta sẽ phải biến đổi* $\frac{DK}{CD}$ *để đi theo hướng khác. Để ý thì ta thấy* $AD = CD$ *do đó ta chuyển tỉ số trên thành* $\frac{DK}{AD}$ *và chọn được tam giác có tỉ số này là ADK. Nhận thấy* $\widehat{ADH}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB};\widehat{HDK}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}$, *khi đó ta được* $\frac{HK}{AH}=\frac{DH}{HB}=\frac{DM}{MB}$. *Đến đây ta chỉ cần chứng minh được hai tam giác DMB và KMC đồng dạng là ta có điều cần chứng minh..*

+ Chứng minh $\frac{NF}{MF}=\frac{EC}{CD}$ *hoàn toàn tương tự.*

• **Lời giải.** Vì $\widehat{KMC}=\widehat{KNC}=90^0$ nên tứ giác MKNC nội tiếp nên $\widehat{HMN}=\widehat{KCH}$.

Tam giác HMN và tam giác HCK có $\widehat{MHC}$ chung và $\widehat{HMN}=\widehat{KCH}$ nên $\Delta HMN \backsim \Delta KCK$

Suy ra $\frac{NH}{MH}=\frac{HK}{HC}$. Mà ta cũng có HE lại là phân giác tam giác KHC nên $\frac{HK}{HC}=\frac{KE}{KC}$

Từ đó dẫn đến $\frac{KE}{EC}=\frac{NH}{MH}$. Mặt khác ta có $\widehat{EMC}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}=45^0;\widehat{DMA}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC}=45^0$ nên theo định lí Talet và tính chất đường phân giác thì $\frac{KE}{EC}=\frac{KM}{MC}=\frac{NH}{HM}$

Ta cũng thấy rằng $\widehat{ADH}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}=\widehat{HDK}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BC}$ nên tam giác ADK có DH là đường phân giác nên dẫn tới $\frac{DK}{CD}=\frac{DK}{AD}=\frac{HK}{AH}$. Do AB//DK nên theo định lý Talet ta lại có $\frac{HK}{AH}=\frac{DH}{HB}=\frac{DK}{CD}$.

Vì $\widehat{DMH}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AD}=\widehat{HMB}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}$ nên MH là đường phân giác tam giác DMB, suy ra theo tính chất đường phân giác của tam giác $\frac{DH}{HB}=\frac{DM}{MB}=\frac{DK}{CD}$.

Hai tam giác vuông DMB và KNC có $\widehat{DBM}=\widehat{KCM}$ nên $\Delta DBM\backsim\Delta KCM\Rightarrow\frac{MK}{MC}=\frac{DM}{MB}$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{NH}{MH}=\frac{DK}{CD}$. Hoàn toàn tương tự như trên ta có $\frac{NF}{MF}=\frac{EC}{CD}$

Vậy ta có $\frac{NH}{MH}+\frac{NF}{MF}+\frac{KE}{CD}=\frac{DK}{CD}+\frac{KE}{CD}+\frac{EC}{CD}=1$.

Câu 5(2.0 điểm). Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-xy}{2+x^2+y^2}+\frac{x^2-y}{1+2x^2+y^2}+\frac{y^2-x}{1+x^2+2y^2}\ge 0$$

- ***Phân tích.*** *Dự đoán được dấu bằng xảy ra tại* $x=y=1$. *Quan sát bất đẳng thức ta thấy tử số của các phân thức có các đại lượng mang dấu âm nên việc đầu tiên ta nghĩ đến là sẽ đổi chiều của bất đẳng thức. Để ý ta thấy* $1-\frac{2\left(1-xy\right)}{2+x^2+y^2}=\frac{\left(x+y\right)^2}{2+x^2+y^2}$ *và* $1-\frac{2\left(x^2-y\right)}{1+2x^2+y^2}=\frac{\left(y+1\right)^2}{1+2x^2+y^2}$. *Đến đây ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại thành* $\frac{\left(x+y\right)^2}{2+x^2+y^2}+\frac{\left(y+1\right)^2}{1+2x^2+y^2}+\frac{\left(x+1\right)^2}{1+x^2+2y^2}\le 3$. *Để ý đến chiều bất đẳng thức và hình thức của các biểu thức ta nghĩ đến đánh giá các đại lượng bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.*

$$\frac{\left(x+y\right)^2}{2+x^2+y^2}\le\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1};\frac{\left(y+1\right)^2}{1+2x^2+y^2}\le\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{1}{x^2+1};\frac{\left(x+1\right)^2}{1+x^2+2y^2}\le\frac{x^2}{y^2+x^2}+\frac{1}{y^2+1}$$

Đến đây ta có lời giải cho bài toán

- **Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Leftrightarrow\frac{2-2xy}{2+x^2+y^2}+\frac{2x^2-2y}{1+2x^2+y^2}+\frac{2y^2-2x}{1+x^2+2y^2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{2-2xy}{2+x^2+y^2}+1-\frac{2x^2-2y}{1+2x^2+y^2}+1-\frac{2y^2-2x}{1+x^2+2y^2}\le 3$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+y\right)^2}{2+x^2+y^2}+\frac{\left(y+1\right)^2}{1+2x^2+y^2}+\frac{\left(x+1\right)^2}{1+x^2+2y^2}\le 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhicopxki dạng phân thức

$$\frac{(x+y)^2}{2+x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{y^2}{y^2+1}; \frac{(y+1)^2}{1+2x^2+y^2} \le \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+1}; \frac{(x+1)^2}{1+x^2+2y^2} \le \frac{x^2}{y^2+x^2} + \frac{1}{y^2+1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{(x+y)^2}{2+x^2+y^2} + \frac{(y+1)^2}{1+2x^2+y^2} + \frac{(x+1)^2}{1+x^2+2y^2} \le 3$

Vậy bài toán đã được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Đề số 19

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH BÌNH PHƯỚC

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (5.0 điểm).

1. Cho biểu thức: $P = \dfrac{8\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}-3} + \dfrac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa. Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 3+2\sqrt{2}$

2. Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy + 2016$$

Câu 2 (5.0 điểm).

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x^2 - y^2 - 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

3. Tìm m để đường thẳng $\left(d\right): y = -2(m-1)x + 2m + 5$ cắt parabol $\left(P\right): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $T = 12 - 10x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3 (5.0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp trong đường trong O. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là điểm đối xứng của O qua cạnh BC.

a) Chứng minh rằng H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Chứng minh tứ giác AHIO là hình bình hành.

c) Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại B, C cắt nhau tại Q, gọi P là giao điểm của AQ và EF. Chứng minh rằng P là trung điểm của EF.

Câu 4 (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi L, H, K lần lượt là chân đường vuông góc của M trên các cạnh AB, BC, CA. Tìm vị trí của điểm M để $AL^2 + BH^2 + CK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (3.0 điểm).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2 - 5xy - 2y^2 - 4x + 8y + 3 = 0$.

2. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1.

1. Cho biểu thức $P = \dfrac{8\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}-3} + \dfrac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$

• **Lời giải.**

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa. Rút gọn biểu thức P.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 0; x \ne 1$.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{8\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{8\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}-3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{8\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} - \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} - \frac{5\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} + 2 \\
&= \frac{8\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-3-5\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} + 2 = \frac{2\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} + 2 = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + 2
\end{aligned}$$

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện xác định nên ta được $x = 3 + 2\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Khi đó ta được $P = \dfrac{2}{\sqrt{x}-1} + 2 = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}-1} + 2 = \sqrt{2} + 2$.

2. Cho $x > 0; y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy + 2016$$

• ***Phân tích.*** *Dự đoán dấu bằng xảy ra tại* $x = y = \dfrac{1}{2}$. *Quan sát biểu thức Q thì điều đầu tiên nghĩ đến bao giờ cũng là áp dụng các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy hay Bunhiacopxki. Đầu tiên ta thức hiện đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy* $\dfrac{2}{xy} + \alpha xy \ge 2\sqrt{2\alpha}$. *Chú ý rằng dấu bằng xảy ra tại* $x = y = \dfrac{1}{2}$ *nên ta tìm được* $\alpha = 32$.

Lúc này ta có

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy + 2016 = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2}{xy} + 32xy - 28xy + 2016 \\
&\ge \frac{1}{x^2+y^2} + 2\sqrt{2.32} - 28xy + 2016 = \frac{1}{x^2+y^2} - 28xy + 16 + 2016
\end{aligned}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có đánh giá $\dfrac{1}{x^2+y^2} + 4\left(x^2+y^2\right) \ge 4$. *Như vậy lúc này ta có*

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{x^2+y^2} + 4\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right) - 28xy + 2032 \\
&\ge 4 - 4\left(x^2+y^2+2xy\right) - 20xy + 2032 = 4 - 4 + 2032 - 20xy
\end{aligned}$$

Như vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của $20xy$. *Để ý đến giả thiết* $x+y=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=1$ *ta có đánh giá* $20xy \le 5(x+y)^2=5$. *Đến đây ta trình bày lời giải cho bài toán.*

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và $4ab \le (a+b)^2$, ta được

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}+4xy+2016=\frac{1}{x^2+y^2}+4\left(x^2+y^2\right)+\frac{2}{xy}+32xy-28xy-4\left(x^2+y^2\right)+2016 \\ &\ge 2\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}.4\left(x^2+y^2\right)}+2\sqrt{\frac{2}{xy}.32xy}-4\left(x^2+y^2+2xy\right)-20xy+2016 \\ &\ge 4+16-4(x+y)^2-5(x+y)^2+2016=20-9-2016=2027 \end{aligned}$$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2027, xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

- ***Nhận xét.*** *Ở trên là cách giải thuần Cauchy. Ta còn cách giải khác trên bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với Bunhiacopxki như sau*

$$Q=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}+4xy+2016=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+4xy+\frac{1}{4xy}+\frac{5}{4xy}+2016$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+4xy+\frac{1}{4xy}+\frac{5}{4xy}+2016 \\ &\ge \frac{4}{(x+y)^2}+2\sqrt{4xy.\frac{1}{4xy}}+\frac{5}{(x+y)^2}+2016=11+2016=2027 \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

- ***Phân tích.*** *Để ý đến phương trình ta có* $2-x+x-1=1$. *Vậy khi đặt* $a=\sqrt[3]{2-x}; b=\sqrt{x-1}$ *thì phương trình này có dạng* $a+b=1$ *với* $a^3+b^2=1$.

Từ đây ta có hệ phương trình có thể giải được $\begin{cases} a^3+b^2=1 \\ a+b=1 \end{cases}$

Ta có lời giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ và đưa phương trình về hệ phương trình như sau.

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 1$.

Đặt $a=\sqrt[3]{2-x}; b=\sqrt{x-1} \ge 0$. Ta có $a^3+b^2=2-x+x-1=1$, kết hợp phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3+b^2=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^3+(1-a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^3+a^2-2a+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a(a-1)(a+2)=0 \end{cases}$$

Ta có $a(a-1)(a+2)=0 \Leftrightarrow a \in \{0;1;-2\}$

+ Với $a=-2$, ta có $b=3$, do đó ta được $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=-2 \\ \sqrt{x-1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$, thỏa mãn điều kiện xác định.

+ Với $a=0$, ta có $b=1$, do đó ta được $\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=0\\ \sqrt{x-1}=1\end{cases} \Leftrightarrow x=2$, thỏa mãn điều kiện xác định.

+ Với $a=1$, ta có $b=0$, do đó ta được $\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1\\ \sqrt{x-1}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{1;2;10\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x^2-y^2-3x+2y-10=0\end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy cả hai phương trình trên đều có bậc 2 với mỗi ẩn do đó ta đi kiểm tra xem phương trình nào của hệ có Δ chính phương. Tuy nhiên quan sát hệ phương trình thì ta thấy phương trình thứ nhất của hệ có thể phân tích được thành tích. Do đó ta thử hướng này trước*

$$xy+x+y=x^2-2y^2 \Leftrightarrow x^2-2y^2-xy-x-y=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)-y(x+y)-(x+y)=0 \Leftrightarrow (x-2y-1)(x+y)=0$$

Đến đây ta có thể giả được hệ phương trình

• **Lời giải.** Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x^2-y^2-3x+2y-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y-1)(x+y)=0\\ x^2-y^2-3x+2y-10=0\end{cases}$$

Từ phương trình $(x-2y-1)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2y+1\\ x=-y\end{array}\right.$

+ Với $x=2y+1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2-y^2-3x+2y-10=0 \Leftrightarrow (2y+1)^2-y^2-3(2y+1))2y-10=0$$
$$\Leftrightarrow 4y^2+4y+1-6y-3+2y-10=0 \Leftrightarrow 3y^2-12=0 \Leftrightarrow y^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2;x=5\\ y=-2;x=-3\end{array}\right.$$

+ Với $x=-y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2-y^2-3x+2y-10=0 \Leftrightarrow y^2-y^2+3y+2y-10=0 \Leftrightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2;x=-2$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(x;y)=(-2;2),(5;2),(-3;-2)$

c) Tìm m để đường thẳng $(d): y=-2(m-1)x+2m+5$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ sao cho biểu thức $T=12-10x_1x_2-x_1^2-x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Khi gọi $x_1;x_2$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) trên mặt phẳng toạ độ thì $x_1;x_2$ chính là nghiệm của phương trình $x^2=-2(m-1)x+2m+5$. Từ đó ta áp dụng định lý Vi – et để giải bài toán.*

• **Lời giải.**

Vì đường thẳng $(d): y=-2(m-1)x+2m+5$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ nên $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 = -2(m-1)x + 2m + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-1)x - 2m - 5 = 0$$

Ta có $\Delta = 4m^2 - 4m + 1 + 8m + 20 = 4m^2 + 4m + 21 > 0$, đúng với mọi giá trị của m thì phương trinh trên luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi – et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 2 \\ x_1x_2 = -2m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 2x_1.x_2 = 4m^2 - 8m + 4 \\ x_1x_2 = -2m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 4m + 14 \\ x_1x_2 = -2m - 5 \end{cases}$$

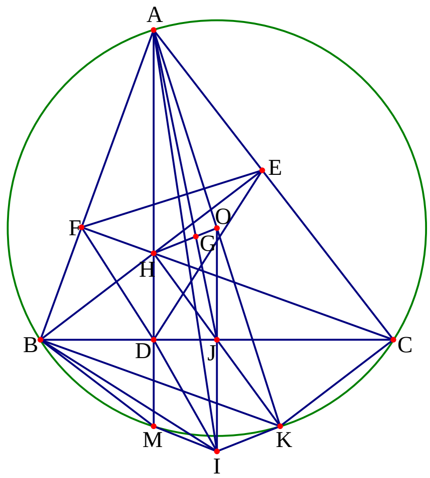
Thay vào thức P ta được

$$T = 12 - 10x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 12 + 20m + 50 - 4m^2 + 4m - 14$$
$$= -4m^2 + 24m + 48 = -4m^2 + 24m - 36 + 84 = -(2m-6)^2 + 84 \le 84$$

Do đó giá trị lớn nhất của P là 84, xẩy ra khi $m = -\frac{1}{3}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp trong đường trong O. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, I là điểm đối xứng của O qua cạnh BC.

a) Chứng minh rằng H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



• ***Phân tích.*** *Để chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF ta cần chứng minh được DH, EH là các phân giác của tam giác DEF. Để ý đến các tứ giác nội tiếp đường tròn ta có* $\widehat{DCH} = \widehat{DEH} = \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$, *do đó EH là phân giác của tam giác DEF. Hoàn toàn tương tự ta cũng có DH là đường phân giác. Từ đó ta có điều phải chứng minh.*

• **Lời giải.** Tứ giác BFEC nội tiếp vì $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ dẫn đến $\widehat{DCH} = \widehat{FEB}$ (chắn cung BF). Tứ giác BHDC nội tiếp do $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^0$. Do đó $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ (chắn cung HD).

Từ hai điều trên suy ra $\widehat{FEH} = \widehat{HED}$ suy ra EH tia là phân giác góc FED. Hoàn toàn tương tự như trên ta cũng có DH là tia phân giác góc FDE. Mà 2 tia DH và EH cắt nhau tại H và 2 tia phân giác này đều thuộc tam giác DEF suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) Chứng minh tứ giác AHIO là hình bình hành.

• ***Phân tích.*** *Do ta đã có IO song song với AH (cùng vuông góc với BC) nên để chứng minh tứ giác AHIO là hình bình hành thì ta cần thêm* $AH = OI$ *hoặc AO song song với HI hoặc* $IH = OA$ *và cũng có thể là hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

+ Hướng 1. Chứng minh $AH = OI$. *Thật vậy ta có bài toán quen thuộc đó là chứng minh* $OJ = \frac{AH}{2}$, *muốn chứng minh điều này ta vẽ đường kính AK, khi đó tứ giác BHCK là hình bình hành nên J là giao điểm của hai đường chéo BC, HJ. Do đó OJ là đường trung bình của tam giác AHK. Đến đây ta giải được bài toán.*

+ Hướng 2. Chứng minh $IH = OA$. *Nhận thấy* $OA = R$ *nên ta đi chứng minh* $IH = R$. *Vì HD song song với IO nên HDIO là hình thang, đến đây ta nghĩ đến việc dựng hình thang cân trên cơ sở này. Thật vậy gọi M là*

giao điểm của AH trên (O) ta được bài toán quen thuộc là D là trung điểm của HM và tứ giác OHDI cân có DJ là trục đối xứng nên có thể chứng minh đây là hình thang cân, do DJ vuông góc với hai đáy mà D và J lần lượt là trung điểm của đáy lớn và đáy bé. Đến đây suy ra hai đường chéo $OM = HI = R$.

+ Hướng 3. Chứng minh giao điểm hai đường chéo là một trung điểm của một trong hai đường chéo của tứ giác AHIO cộng thêm một yếu tố AH song song với IO theo tam giác bằng nhau thì ta có điều phải chứng minh. Lúc này ta gọi giao điểm 2 đường chéo tứ giác AHIO là G. Ta chứng minh G là trung điểm của AI (việc chứng minh G là trung điểm của HO). Ta sẽ tiến hành bằng cách chẳng hạn như chứng minh bằng đường trung bình. Điều này là có cơ sở khi mà ngay một bên điểm G là điểm O tâm đường tròn (O). Ta có thể tạo cho O là trung điểm của một đường kính của một đỉnh là A để sử dụng đường trung bình chứng minh. Kẻ đường kính AK. Ta cần phải chứng minh GO hay HO song song với IK.

- **Lời giải.**

+ Cách 1. Gọi M là giao điểm của AH với (O). Suy ra $\widehat{BMA} = \widehat{BCA}$ (chắn cung BA). Hai tam giác vuông AHE và ACD vì có chung $\widehat{DAC}$, suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{AHE} = \widehat{BCA}$ mà $\widehat{BMA} = \widehat{BCA}$ dẫn đến $\widehat{BHD} = \widehat{BMH}$ hay tam giác BMH cân ở B. Mà BD là đường cao suy ra BD hay DJ cũng là trung trực của HM. Hình thang HMIO có DJ là trung trực của OI và JD cũng là đường trung trực của HM suy ra DJ là trục đối xứng của hình thang HMIO suy ra HMIO là hình thang cân nên $IH = MO = OA$

Tứ giác AHIO có AH song song với OI (cùng vuông góc với BC) và IH = OA nên AHIO là hình bình hành.

+ Cách 2. Kẻ đường kính AK của đường tròn. Dễ dàng suy ra được $CK \perp AC; KB \perp AB$. Vì O đối xứng với I qua BC nên gọi J là giao điểm của OI và BC ta suy ra J là trung điểm của BC.

Vì $HB \perp AC; CK \perp AC$ nên HB song song với CK, tương tự như vậy ta cũng có BK song song với CH. Suy ra BHCK là hình hình hành mà J là trung điểm của BC dẫn đến J là trung điểm của HK.

Mặt khác J cũng là trung điểm của OI nên cũng suy ra HOKI là hình bình hành nên GO song song với IK. Tam giác AKI có O là trung điểm của AK nên suy ra G là trung điểm của AI.

Tam giác HAG và OIG có $AG = GI$; $\widehat{HGA} = \widehat{OGI}$ (đối đỉnh); $\widehat{HAG} = \widehat{GIO}$

Suy ra $\Delta HAG = \Delta OIG \Rightarrow AH = IO$ mà AH song song với nên tứ giác AHIO là hình bình hành

c) Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại B, C cắt nhau tại Q, gọi P là giao điểm của AQ và EF. Chứng minh rằng P là trung điểm của EF.

- ***Phân tích.*** *Để chứng minh P là trung điểm của EF ta cần chứng minh $PE = PF$. Thử tìm các tam giác bằng nhau hay đường trung bình nhưng đều không cho kết quả. Ý nghĩ cuối cùng là chứng minh cặp tỷ số có liên quan đến PE và PF bằng nhau. Gọi K là giao điểm của AQ với đường tròn (O). Dễ dàng chứng minh được tam giác APF đồng dạng với tam giác ABK nên ta có $\frac{PF}{BK} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow PF = AP.\frac{BK}{AB}$. Tương tự ta được $PE = AP.\frac{CK}{AC}$. Như vậy chỉ cần chứng minh được $\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC}$. Mà do tam giác QBK đồng dạng với tam giác QAB nên $\frac{BK}{AB} = \frac{BQ}{AQ}$. Tương tự $\frac{CK}{AC} = \frac{CQ}{AQ}$. Mà ta lại có do hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại Q nên $BQ = CQ$. Do đó $\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC}$. Như vậy bài toán được chứng minh*

• **Lời giải.** Gọi K là giao điểm của AQ với đường tròn (O). Ta thấy $\widehat{KBQ}$ là góc tại bởi tia tiếp tuyến BQ và dây cung BK và $\widehat{BAK}$ là góc nội tiếp chắn cung BK nên $\widehat{KBQ} = \widehat{BAK}$

Tam giác BKQ đồng dạng với tam giác ABQ vì có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{KBQ} = \widehat{BAK}$.

Suy ra ta được $\frac{BK}{AB} = \frac{BQ}{AQ}$. Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{CK}{AC} = \frac{CQ}{AQ}$.

Mà do hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại Q nên $BQ = CQ \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC}$.

Ta có $\widehat{BFE} = \widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow$ BFEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{ECB} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ABK} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{ABK}$.

Tam giác APF đồng dạng với tam giác ABK vì $\widehat{A}$ chung và $\widehat{AFP} = \widehat{ABK}$.

Do đó ta lại có $\frac{PF}{BK} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow PF = AP.\frac{BK}{AB}$. Tương tự ta được $PE = AP.\frac{CK}{AC}$

Mà ta có $\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC}$, suy ra ra được $PE = PF$ hay P là trung điểm của EF.

Câu 4 (2.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi L, H, K lần lượt là chân đường vuông góc của M trên các cạnh AB, BC, CA. Tìm vị trí của điểm M để $AL^2 + BH^2 + CK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

• ***Phân tích.*** *Do L, H, K là hình chiếu của M trên các cạnh AB, BC, CA nên ta dự đoán dấu bằng có thể xảy ra tại L, H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay* $AL = \frac{1}{2}AB; BH = \frac{1}{2}BC; CK = \frac{1}{2}CA$ *từ đây gợi ý cho ta bất đẳng thức*

$$AL^2 + BH^2 + CK^2 \ge \frac{1}{4}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) \Leftrightarrow 4\left(AL^2 + BH^2 + CK^2\right) \ge AB^2 + BC^2 + CA^2$$

Để ý chút nữa đề bài cho ta các góc vuông và các bình phương của AL, BH, CK nên ta sẽ tìm cách sử dụng Pytago để biến đổi AL, BH, CK thành AB, BC, CA.

Để ý ta có các bất đẳng thức liên hệ giữa AL với AB, BH với BC, CK với CA ta có

$$AL^2 + BL^2 \ge \frac{\left(AL + BL\right)^2}{2} = \frac{AB^2}{2}; BH^2 + CH^2 \ge \frac{BC^2}{2}; CK^2 + AK^2 \ge \frac{CA^2}{2}$$

Từ đây tin tưởng hướng đi đã đúng ta trình bày lời giải như sau.

• **Lời giải.**

Theo định lý Pytago cho các tam giác vuông ta có

$$AL^2 + ML^2 = AM^2; AK^2 + MK^2 = AM^2; BH^2 + MH^2 = BM^2$$
$$BL^2 + ML^2 = BM^2; CK^2 + MK^2 = CM^2; CH^2 + MH^2 = CM^2$$

Từ đó ta thu được

$$AL^2 + ML^2 - \left(AK^2 + MK^2\right) + BH^2 + MH^2 - \left(BL^2 + ML^2\right) + CK^2 + MK^2 - \left(CH^2 + MH^2\right) = 0$$

Hay ta được $AL^2 + BH^2 + CK^2 = AK^2 + BL^2 + CH^2$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{4}$ ta được

$$2\left(AL^2+BH^2+CK^2\right)=AL^2+BH^2+CK^2+AK^2+BL^2+CH^2$$
$$\ge\frac{(AL+BL)^2}{2}+\frac{(BH+CH)^2}{2}\frac{(CK+AK)^2}{2}=\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}+\frac{CA^2}{2}$$

Từ đó dẫn đến $AL^2+BH^2+CK^2\ge\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AL^2+BH^2+CK^2$ là $\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{4}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AL=BL;BH=CH;CK=AK$ hay M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 5 (3.0 điểm).

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2-5xy-2y^2-4x+8y+3=0$.

• ***Phân tích.*** *Nhìn vào phương trình ta thấy phương trình đã cho có bậc hai đối với một biến nên ta có thể nghĩ đến phương pháp sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hoặc điều kiện Δ là số chính phương để phương trình có nghiệm nguyên. Trước hết ta viết lại phương trình thành .*

$$3x^2-x(5y+4)-2y^2+8y+3=0$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số.

Khi đó ta có $\Delta=(5y+4)^2-12\left(-2y^2+8y+3\right)=49y^2-56y-20$.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $49y^2-56y-20=a^2\Rightarrow(7y-4)^2-36=a^2\Rightarrow(7y-4+a)(7y-4-a)=36$

Đến đây ta giải phương trình trên bằng cách sử dụng ước số.

• **Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với $3x^2-x(5y+4)-2y^2+8y+3=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x với y là tham số.

Khi đó ta có $\Delta=(5y+4)^2-12\left(-2y^2+8y+3\right)=49y^2-56y-20$.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương .

Đặt $49y^2-56y-20=a^2\Rightarrow(7y-4)^2-36=a^2\Rightarrow(7y-4+a)(7y-4-a)=36$

Vì $7y-4+a$ và $7y-4-a$ cùng tính chẵn lẻ mà $7y-4+a+7y-4-a=14y-8$ chia 7 dư 6 nên ta suy ra ta được

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7y-4+a=2\\7y-4-a=18\end{cases}\\\begin{cases}7y-4+a=18\\7y-4-a=2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\a=-8\end{cases}\\\begin{cases}y=2\\a=8\end{cases}\end{array}\right.$$

+ Với $y=2$ thay vào phương trình ban đầu ta được $3x^2-14x-11=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{11}{3}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$

2. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $a+b+c$ chia hết cho 6 thì $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

- ***Phân tích.*** *Ta có một số hướng để làm bài này là sử dụng bài toán* $x^3-x\,\vdots\,6$ *và biến đổi hết sức quen thuộc* $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$ *rồi rử dụng nguyên lý Diriclet để chứng minh.*

- **Lời giải.**

+ Cách 1. Dễ dàng chứng minh được $x^3-x\,\vdots\,6$, với mọi x là số nguyên.

Ta có $a^3+b^3+c^3-a-b-c=a^3-a+b^3-b+c^3-c\,\vdots\,6$

Vì $a+b+c\,\vdots\,6$ kết hợp với điều trên nên $a^3+b^3+c^3\,\vdots\,6$

+ Cách 2. Ta có $\left(a+b+c\right)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Theo nguyên lý Dirichlet trong ba số a, b, c luôn có ít nhất hai số cùng tính chẵn, lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn, lẻ đó là a và b, điều này dẫn đến $a+b\,a+b$ luôn là số chẵn

Do đó ta được $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\vdots\,2$ nên $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\vdots\,2$

Mà ta có $\left(a+b+c\right)^3\vdots\,6$ do vậy ta được $a^3+b^3+c^3\,\vdots\,6$

Đề số 20

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH PHÚ YÊN

Năm học 2015 – 2016

Câu 1. (3.0 điểm).

Cho biểu thức: $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Câu 2. (4.5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$

Câu 3. (4.0 điểm). Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$

Chứng minh rằng $xyz \le \frac{1}{64}$.

Câu 4. (2.5 điểm). Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^0$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB, D và M cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

Câu 5. (5.0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song với AC; Z,T theo thứ tự là giao điểm của BM, AM và đường thẳng qua C song song với AB.

a) Chứng minh rằng $AB.CZ = AC.BX$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

- **Phân tích và lời giải.** Điều kiện xác định của biểu thức P là $a > 0; a \ne 1$. Đây là một bài toán rút gọn biểu thức chứa căn quen thuộc. Để rút gọn được ta cần quy đồng biểu thức. Tuy nhiên để ý một số phân thức ở trên vẫn còn rút gọn được nên ta rút gọn trước giảm bớt khó khăn trong việc quy đồng. Ta rút gọn như sau

$$P = \frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)} - \frac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}}.\frac{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)-\left(2+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}.$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)} - \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}}.\frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{a-1}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}}.\frac{2a+2\sqrt{a}+2}{a-1} = 2 + \frac{2\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}$$

Ở ý b) ta cần chứng minh với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$. Có các cách xử lý sau

+ Xét hiệu P – 6 sau đó chứng minh kết quả của hiệu là số dương.

+ Sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá $P > 6$.

Ta có $P - 6 = 2 + \dfrac{2\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}} - 6 = 2.\dfrac{a+\sqrt{a}+1-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}. = \dfrac{2\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}$

Vì $a-\sqrt{a}+1>0$ và $\sqrt{a}>0$ nên $P>6$.

Câu 2. (4.5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$

• ***Phân tích.*** *Chú ý hệ số của x^2 chắc chắn ta không thể bình phương hai vế. Hai đại lượng trong căn có một đại lượng không thể phân tích thành tích, vì thế khó phân tích thành tích. Nhẩm các giá trị đặc biệt 0, 1, 2.. thấy không có nghiệm nguyên nên ta nghĩ tới việc đặt ẩn phụ. Muốn đặt ẩn thì ta phải tìm ra mối liên hệ giữa các đại lượng trong phương trình. Ta thấy vế trái không còn x^2 nữa và để ý thấy hệ số 2 của căn thức thứ 2 khi bình phương lên thì ta có $4x^2$ khi đó dễ dàng lấy hiện để mất bậc 2 nên ta đặt được như sau:*

Đặt $\sqrt{4x^2+5x+1} = a; 2\sqrt{x^2-x+1} = b \Rightarrow a^2-b^2 = 9x-3$. *Khi đó phương trình trở thành*

$$a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow a-b = \left(a-b\right)\left(a+b\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

Đến đây ta xét từng trường hợp ta giải được phương trình

• **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{4x^2+5x+1} = a; 2\sqrt{x^2-x+1} = b \Rightarrow a^2-b^2 = 9x-3$. Khi đó phương trình trở thành

$$a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow a-b = \left(a-b\right)\left(a+b\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

+ Với $a-b=0$ thì $a=b$, khi đó ta có phương trình

$$\sqrt{4x^2+5x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x^2+5x+1 = 4x^2-4x+4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

+ Với $a+b=1$ thì $a=1-b$, khi đó ta có phương trình

$$\sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow\begin{cases}4x^2+5x+1=4x^2-4x+5-2\\1-2\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9x-2=0\\1-2\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{3}$

• ***Nhận xét.*** *Mấu chốt của bài toán là phát hiện ra lấy bình phương cả hệ số của hai cần rồi lấy hiệu sẽ được vế phải Ở đây dựa trên tư tưởng đó ta nghĩ tới việc nhân lượng liên hợp chỉ có một nghiệm duy nhất nên có cơ sở thực hiện. Sau khi nhân lượng liên hợp hai căn thức ta được nhân tử chung của hai vế là* $9x-3$. *Trên thực tế hai cách làm này về cơ bản là giống nhau chỉ khác ở cách xử lý mà thôi .*

$$\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}=9x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{9x-3}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}=9x-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x-3=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}=1\end{array}\right.$$

+ *Với* $9x-3=0$ *ta được* $x=\frac{1}{3}$.

+ *Với* $\frac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}}=1$ *ta được*

$$\sqrt{4x^2+5x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}=1\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+5x+1}=1-2\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4x^2+5x+1=4x^2-4x+5-2\\1-2\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x-2=0\\1-2\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm

Câu 3. (4 điểm). Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}=2$

Chứng minh rằng $xyz\le\frac{1}{64}$

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM và giả thiết ta có:

$$\frac{1}{1+2x}=1-\frac{1}{1+2y}+1-\frac{1}{1+2z}=\frac{2y}{1+2y}+\frac{2z}{1+2z}\ge 2\sqrt{\frac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{1+2y}\ge 2\sqrt{\frac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}};\frac{1}{1+2z}\ge 2\sqrt{\frac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$

Khi đó nhận thấy các bất đẳng thức có mẫu tương tự nhau nên nhân theo vế ta được

$$\frac{1}{1+2x}.\frac{1}{1+2y}.\frac{1}{1+2z} \geq 8.\sqrt{\frac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \geq 8.\frac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \Leftrightarrow 64xyz \leq 1 \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{64}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$

Câu 4. (2.5 điểm). Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^0$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB, D và M cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

• ***Phân tích.*** *Bài toán yêu cầu chứng minh AC vuông góc với MN tức là cần chứng minh góc AHM bằng* 90^0. *Hay ta phải chứng minh được* $\widehat{HAM} + \widehat{HMA} = 90^0$. *Để ý thấy* $\widehat{NAB} = \widehat{DAM}$. *Mà ta có* $\widehat{DAM} + \widehat{HAD} = \widehat{HAM}$ *nên ta cần chứng minh được*

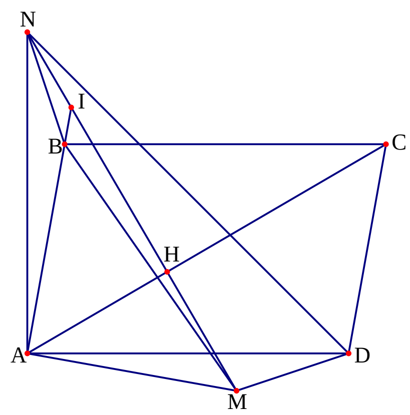
$$\widehat{HAM} + \widehat{HMA} = \widehat{NAB} + \widehat{HAD} + \widehat{HMA} = 90^0$$

Tuy nhiên dễ thấy $\widehat{NAB} + \widehat{HAD} = 90^0 - \widehat{BAC}$ *nên ta cần có* $\widehat{HMA} = 90^0 - \widehat{NAB} + \widehat{HAD} = \widehat{BAC}$. *Như vậy ta chỉ cần chứng minh được* $\widehat{BAC} = \widehat{HMA}$ *là xong.*

• **Lời giải.** Vì ABCD là hình bình hành nên

$$\widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 180^0$$

Mặt khác ta có $\widehat{NAD} + \widehat{BAM} = 180^0$ nên ta suy ra được $\widehat{BAD} + \widehat{NAM} = 180^0$. Từ đó ta được $\widehat{ABC} = \widehat{NAM}$. Lại có $AB = AM; AN = AD = BC$. Suy ra hai tam giác NAM và CAB bằng nhau, suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{HMA}$. Từ đó dẫn đến



$$\widehat{HMA} = 90^0 - \widehat{NAB} + \widehat{HAD} \Rightarrow \widehat{NAB} + \widehat{HAD} + \widehat{HMA} = 90^0$$

$$\Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{HAD} + \widehat{HMA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HAM} + \widehat{HMA} = 90^0$$

Vì thế góc $\widehat{MHA} = 90^0$ nên AC vuông góc với MN.

• ***Nhận xét.*** *Mấu chốt của bài toán là phát hiện ra cặp tam giác bằng nhau rồi sau đó xử lý thế nào thì có rất nhiều cách. Sau đây là một số ví dụ:*

+ Ta thử gọi giao điểm của NM với AB là I thì khi đó tam giác IAM vuông tại A. Với tam giác NAM bằng tam giác CAB ta có được $\widehat{IAC} = \widehat{NMA}$. *Khi đó dễ dàng suy ra được góc* $\widehat{AHM} = 90^0$

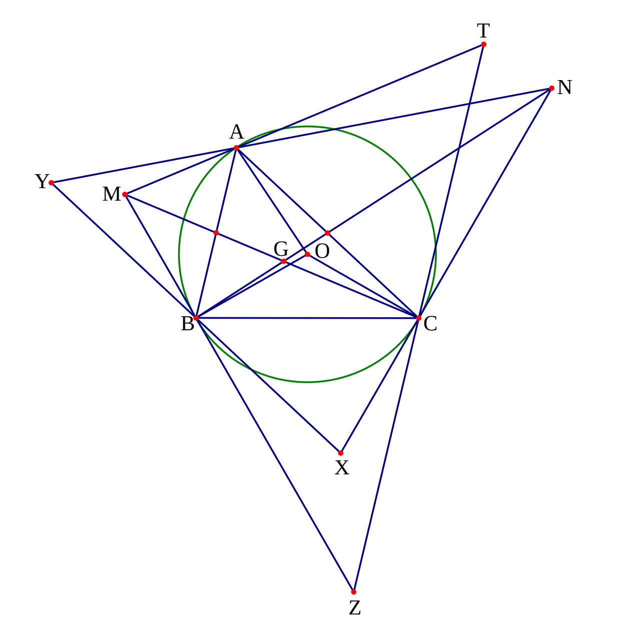
+ Hay trong tam giác AHM có $\widehat{AMN} + \widehat{MAH} = \widehat{BAC} + \widehat{HAM} = \widehat{BAM} = 90^0$ *nên* $\widehat{AHM} = 90^0$

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có G là trọng tâm. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt CG tại M. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt BG tại N. Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CN, AN và đường thẳng qua B song song với AC. Gọi Z và T theo thứ tự là giao điểm của BM và AM với đường thẳng qua C song song với AB.

a) Chứng minh $AB.CZ = AC.BX$

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh* $AB.CZ = AC.BX$ *ta cần tìm ra mối liên hệ giữa chúng. Để chứng minh chúng cần chứng minh được tam giác ABX đồng dạng với ACZ nhưng điều này khó thực hiện vì chúng không có mối liên hệ nên ta phả đi tìm đại lượng trung gian. Để ý đến yếu tố song song ta có* $\widehat{ABC} = \widehat{ZCB}$, *lại thấy* $\widehat{ZBC} = \widehat{CAB}$ *nên* $\Delta ABC \backsim \Delta CBZ \Rightarrow AB.CZ = CB^2$. *Bây giờ cần chứng minh* $AC.BX = BC^2$ *hay* $\Delta ABC \backsim \Delta CXB$, *điều này chứng minh hoàn toàn tương tự như cặp tam giác trên.*

• **Lời giải.** Vì AB song song với CZ nên ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ZCB}$.



Lại có $\widehat{ZBC} = \widehat{CAB}$ (do góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BC)

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta CBZ \Rightarrow AB.CZ = CB^2$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta ABC \backsim \Delta CXB \Rightarrow AC.BX = BC^2$

Từ hai kết quả trên ta suy ra được $AB.CZ = AC.BX$

b) Chứng minh $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

• ***Phân tích.*** *Lúc mới nhìn vào ta thường sẽ nghĩ đến sử dụng tương tự như câu a tuy nhiên ở đây không có yếu tố song song với BC nên không thể tương tự được chú ý vào yếu tố trọng tâm ta chưa khai thác đến nên ta gọi trung điểm của AB là E và của AC là F. Cần chứng minh được* $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ *tuy nhiên không thể chứng minh được tam giác MAB đồng dạng ANC để ý thấy* $\widehat{IAM} = \widehat{TAN}$ *do là hai góc đối đỉnh nên ta chuyển sang chứng minh* $\widehat{YAB} = \widehat{TAC}$ *hay* $\Delta YAB \backsim \Delta TAC$. *Ta quy bài toán về chứng minh* $AB.CT = AC.YB$. *Tích này khá giống với tích ta chứng minh ở ý a) chỉ có CT và YB là khác với ZT và XY. Chú ý đến yếu tố trọng tâm ta hoàn toàn có thể chứng minh được* $CT = CZ$ *và* $BX = BY$ *như sau.*

Vì AB song song với ZT nên $\frac{BE}{ZC} = \frac{AE}{CT} = \frac{ME}{MC}$ *mà* $AE = BE$ *nên* $CZ = CT$. *Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được* $BX = BY$ *nên áp dụng câu a) ta có* $AB.CZ = AC.BX \Rightarrow AB.CT = AC.YB$.

Tuy nhiên để chứng minh được $\Delta YAB \backsim \Delta TAC$ *thì cần thêm một yếu tố nữa. Để ý rằng do BY song song với AC và AB song song với CT nên* $\widehat{YBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACT}$ *Vậy bài toán được chứng minh*

• **Lời giả.** Vì AB song song với ZT nên $\frac{BE}{ZC} = \frac{AE}{CT} = \frac{ME}{MC}$ $AE = BE$ nên $CZ = CT$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $BX = BY$. Từ đó ta có $AB.CZ = AC.BX \Rightarrow AB.CT = AC.YB$

Mặt khác do BY song song với AC và AB song song với CT nên $\widehat{YBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ACT}$

Từ đó suy ra $\Delta YAB \backsim \Delta TAC \Rightarrow \widehat{YAB} = \widehat{TAC}$, mà ta lại có $\widehat{YAM} = \widehat{TAN}$ nên $\widehat{YAB} = \widehat{TAC}$.

Do đó $\widehat{YAM} + \widehat{MAB} = \widehat{TAN} + \widehat{NAC} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Vậy $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$

Đề số 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH LAI CHÂU

Năm học 2015 – 2016

Câu 1 (3.0 điểm).

Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức tại $x=2\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Chứng minh rằng $5^{n+3}-3.5^{n+1}+2^{6n+3}$ chia hết cho 59 (với n là số tự nhiên).

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+xy-y^2-5=0$.

Câu 3 (5.0 điểm).

a) Tìm m để phương trình $mx^2-2\left(m-1\right)x+m-3=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2=1$.

b) Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x=y\left(1-x^2\right)\\2y=x\left(1-y^2\right)\end{cases}$.

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho đường tròn (O) có đường kính $AB=2R$. Lấy C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM và K là giao điểm của AK với MN.

a) Chứng minh rằng tứ giác BCHK nội tiếp đường tròn.

b) Tính tích $AH.AK$ theo R.

c) Xác định vị trí của điểm K để tổng $KM+KN+KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho biểu thức $A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)$

- **Lời giải**

a) Rút gọn biểu thức A.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 0; x \ne 1$.

$$A = \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right] : \left[\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right]$$
$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}.(\sqrt{x}+1)$$
$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Tính giá trị biểu thức tại $x = 2\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)$.

Ta có $x^3 = 8\left[7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50}+3\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}.\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)\right] = 112-12x$.

Hay ta được $x^3+12x-112=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+28)=0 \Leftrightarrow x=4$ vì $x^2+4x+28>0$.

Thay vào biểu thức A ta được $A = \frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+1} = \frac{1}{3}$.

Vậy khi $x = 4$ thì giá trị của A là $\frac{1}{3}$.

Câu 2.

a) Chứng minh rằng $5^{n+3} - 3.5^{n+1} + 2^{6n+3}$ chia hết cho 59(với n là số tự nhiên).

- **Lời giải.** Ta có

$$5^{n+3} - 3.5^{n+1} + 2^{6n+3} = 5^3.5^n - 3.5.5^n + 8.64^n = 110.5^n + 8.64^n = 118.5^n + 8.(64^n - 5^n)$$

Dễ thấy $118.5^n \,\vdots\, 59$.

Lại có $64^n - 5^n = (64-5)(64^{n-1}+64^{n-2}.5+...+64.5^{n-2}+5^{n-1}) = 59(64^{n-1}+64^{n-2}.5+...+5^{n-1})$

Do đó $8.(64^n-5^n) \,\vdots\, 59$. Vậy ta được $5^{n+3} - 3.5^{n+1} + 2^{6n+3}$ chia hết cho 59.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+xy-y^2-5=0$.

- **Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với $(x+y)(2x-y)=5$.

Do x, y là các số nguyên nên $x+y$ và $2x-y$ là các ước của 5. Từ đs ta có bảng sau

$x+y$	1	-1	5	-5
$2x-y$	5	-5	1	-1
x	2	-2	2	-2
y	-1	1	3	-5

Vậy các cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y) = (2;-1),(2;3),(-2;1),(-2.-3)$

Câu 3 (5.0 điểm).

a) Tìm m để $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

• **Lời giải.** Điều kiện để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - m(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 4 \end{cases}$$

Khi đó theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m}; x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m}$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$ hay ta được

$$\left[\frac{2(m-1)}{m}\right]^2 - 2.\frac{m-3}{m} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 8 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm của phương trình ta được $m = 2$ là giá trị cần tìm.

b) Giải phương trình $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$.

• **Phân tích và lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ và $x \neq 0$.

Nhận thấy phương trình chỉ chứa một căn thức bậc hai và lai nằm dưới mẫu nên để đơn giản hóa ta sử dụng phép đặt ẩn phụ. Đặt $y = \sqrt{2-x^2}, y > 0$. Khi đó ta có $y^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow x + y = 2xy$.

Đến đây la có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2xy \\ x^2 + y^2 \end{cases}$, đây là hệ phương trình đối xứng dạng 1.

Ta có thể giải hệ trên như sau

$$\begin{cases} x + y = 2xy \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2xy \\ (x+y)^2 - 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2xy \\ (2xy)^2 - 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2xy \\ (2xy+1)(xy-1) = 0 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

+ Trường hợp 2. $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}; y = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; y = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $y > 0$ và điều kiện xác định ta được tập nghiệm $S = \left\{1; \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

c) Lấy hiệu theo vế hai phương trình ta được $2x - 2y = y - x - xy(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(xy+3) = 0$.

+ Với $x - y = 0$ ta có hệ $\begin{cases} x = y \\ 2y = x\left(1 - y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y\left(y^2 + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$.

+ Với $xy + 3 = 0$ ta được $xy = -3$ và y khác 0. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} xy = -3 \\ 2y = x\left(1 - y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -3 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}; y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}; y = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm như trên.

Câu 4 (6.0 điểm).

a) Tứ giác BCHK có $\widehat{AKB} + \widehat{HCB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên nội tiếp đường tròn.

b) Dễ thấy hai tam giác AHC và ABK nội tiếp đường tròn, do đó ta được $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AK}$.

Từ đó ta được $AH.AK = AB.AC = \frac{R}{2}.2R = R^2$.

c) Tam giác AMB vuông tại M có MC vuông góc với AB nên ta được $MC^2 = CA.CB = \frac{3R^3}{4}$.

Suy ra $MC = \frac{\sqrt{3}R}{2}$ nên ta được $MN = 2MC = R\sqrt{3}$.

Tam giác MBC vuông tại C nên theo định lí Pitago ta có $MB^2 = MC^2 + BC^2 = 3R^2$.

Suy ra $BM = R\sqrt{3} = MN$. Từ đó ta được $MB = MC = MN$ nên tam giác MNB đều.

Từ đó ta có $\widehat{NMB} = \widehat{IKB} = 60^0$

Trên đoạn KN lấy điểm I sao cho $NI = MK$.

Hai tam giác AKB và NIB có $NI = MK, \widehat{BMK} = \widehat{BNI}; MB = NB$ nên bằng nhau.

Do đó ta được $IB = BK$, mà ta có $\widehat{NMB} = \widehat{IKB} = 60^0$ nên tam giác KIB đều.

Suy ra $KI = KB$ nên $KM + KN + KB = 2KN$.

Do vậy $KM + KN + KB$ lớn nhất khi KN lớn nhất, khi đó KN là đường kính của đường tròn (O), điều này xảy ra khi và chỉ khi K là điểm chính giữa cung MB.

Khi đó $KM + KN + KB$ nhận giá trị lớn nhất là 4R.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(\frac{1}{a + 2b} + \frac{1}{b + 2c} + \frac{1}{c + 2a}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{a + b + b} = \frac{9}{a + 2b}; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{b + 2c}; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{9}{c + 2a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\left(\frac{1}{a + 2b} + \frac{1}{b + 2c} + \frac{1}{c + 2a}\right)$

Hay ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Đề số 1

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH HẢI DƯƠNG

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (2.0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\sqrt{1-x+\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\dfrac{1}{2017}$.

b) Cho $a;b;c$ là ba số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}$

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2x^2-2x+1=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\left(y+1\right)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thoả mãn $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Câu 4 (3.0 điểm).

1. Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn (O,R). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB). Tia EF cắt tia CB tại P, AP cắt đường tròn (O,R) tại M (M khác A).

a) Chứng minh rằng $PE.PF=PM.PA$ và AM vuông góc với HM.

b) Cho cạnh BC cố định và điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A(I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho $a;b;c$ là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (2.0 điểm).

a) Cho biểu thức $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 \le x \le 1$.

Tính giá trị của biểu thức P khi $x = -\dfrac{1}{2017}$.

• ***Phân tích.*** *Ta có* $P = \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$. *Để tính giá trị của biểu thức P ta có thể thay trực tiếp* $x = -\dfrac{1}{2017}$ *hoặc biến đổi tiếp biểu thức theo cách sau*

$$P^2 = (1-x)\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = (1-x)\left[2+2\sqrt{1-(1-x^2)}\right] = 2(1-x)(1+|x|)$$

Để ý ta thấy $x = -\dfrac{1}{2017} < 0$ *nên ta chỉ lấy P trong trường hợp* $x < 0$

• **Lời giải.** Với $-1 \le x \le 1$ ta được $1-x \ge 0; 1-x^2 \ge 0$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \sqrt{(1-x)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} + \sqrt{(1-x)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)} = \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P^2 &= (1-x)\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^2 \\ &= (1-x)\left(1+\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} + 1 - \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= (1-x)\left[2+2\sqrt{1-(1-x^2)}\right] = 2(1-x)(1+|x|) \end{aligned}$$

Khi $x < 0$ ta được $P^2 = 2(1-x)(1-x) = 2(1-x)^2$

Mà $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \ge 0$ với mọi $-1 \le x \le 1$.

Suy ra ta được $P = \sqrt{2}(1-x)$. Vì $x = \dfrac{-1}{2017} < 0$ nên giá trị của biểu thức P khi $x = \dfrac{-1}{2017}$ là

$$P = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2017}\right) = \frac{2018}{2017}.\sqrt{2}$$

b) Cho $a; b; c$ là ba số thực không âm thoả mãn $a+b+c = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 2$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a} + \dfrac{\sqrt{b}}{1+b} + \dfrac{\sqrt{c}}{1+c} = \dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

• ***Phân tích.*** *Đây là dạng toán về biến đổi đồng nhất biểu đại số. Như vậy trước hết ta cần biến đổi giả thiết để có thêm giả thiết mới. Từ* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 2$ *và* $a+b+c = 2$ *ta có* $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} = 1$.

Nhận thấy biểu thức P chứa các tổng $\sqrt{a}+1, \sqrt{b}+1, \sqrt{c}+1$ *nên ta chú ý đến phép biến đổi*

$$a+1=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự và thay vào biểu thức để rút gọn.

- **Lời giải.** Đặt $\sqrt{a}=x; \sqrt{b}=y; \sqrt{c}=z$, khi đó ta có $x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$.

Suy ra $2\left(xy+yz+zx\right)=\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=2^2-2=2$

Hay ta được $xy+yz+zx=1$, do đó $1+a=xy+yz+zx+x^2=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

Tương tự ta có $1+b=\left(y+z\right)\left(y+x\right); 1+c=\left(z+x\right)\left(z+y\right)$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{1+a}+\frac{\sqrt{b}}{1+b}+\frac{\sqrt{c}}{1+c}&=\frac{x}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{\left(y+z\right)\left(y+x\right)}+\frac{z}{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}\\&=\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2\left(xy+yz+zx\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}\\&=\frac{2.1}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}=\frac{2}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}\end{aligned}$$

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $2x^2-2x+1=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$.

- ***Phân tích.*** *Biến đổi phương trình đã cho ta được*

$$\left(x^2-x+2\right)+x^2-x-1=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+2}-1$. *Thay vào phương trình trên ta được*

$$t^2+2t+x^2-x-2xt-t=0 \Leftrightarrow \left(t-x\right)^2+t-x=0 \Leftrightarrow \left(t-x\right)\left(t-x+1\right)=0$$

Đến đây ta giải được phương trình.

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \in R$. Biến đổi phương trình ta được

$$\begin{aligned}&2x^2-2x+1=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)\\ \Leftrightarrow &\left(x^2-x+2\right)+x^2-x-1=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)\end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+2}-1 \Rightarrow x^2-x+2=\left(t+1\right)^2$. Thay vào phương trình trên ta được

$$\begin{aligned}&\left(t+1\right)^2+x^2-x-1=\left(2x+1\right)t \Leftrightarrow t^2+2t+1+x^2-x-1=\left(2x+1\right)t\\ \Leftrightarrow\ & t^2+2t+x^2-x-2xt-t=0 \Leftrightarrow \left(t-x\right)^2+t-x=0\\ \Leftrightarrow\ & \left(t-x\right)\left(t-x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=x\\ t=x-1\end{array}\right.\end{aligned}$$

+ Với $t=x$ ta có $\sqrt{x^2-x+2}-1=x \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge -1\\ x^2-x+2=\left(x+1\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 - x + 2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

+ Với $t = x - 1$ ta có $\sqrt{x^2 - x + 2} - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{2; \dfrac{1}{3}\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$

- ***Phân tích.*** *Biến đổi phương trình thứ nhất ta được* $x^2 + (y+1)^2 - x(y+1) = 1$. *Khi đó nếu đặt ẩn phụ* $t = y + 1$ *thì ta thu được hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = x + t \end{cases}$$

Quan sát hệ phương trình trên ta nhận thấy nếu nhân chéo hai phương trình với nhau thì ta thu được phương trình đẳng cấp bậc ba.

- **Lời giải.** Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 - x(y+1) = 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$$

Đặt $t = y + 1$, khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = x + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = (x+t)(x^2 + t^2 - xt) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = x^3 - t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t = 1 \\ x = t = -1 \end{array}\right.$$

+ Với $x = t = 1$, khi đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 0)$.

+ Với $x = t = -1$, khi đó hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; -2)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x; y) = (1; 0), (-1; -2)$.

Câu 3 (2.0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7$.

- **Lời giải.** Biến đổi phương trình đã cho ta có

$$2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 3x - 6y - 5xy = -7$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 - xy + 3x - 6y = -7 \Leftrightarrow 2x(x - 2y) + y(2y - x) + 3(x - 2y) = -7$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y)(2x - y + 3) = -7$$

Vì $x;y \in Z$ nên suy ra $(x-2y);(2x-y+3) \in Z$. Lại thấy $-7 = (-1).7 = 1.(-7)$ nên ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x-y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$

+ Trường hợp 3. Với $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-4 \end{cases}$

+ Trường hợp 4. Với $\begin{cases} x-2y=-7 \\ 2x-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

Thử lại ta được các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(3;2),(-5;-6),(-7;-4),(1;4)$.

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể sử lý các trường hợp trên bằng bảng sau.*

$x-2y=-7$	-1	7	1	-7
$2x-y+3=1$	7	-1	-7	1
x	3	-5	-7	1
y	2	-6	-4	4

Từ bảng kết quả trên ta có các nghiệm của phương trình.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

- ***Phân tích.*** *Để* $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ *là số chính phương thì* $\sqrt{n^2+2n+18}$ *phải là số tự nhiên. Từ đó ta có* $n^2+2n+18=k^2\ (k \in N)$*. Giải phương trình ta tìm được k và n.*

- **Lời giải.** Ta có $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương

Mà $n^2+2n+9 \in N, \forall n \in N$ suy ra $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên

Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k\ (k \in N)$. Khi đó ta được

$$n^2+2n+18=k^2 \Leftrightarrow n^2+2n+1+17=k^2 \Leftrightarrow (n+1)^2+17=k^2$$
$$\Leftrightarrow k^2-(n+1)^2=17 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$$

Vì k, n đều là số tự nhiên nên $k+n+1>k-n-1$ và $k>1$ nên ta được

$$(k+n+1)(k-n-1)=17 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+n=16 \\ k-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases}$$

Từ đó ta có $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2$ (thoả mãn).

Vậy với $n=7$ thì $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Câu 4 (3.0 điểm).

1. Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB). Tia EF cắt tia CB tại P, AP cắt đường tròn $\left(O;R\right)$ tại M (M khác A).

a) Chứng minh rằng $PE.PF = PM.PA$ và AM vuông góc với HM.

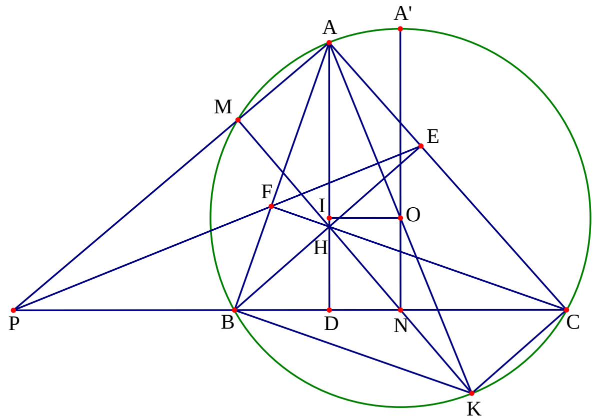
- **Phân tích.**

+ *Để chứng minh* $PE.PF = PM.PA$ *ta cần chỉ ra được* $PE.PF = PB.PC$ *và* $PB.PC = PM.PA$ *.Dễ thấy* $PE.PF = PB.PC$ *do hai tam giác* ΔPBF *và* ΔPEC *đồng dạng và* $PB.PC = PM.PA$ *do hai tam giác* ΔPBM *và* ΔPAC *đồng dạng.*

+ Để chứng minh AM vuông góc với MH ta đi chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF.

- **Lời giải.**

Do BE, CF là đường cao của tam giác ABC nên ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$. Suy ra tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{PBF} = \widehat{PEC}$. Từ đó hai tam giác ΔPBF và ΔPEC đồng dạng nên $\dfrac{PB}{PE} = \dfrac{PF}{PC} \Rightarrow PE.PF = PB.PC$. Lại có tứ giác AMBC nội tiếp nên suy ra $\widehat{PBM} = \widehat{PAC}$



Từ đó hai tam giác ΔPBM và ΔPAC đồng dạng $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PM}{PC} \Rightarrow PB.PC = PM.PA$

Kết hợp hai kết quả trên suy ra $PE.PF = PM.PA$.

Từ $PE.PF = PM.PA$ ta được $\dfrac{PE}{PM} = \dfrac{PA}{PF}$, suy ra hai tam giác ΔPMF và ΔPEA đồng dạng với nhau.

Từ đó ta được $\widehat{PMF} = \widehat{PEA}$ nên tứ giác AMFE nội tiếp.

Do $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ nên suy ra tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Suy ra năm điểm A, M, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Từ đó dẫn đến $\widehat{AMH} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $AM \perp HM$.

b) Cho cạnh BC cố định và điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

- ***Phân tích.*** *Kẻ đường kính AK của đường tròn* $\left(O;R\right)$. *Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành. Từ đó ta được* $AH = 2.ON$. *Kẻ OI vuông góc với AD suy ra tứ giác OIDN là hình chữ nhật. Từ đó ta suy ra được*

$$AI^2 = AO^2 - OI^2 = R^2 - DN^2 \Rightarrow AI = \sqrt{R^2 - DN^2}$$

Suy ra $AD = AI + ID = \sqrt{R^2 - DN^2} + ON$. *Do đó ta có*

$$S_{BHC} = \frac{1}{2}BC.HD = \frac{1}{2}BC\left(AD - AH\right)$$
$$= \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} + ON - 2.ON\right) = \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} - ON\right)$$

Do BC, R, ON không đổi suy ra S_{BHC} đạt giá trị lớn nhất khi DN đạt giá trị nhỏ nhất. Mà $AB < AC$ suy ra điểm A chuyển động trên cung nhỏ $A'B$ và A không trùng với A'. Suy ra điểm D chuyển động trên đoạn NB và D không trùng với N do đó không tìm được giá trị nhỏ nhất của DN. Vậy không tìm được vị trí điểm A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

- **Lời giải.** Kẻ đường kính AK của đường tròn $\left(O;R\right)$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC.

Dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành. Mà điểm N là trung điểm của BC nên N cũng là trung điểm của HK nên ON là đường trung bình của tam giác KAH, do đó $AH = 2.ON$. Kẻ OI vuông góc với AD (I thuộc AD) suy ra tứ giác OIDN là hình chữ nhật.
Từ đó ta suy ra được $OI = DN; ON = DI$. Áp dụng định lý pytago vào tam giác AIO vuông tại I ta có

$$AI^2 = AO^2 - OI^2 = R^2 - DN^2 \Rightarrow AI = \sqrt{R^2 - DN^2}$$

Suy ra $AD = AI + ID = \sqrt{R^2 - DN^2} + ON$. Do đó ta có

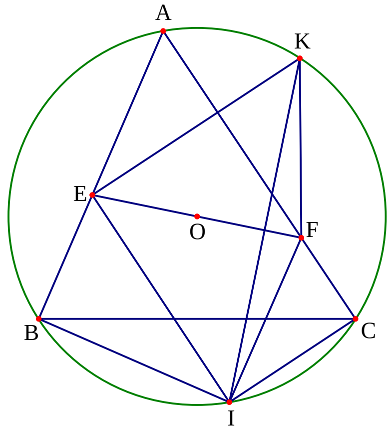
$$S_{BHC} = \frac{1}{2}BC.HD = \frac{1}{2}BC\left(AD - AH\right)$$
$$= \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} + ON - 2.ON\right) = \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} - ON\right)$$

Do BC, R, ON không đổi suy ra S_{BHC} đạt giá trị lớn nhất khi DN đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $AB < AC$ suy ra điểm A chuyển động trên cung nhỏ $A'B$ (A' là điểm chính giữa cung lớn BC) và A không trùng với A'. Suy ra điểm D chuyển động trên đoạn NB và D không trùng với N do đó không tìm được giá trị nhỏ nhất của DN. Vậy không tìm được vị trí điểm A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A(I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Phân tích.*** *Quan sát hình vẽ ta sự đoán EF đi qua điểm O, do đó ta quy bài toán về chứng minh ba điểm E, F. O thẳng hàng. Muốn vậy ta lấy điểm K đối xứng với I qua EF, khi đó EF là trung trực của IK. Như vậy để chứng minh ba điểm E, O, F thẳng hàng ta cần chỉ ra $OI = OK$. Chú ý rằng I thuộc đường tròn $\left(O\right)$ nên để có $OI = OK$ ta cần chứng minh K thuộc đường tròn $\left(O\right)$. Do tam giác ABC nhọn bất kì nên khi K trùng với A thì hiển nhiên ta có điều cần chứng minh. Do đó ta cần xét các trường hợp K trùng với A và K không trùng với A.*



• **Lời giải.** Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

+ Xét trường hợp điểm K trùng với điểm A. Khi đó KI là dây cung của đường tròn $\left(O\right)$.

Mà EF là đường trung trực của KI suy ra EF đi qua O.

+ Xét trường hợp điểm K không trùng với A.

Ta có $\widehat{CIF}+\widehat{BIE}=90^0.2=180^0$ suy ra $\widehat{EIF}+\widehat{BIC}=180^0$

Do tứ giác ABIC nội tiếp suy ra $\widehat{BAC}+\widehat{BIC}=180^0$

Từ đó ta có $\widehat{BAC}=\widehat{EIF}\Rightarrow\widehat{EIF}=\widehat{EAF}$. Lại có $\widehat{EKF}=\widehat{EIF}$ (Do I và K đối xứng qua EF)

Do đó $\widehat{EKF}=\widehat{EAF}$ suy ra bốn điểm A, K, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Khi đó ta thu được hoặc có tứ giác AKFE nội tiếp hoặc có AKEF nội tiếp

Không mất tính tổng quát giả sử AKFE nội tiếp

Suy ra $\widehat{KAF}=\widehat{KEF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KF}$) nên $\widehat{KAB}=\widehat{KEF}$ (1)

Lại có $\widehat{IEF}=\widehat{KEF}$ (Do K và I đối xứng qua EF) và $\widehat{IEF}=\widehat{BIK}$ (cùng phụ $\widehat{KIE}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAB}=\widehat{BIK}$, dẫn đến tứ giác AKBI nội tiếp nên K nằm trên đường tròn $\left(O\right)$.

Từ đó suy ra KI là dây cung của đường tròn $\left(O\right)$. Mà EF là đường trung trực của KI nên ba ba điểm E, O, F thẳng hàng. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho $a;b;c$ là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$

• ***Phân tích.*** *Để đánh giá làm mất căn thức bậc hai và chú ý đến chiều bất đẳng thức cần chứng minh ta có đánh giá* $6a^2+8ab+11b^2=\left(2a+3b\right)^2+2\left(a-b\right)^2\ge\left(2a+3b\right)^2$. *Như vậy ta thu được bất đẳng thức* $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}\le\dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}$. *Để ý tiếp ta lại thấy* $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}\le\dfrac{3a+2b}{5}$. *Như vậy ta có* $M\le\dfrac{3a+2b}{5}+\dfrac{3b+2c}{5}+\dfrac{3c+2a}{5}=a+b+c$.

Bài toán sẽ kết thúc khi ta chỉ ra được $a+b+c\le 3$. *Để ý đến giả thiết ta có đánh giá hết sức quen thuộc là* $\left(a+b+c\right)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$. *Đến đây ta chứng minh được bất đẳng thức.*

• **Lời giải.** Đặt vế trái của $M=\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}$.

Ta có $6a^2+8ab+11b^2=\left(2a+3b\right)^2+2\left(a-b\right)^2\ge\left(2a+3b\right)^2$, dấu bằng xẩy ra khi $a=b$.

Suy ra $\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}\ge 2a+3b>0$ mà $a^2+3ab+b^2>0$ với $a;b>0$

Do đó ta được $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \le \frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}$.

Ta đi chứng minh $\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le \frac{3a+2b}{5}$.

Thật vậy $\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b} \le \frac{3a+2b}{5} \Leftrightarrow 5\left(a^2+3ab+b^2\right) \le \left(2a+3b\right)\left(3a+2b\right) \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \ge 0$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b$. Do đó $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}} \le \frac{3a+2b}{5}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}} \le \frac{3b+2c}{5}; \frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}} \le \frac{3c+2a}{5}$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được $M \le \frac{3a+2b}{5}+\frac{3b+2c}{5}+\frac{3c+2a}{5}=a+b+c$

Mặt khác ta lại có $\left(a+b+c\right)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$ nên $a+b+c \le 3$.

Vậy ta được $M \le 3$, dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Đề số 2

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH BẮC NINH

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (3.0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0; a^2 + b^2 \neq c^2; b^2 + c^2 \neq a^2; c^2 + a^2 \neq b^2$.

Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$.

Câu 2 (4.0 điểm).

1) Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{5} + \dfrac{c}{4} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Câu 3 (4.0 điểm).

1) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

2) Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$$

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' đường kính AO. Điểm M thay đổi trên nửa đường tròn (O') (M khác A và O), tia OM cắt đường tròn (O) tại C. Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với đường tròn (O').

1) Chứng minh rằng tam giác ADM cân.

2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt tia OD tại E, chứng minh rằng EA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

3) Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Tính độ dài đoạn OM theo a biết ME song song với AB.

Câu 5 (3.0 điểm).

1) Cho hình vuông MNPQ và điểm A nằm trong tam giác MNP sao cho $AM^2 = AP^2 + 2AN^2$. Tính số đo của góc $\widehat{PAN}$.

2) Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn các điều kiện $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (3.0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

• **Lời giải.** Ta có

$$B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{8 + 2\sqrt{8} + 1}}}$$
$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{(\sqrt{8} + 1)^2}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{8} + 1}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1}}$$
$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}} = \sqrt{18 + 2\sqrt{18}.5 + 25} = \sqrt{\left(\sqrt{18} + 5\right)^2} = 3\sqrt{2} + 5$$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2,$ $c^2 + a^2 \neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$

• ***Phân tích.*** *Từ giả thiết* $a + b + c = 0$ *ta được* $a + b = -c \Leftrightarrow (a + b)^2 = c^2 \Leftrightarrow 2ab = c^2 - a^2 - b^2$.

Do đó ta được $P = \dfrac{a^2}{2bc} + \dfrac{b^2}{2ca} + \dfrac{c^2}{2ab} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$.

Cũng từ $a + b + c = 0$ *ta chứng minh được* $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. *Đến đây ta tính được P.*

• **Lời giải.** Từ giả thiết $a + b + c = 0$ ta được

$$P = \frac{a^2}{(b + c)^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{(c + a)^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{(a + b)^2 - a^2 - b^2} = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$$

Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$.

Từ đó suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ do vậy ta được $P = \dfrac{3}{2}$

Câu 2. (4.0 điểm).

1) Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

• **Lời giải.** Ta có $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2\sqrt{x} \\ y = 3\sqrt{x} \end{array}\right.$

+ Với $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 0$, không có x thỏa mãn.

+ Với $y=3\sqrt{x}\Rightarrow 2x+1=3\sqrt{x}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Từ đó tìm được các điểm thỏa mãn là $M(1;3)$ hoặc $M\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right)$.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{5}+\dfrac{c}{4}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

- **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Với $a=0\Rightarrow b=-\dfrac{5}{4}c$ ta được $\dfrac{5}{4}cx=c$.

Nếu $c=0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Nếu $c\neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4}{5}$.

+ Với $a\neq 0$, khi đó phương trình có bậc hai ẩn x. Từ $\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{5}+\dfrac{c}{4}=0$ ta được $c=-\dfrac{4}{6}a-\dfrac{4}{5}b$. Từ đó

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac=b^2-4a\left(-\frac{4}{6}a-\frac{4}{5}b\right)=b^2+\frac{16}{5}ab+\frac{8}{3}a^2\\&=b^2+\frac{16}{5}ab+\frac{64}{25}a^2+\frac{8}{75}a^2=\left(b+\frac{8}{5}a\right)^2+\frac{8}{75}a^2>0\end{aligned}$$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 3 (4.0 điểm).

1) Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(a+c)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geq\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

- ***Phân tích.*** *Để ý đến đánh giá* $4ab\leq(a+b)^2$ *ta có*

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}\geq\frac{8}{(a+b)^2+c(a+b)^2}=\frac{8}{(c+1)(a+b)^2}$$

Lại có $a^2+b^2\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}$ *nên* $\dfrac{8}{(a+b)^2+4abc}+\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq\dfrac{8}{(c+1)(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)^2}{4}\geq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$

Như vậy ta cần chỉ ta được $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}\geq\dfrac{8}{c+3}$. *Đây là đánh giá đúng theo bất đẳng thức AM – GM.*

- **Lời giải.** Ta có $4ab\leq(a+b)^2$ nên ta suy ra được

$$\frac{8}{\left(a+b\right)^2+4abc}\ge\frac{8}{\left(a+b\right)^2+c\left(a+b\right)^2}=\frac{8}{\left(c+1\right)\left(a+b\right)^2}$$

Lại có $a^2+b^2\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{2}$ nên $\frac{8}{\left(a+b\right)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{8}{\left(c+1\right)\left(a+b\right)^2}+\frac{\left(a+b\right)^2}{4}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$

Mặt khác ta lại có $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}=\frac{8}{2.\sqrt{2\left(c+1\right)}}\ge\frac{8}{c+3}$. Do đó $\frac{8}{\left(a+b\right)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{8}{c+3}$

Tương tự $\frac{8}{\left(b+c\right)^2+4abc}+\frac{b^2+c^2}{2}\ge\frac{8}{a+3};\frac{8}{\left(c+a\right)^2+4abc}+\frac{a^2+c^2}{2}\ge\frac{8}{b+3}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

$$\frac{8}{\left(a+b\right)^2+4abc}+\frac{8}{\left(b+c\right)^2+4abc}+\frac{8}{\left(a+c\right)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\ge\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2) Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình $a^2+b^2+16c^2=9k^2+1$.

- ***Phân tích.*** *Từ giả thiết ta nhận thấy $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1. Mà bình phương của số nguyên tố chia 3 thì có số dư là 0 hoặc 1 nên từ $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1 ta suy ra được hai trong ba số a, b, c phải bằng 3. Do vai trò của a và b như nhau và khác c nên ta đi xét các trường hợp $a=b=3$ hoặc $a=c=3$ hoặc* $b=c=3$.

- **Lời giải.** Vì $9k^2+1$ chia 3 có số dư là 1 nên $a^2+b^2+16c^2$ chia 3 có số dư là 1, từ đó ta suy ra được $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1. Mà bình phương của số nguyên tố chia 3 thì có số dư là 0 hoặc 1 nên từ $a^2+b^2+c^2$ chia 3 có số dư là 1 ta suy ra được hai trong ba số a, b, c phải bằng 3.

+ Trường hợp 1. Khi $a=b=3$ ta có $18+16c^2=9k^2+1\Rightarrow17=9k^2-16c^2=\left(3k-4c\right)\left(3k+4c\right)$.

Do 17 là số nguyên tố và $3k+4c>3k-4c$ nên từ được $\begin{cases}3k-4c=1\\3k+4c=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=3\\c=2\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy ta được $\left(a;b;c;k\right)=\left(3;3;2;3\right)$.

+ Trường hợp 2. Khi $a=c=3$ hoặc $b=c=3$.

Với $a=3$ ta có $3^2+b^2+16.3^2=9k^2+1\Rightarrow152=9k^2-b^2=\left(3k-b\right)\left(3k+b\right)=2^3.19$.

Vì $3k-b;3k+b$ cùng tính chẵn lẻ mà tích là chẵn nên chúng cùng chẵn. Ta được các khả năng sau:

- Nếu $\begin{cases}3k-b=2\\3k+b=76\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=13\\b=37\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ta được các bộ $\left(a;b;c;k\right)$ thỏa mãn là $\left(a;b;c;k\right)=\left(3;37;3;13\right)$

- Nếu $\begin{cases}3k-b=4\\3k+b=38\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=7\\b=17\end{cases}$ (thỏa mãn).

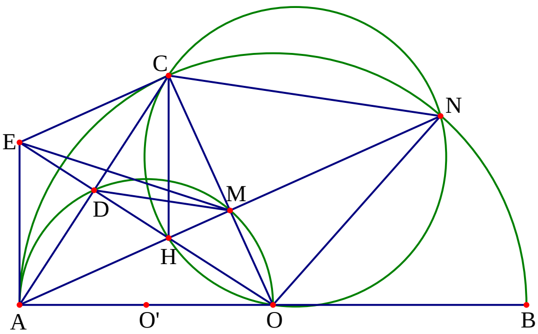
Ta được các bộ $\left(a;b;c;k\right)$ thỏa mãn là $\left(a;b;c;k\right)=\left(3;17;3;7\right)$

Tương tự ta có các bộ $\left(a;b;c;k\right)=\left(37;3;3;13\right),\left(17;3;3;7\right)$.

Câu 4 (6.0 điểm).

1) Tam giác AOC cân tại O và có OD là đường cao nên là phân giác trong góc $\widehat{AOC}$, do đó $\widehat{AOD}=\widehat{COD}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DM}$ nên $DA=DM.$ Vậy tam giác AMD cân tại D.

2) Dễ thấy $\Delta OEA=\Delta OEC\left(c.g.c\right)$, từ đó suy ra ta được $\widehat{OAE}=\widehat{OCE}=90^0$



Do đó $AE\perp AB$. Vậy AE là tiếp tuyến chung của $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$

3) Giả sử AM cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại N'. Ta có $\Delta OAN'$ cân tại O và $OM\perp AN'$ nên OM là đường trung trực của AN'. Từ đó ta được $CA=CN'$.

Ta có $\widehat{CN'A}=\widehat{CAM}$ mà $\widehat{CAM}=\widehat{DOM}$, do đó $\widehat{CN'H}=\widehat{COH}$. Suy ra bốn điểm C,N',O,H thuộc một đường tròn. Suy ra N' thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCHO. Do vậy N' trùng với N.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Vì ME song song với AB và $AB\perp AE$ nên $ME\perp AE$.

Ta có hai tam giác MAO,EMA đồng dạng nên $\dfrac{MO}{EA}=\dfrac{MA}{EM}=\dfrac{AO}{MA}\Rightarrow MA^2=AO.EM$.

Dễ thấy ΔMEO cân tại M nên $ME=MO.$ Thay vào hệ thức trên ta được $MA^2=OA.MO$

Đặt $MO=x>0$ ta có $MA^2=OA^2-MO^2=a^2-x^2$.

Từ $MA^2=OA.MO$ suy ra $a^2-x^2=ax\Leftrightarrow x^2+ax-a^2=0$.

Từ đó tìm được $OM=\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)a}{2}$.

Câu 5 (3.0 điểm).

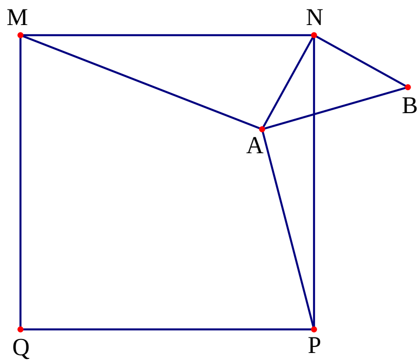
1) Cho hình vuông MNPQ và điểm A nằm trong tam giác MNP sao cho $AM^2=AP^2+2AN^2$. Tính số đo của góc $\widehat{PAN}$.

• **Lời giải.** Dựng tam giác ANB vuông cân tại N (A, B nằm khác phía đối với NP).

Ta có $AB^2=2AN^2$, $\widehat{BAN}=45^0$ và $\Delta AMN=\Delta BNP\left(c.g.c\right)\Rightarrow AM=BP$.

Do đó $AP^2+AB^2=AP^2+2AN^2=AM^2=BP^2$ nên suy ra ΔABP vuông tại A.

Nên $\widehat{PAN}=\widehat{PAB}+\widehat{BAN}=90^0+45^0=135^0$



2) Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

- **Lời giải.** Gọi $x_1; x_2; x_3$ là ba nghiệm của $P(x)$ ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Suy ra, $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$

Do $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm nên các phương trình $Q(x) - x_i = 0\ (i = 1,2,3)$ vô nghiệm.

Hay các phương trình $x^2 + 2016x + 2017 - x_i = 0\ (i = 1,2,3)$ vô nghiệm

Do đó, các biệt thức tương ứng $\Delta_i' = 1008^2 - (2017 - x_i) < 0 \Leftrightarrow 2017 - x_i > 1008^2$

Suy ra $P(2017) = (2017 - x_1)(2017 - x_2)(2017 - x_3) > 1008^6$.

Đề số 3

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH ĐỒNG NAI

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (3.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức $P=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc$

Câu 2 (4.0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $(x^2-9)^2=12x+1$ b) $\sqrt{x+2}=x^2-2$

Câu 3 (5.0 điểm).

a) Cho a, b là hai số thực và x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$.

b) Cho x, y là hai số thực dương sao cho $x+y=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}\ge\dfrac{4}{3}$.

Câu 4 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB=5, BC=6, CA=7$.

a) Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng IG song song với BC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5 (3.0 điểm). Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp cũng là số nguyên.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Tính giá trị biểu thức: $P=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc$

- ***Phân tích.*** *Biến đổi biểu thức trong căn ta được* $(1-b^2)(1-c^2)=1-b^2-c^2+b^2c^2$. *Quan sát giả thiết ta lại thấy* $1-b^2-c^2=a^2+2abc$. *Do đó chú ý đến a, b, c dương ta được*

$$\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}=\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}=\sqrt{(a+bc)^2}=a+bc$$

Đến đây áp dụng tương tự ta tính được biểu thức T

- **Lời giải.** Theo bài ra: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

Suy ra $a^2+2abc=1-b^2-c^2; b^2+2abc=1-c^2-a^2; c^2+2abc=1-b^2-a^2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}P&=a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)}+c\sqrt{(1-b^2)(1-a^2)}-abc\\&=a\sqrt{1-c^2-b^2+b^2c^2}+b\sqrt{1-c^2-a^2+a^2c^2}+c\sqrt{1-a^2-b^2+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{a^2+2abc+b^2c^2}+b\sqrt{b^2+2abc+a^2c^2}+c\sqrt{c^2+2abc+a^2b^2}-abc\\&=a\sqrt{(a+bc)^2}+b\sqrt{(b+ac)^2}+c\sqrt{(c+ab)^2}-abc\\&=a(a+bc)+b(b+ac)+c(c+ab)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1\end{aligned}$$

• ***Nhận xét.*** *Xem* $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ *là phương trình ẩn a ta có*

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1 \Leftrightarrow a^2+\left(2bc\right)a+b^2+c^2-1=0$$

Khi đó ta có $\Delta' = b^2c^2-b^2-c^2+1=(b^2-1)\left(c^2-1\right)$. *Từ đó phương trình có các nghiệm*

$$\begin{cases} a=-bc+\sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)} \\ a=-bc-\sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)}=a+bc>0 \\ \sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)}=-\left(a+bc\right)<0 \end{cases}$$

Do a, b, c là các số dương nên $\sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)}=-\left(a+bc\right)<0$ *(loại).*

Do đó ta có $\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}=a+bc$.

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}=b+ac; \sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}=c+ab$.

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} P &= a\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}+b\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}+c\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}-abc \\ &= a\left(a+bc\right)+b\left(b+ac\right)+c\left(c+ab\right)-abc=a^2+b^2+c^2+2abc=1 \end{aligned}$$

Câu 2.

a) Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\left(x^2-9\right)^2=12x+1 \Leftrightarrow x^4-18x^2+81=12x+1$$
$$\Leftrightarrow x^4+18x^2+81=36x^2+12x+1 \Leftrightarrow \left(x^2+9\right)^2=\left(6x+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9=6x+1 \\ x^2+9=-6x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=0 \\ x^2+6x+10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{2;4\right\}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -2$. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\sqrt{x+2}=x^2-2 \Leftrightarrow x+2+2.\sqrt{x+2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}+\dfrac{1}{2}=x+\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x+2}+\dfrac{1}{2}=-x-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=x \\ \sqrt{x+2}=-x-1 \end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

+ Với $\sqrt{x+2}=-x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \le 0 \\ x^2+2x+1=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};2\right\}$.

Câu 3.

a) Cho a, b là hai số thực và x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

- **Lời giải.** Do $x>0; y>0$ nên biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\Leftrightarrow\frac{a^2(x+y)}{x}+\frac{b^2(x+y)}{y}\ge(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2x}{y}\ge(a+b)^2\Leftrightarrow\frac{a^2y}{x}-2ab+\frac{b^2x}{y}\ge0\Leftrightarrow\left(\frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2\ge0$$

Do bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta được $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

b) Cho x, y là hai số thực dương sao cho $x+y=1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}\ge\frac{4}{3}$.

Do $x+y=1$ nên ta được $x=1-y; y=1-x$. Khi đó ta có

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}=\frac{x}{(1-x)(1+x)}+\frac{y}{(1-y)(1+y)}=\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}$$

Do $x>0; y>0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge2\sqrt{\frac{x}{y(1+x)}.\frac{y}{x(1+y)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge2\sqrt{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}=2\sqrt{\frac{1}{1+x+y+xy}}=2\sqrt{\frac{1}{2+xy}}$$

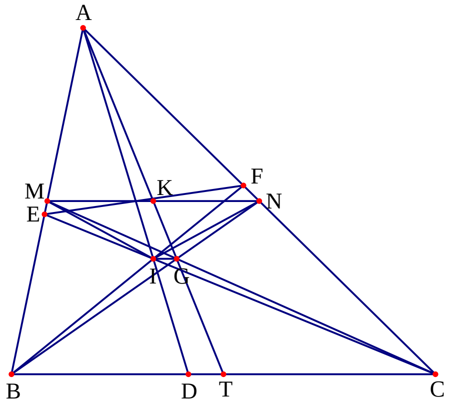
Mặt khác ta lại có $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow2+xy\le\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{2+xy}\ge\frac{4}{9}$

Do đó ta được $2.\sqrt{\frac{1}{2+xy}}\ge2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$. Kết hợp hai kết quả trên ta có $\frac{x}{y(1+x)}+\frac{y}{x(1+y)}\ge\frac{3}{4}$

Hay ta được $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}\ge\frac{4}{3}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 4 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB=5; BC=6; CA=7$.

a) Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng IG song song với BC.



• ***Phân tích.*** *Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường phân giác của tam giác ABC lần lượt hạ từ A, B, C.*

Gọi T là trung điểm của BC khi đó ta có $\frac{AG}{GT} = 2$.

Như vậy để chứng minh được IG song song với BC ta cần chứng minh được $\frac{AI}{DI} = 2$. *Nhận thấy do AD là đường phân giác của tam giác ABC nên ta có*

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{CD}{7} = \frac{BD+CD}{5+7} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Do đó ta được $BD = 2,5$ *và* $CD = 3,5$.

Mà trong tam giác ABD có BI là đường phân giác nên $\frac{AI}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{5}{2,5} = 2$.

Như vậy ta giải được bài toán.

• **Lời giải.** Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường phân giác của tam giác ABC lần lượt hạ từ A, B, C. Gọi T là trung điểm của BC. Do AD là đường phân giác của tam giác ABC nên

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{CD}{7} = \frac{BD+CD}{5+7} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 2,5; CD = 3,5$$

Tam giác ABD có BI là đường phân giác nên $\frac{AI}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{5}{2,5} = 2$

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\frac{AG}{GT} = 2$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GT} = 2$. Suy ra theo định lý Talet thì IG//DT hay IG//BC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $\Delta BMI = \Delta BDI$ *và* $\Delta CNI = \Delta CDI$ *do đó* $\widehat{BMI} = \widehat{BDI}$ *và* $\widehat{CNI} = \widehat{CDI}$. *Từ đó ta có* $\widehat{AMI} + \widehat{ANI} = \widehat{BMI} + \widehat{CNI} = \widehat{BDI} + \widehat{CDI} = 180^0$ *hay tứ giác AMIN nội tiếp đường tròn.*

• **Lời giải.** Ta có $\Delta BMI = \Delta BDI$ vì $BD = BM = 2,5$; $\widehat{DBI} = \widehat{MBI}$ và BI là cạnh chung;

Suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{BDI}$. Chứng minh tương tự $\Delta CNI = \Delta CDI$. Suy ra $\widehat{CNI} = \widehat{CDI}$

Mà $\widehat{BDI} + \widehat{CDI} = 180^0$ nên $\widehat{BMI} + \widehat{CNI} = 180^0$ suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{ANI} = 180^0$

Nên tứ giác AMIN nội tiếp.

• ***Nhận xét.*** *Ta có thể chứng minh tứ giác AMIN nội tiếp theo hướng sau*

Gọi K là giao điểm của MN và AI. Theo công thức độ dài đường phân giác

$$AD = \sqrt{AB.AC - BD.CD} = \sqrt{5.7 - 2,5.3,5} = \frac{\sqrt{105}}{2}$$

Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN//BC, suy ra K cũng là trung điểm của AI.

Do MK là đường trung bình của tam giác ABD nên $MK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}.2,5 = \frac{5}{4}$

Và $NK = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.3,5 = \frac{7}{4}$. *Ta có* $DI = \frac{1}{2}AI \Rightarrow DI = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{105}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{6}$

Lại có $AI = 2.DI = 2.\frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{3}$ *và* $AK = KD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{105}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{4}$

Suy ra $KI = KD - ID = \frac{\sqrt{105}}{4} - \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{105}}{12}$

Ta có $AK.KI = \frac{\sqrt{105}}{4}.\frac{\sqrt{105}}{12} = \frac{105}{48} = \frac{35}{16}$ *và* $KM.KN = \frac{5}{4}.\frac{7}{4} = \frac{35}{16}$

Suy ra $AK.KI = KM.KN \Rightarrow \frac{AK}{KN} = \frac{MK}{KI}$

Suy ra $\Delta AKM \backsim \Delta NKI$ *suy ra* $\widehat{MAK} = \widehat{INK}$ *suy ra tứ giác AMIN nội tiếp.*

Câu 5 (3.0 điểm). Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp cũng là số nguyên.

- **Phân tích.** Dễ dàng chứng minh được $r = \frac{b+c-a}{2}$ do đó để chứng minh r là số nguyên ta cần chứng minh được $b+c-a$ là số chẵn. ta có các cách chứng minh sau

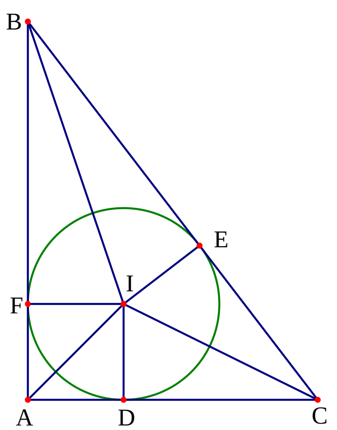
+ Cách 1. Gọi đường tròn (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với AC, CB, BA.

Theo tính chất đường tròn nội tiếp ta có $AD = AF = \frac{b+c-a}{2}$

Mà tứ giác ADIF là hình vuông nên

$$ID = AD = AF = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow r = \frac{b+c-a}{2}$$

Ta chỉ cần chứng minh $b+c-a$ chia hết cho 2. Thật vậy, theo định lý Pytago ta có



$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 - 2bc = a^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow (b+c-a)(b+c+a) = 2bc$$

Do $(b+c-a) + (b+c+a) = 2b + 2c$ nên $(b+c-a)$ và $(b+c+a)$ có cùng tính chẵn lẻ.

Mà $(b+c-a)(b+c+a) = 2bc$ là số chẵn nên $(b+c-a)$ và $(b+c+a)$ có cùng tính chẵn.

Suy ra $r = \frac{b+c-a}{2} \in Z$

+ Cách 2. Gọi độ dài ba cạnh tam giác ABC là $a; b; c \in \mathbb{Z}^+$ với $b < a; c < a$.

Dễ dàng chứng minh được $2r = b + c - a$. Theo định lý Pitago ta lại có $b^2 + c^2 = a^2$. Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu b và c cùng chẵn, khi đó từ $b^2 + c^2 = a^2$ ta suy ra được a chẵn nên $b + c - a$ là số chẵn. Từ đó dẫn đến r là số nguyên dương.

+ Trường hợp 2. Nếu b và c cùng lẻ, khi đó từ $b^2 + c^2 = a^2$ ta suy ra được a chẵn nên $b + c - a$ là số chẵn. Từ đó dẫn đến r là số nguyên dương.

+ Trường hợp 3. Nếu b và c khác tính chẵn lẻ, khi đó từ $b^2 + c^2 = a^2$ ta suy ra được a lẻ, điều này đãn đến $b + c - a$ là số chẵn. Từ đó ta được r là số nguyên.

Vậy bán kính đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán là một số nguyên.

Đề số 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH NGHỆ AN

Năm học 2016 – 2017

Câu 1. (4.0 điểm).

a) Tìm hệ số b, c của đa thức $P\left(x\right) = x^2 + bx + c$ biết $P\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 tại $x = 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2\left(x^2 + 1\right) - 3\sqrt{x}\left(y + 1\right) - y = 0 \end{cases}$

Câu 2. (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x + 2 = 3\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 + x}$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$$

Câu 3. (3.0 điểm).

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^0$, $BC = 5cm$ và đường cao $AH = 1cm$. Tìm độ dài các cạnh AB và AC.

Câu 4. (5.0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường trong (O), D là một điểm trên cung BC không chứa A. Dựng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB, gọi I là giao điểm của EK với AC.

a) Chứng minh rằng ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của EH.

Câu 5. (4.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1$.

b) Trên một bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các các số tiếp theo lên bảng thao quy tắc sau: Nếu có hai số phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z = xy + x + y$. Chứng minh rằng các số trên bảng(trừ số 1) có dạng $3k + 2$ với k là số tự nhiên.

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. a) Tìm hệ số b, c của đa thức $P\left(x\right) = x^2 + bx + c$ biết $P\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 tại $x = 2$.

• **Lời giải.** Do đa thức $P\left(x\right) = x^2 + bx + c$ có bậc hai và có giá trị nhỏ nhất là -1 tai $x = 2$ nên viết được dưới dạng $P\left(x\right) = \left(x - 2\right)^2 - 1$. Từ đó ta có $P\left(x\right) = x^2 + bx + c = \left(x - 2\right)^2 - 1$

Hay ta được $x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3$. Đồng nhất hệ số hai vế ta được $b = -4; c = 3$.

Nhận xét. *Điểm quan trọng của câu này chính là phát hiện ra được* $P(x) = (x-2)^2 - 1$, *đến đây thì chỉ cần sử dụng đồng nhất thức là giải quyết được bài toán.*

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2(x^2+1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0 \end{cases}$

- **Phân tích.** *Quan sát hệ phương trình ta thấy phương trình thứ hai của hệ có chứa căn thức, do đó ta nhận định phương trình thứ nhất có thể phân tích đươc thành tích(điều này là nhận định cảm tính vì thường trong một hệ có một phương trình phức tạp thì ta sẽ kiểm tra xem phương trình còn lại có gì đặc biệt không)*

Nhận thấy $x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \Leftrightarrow x(x+y^2) - y(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y^2) = 0$.

Để ý ta lại thấy từ điều kiện xác định $x \ge 0$ *và* $x + y^2 = 0$ *ta suy ra được* $x = y = 0$.

Đến đây ta xét từng trường hợp rồi thế vào phương trình còn lại để giải hệ

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x(x+y^2) - y(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y^2 = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $x + y^2 = 0$, kết hợp với điều kiện xác định $x \ge 0$ ta được $x = y = 0$.

Thay vào phương trình còn lại ta thấy không thỏa mãn.

+ Với $x = y$, thay vào phương trình còn lại ta được

$$2(x^2+1) - 3\sqrt{x}(x+1) - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x} \ge 0$, khi đó ta được phương trình $2t^4 - 3t^3 - t^2 - 3t + 2 = 0$.

Nhẩm được $t = 2; t = \frac{1}{2}$ nên ta phân tích được

$$2t^3(t-2) + t^2(t-2) + (t-1)(t-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-2)(2t^3 + t^2 + t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-1)(t^2+t+1) = 0$$

Với $t = 2$ ta được $x = y = 4$ và với $t = \frac{1}{2}$ ta được $x = y = \frac{1}{4}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y) = (4;4), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 2. a) Giải phương trình $x + 2 = 3\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x}$

- **Phân tích và lời giải.** Quan sát phương trình ta chú ý đến biến đổi $1 - x^2 = (1-x)(x+1)$. Để ý đến điều kiện xác định ta phân tích được $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}.\sqrt{x+1}$.

Như vậy ta viết lại được phương trình đã cho thành $x + 2 = 3\sqrt{1-x}.\sqrt{x+1} + \sqrt{1+x}$.

Để ý rằng ta có biểu diễn $x + 3 = 2(x+1) + (1-x)$. Đến đây đặt ẩn phụ $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{1-x}$ thì ta viết phương trình lại thành $2a^2 + b^2 - 1 = 3ab + a$ hay $b^2 - 3ab + 2a^2 - a - 1 = 0$

Xem phương trình trên là phương trình ẩn b và a là tham số thì ta có

$$\Delta = 9a^2 - 4\left(2a^2 - a - 1\right) = \left(a+2\right)^2 \ge 0$$

Do đó phương trình có hai nghiệm là $b = \dfrac{3a - \left(a+2\right)}{2} = a - 1$ và $b = \dfrac{3a + \left(a+2\right)}{2} = 2a + 1$.

- Với $b = a - 1$ ta được $\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} - 1$ hay ta được

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 = 4 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Với $b = 2a + 1$ ta được $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} + 1$ hay ta được

$$4\sqrt{1+x} = -5x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4 \le 0 \\ 25x^2 + 24x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{24}{25}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{24}{25}\right\}$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

- **Lời giải.** Từ giả thiết $ab + bc + ca = 1$ ta để ý đến phép biến đổi

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ac = \left(a+b\right)\left(a+c\right)$$

Áp dụng tương tự bất đẳng thức trở thành

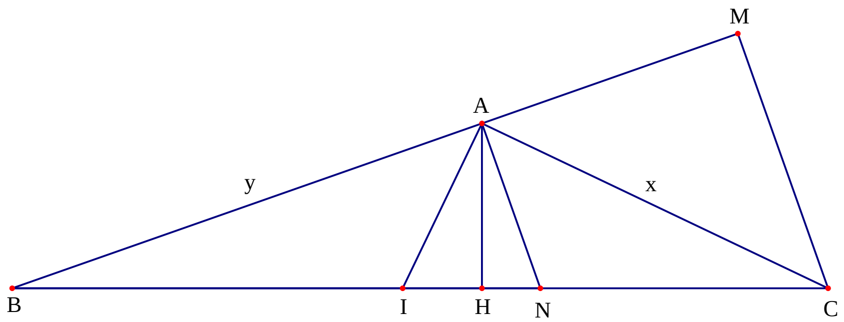
$$P = \frac{2a}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}} + \frac{b}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}} + \frac{c}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} &\frac{2a}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}} + \frac{b}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}} + \frac{c}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}} \\ &\le a\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) + b\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{4\left(b+c\right)}\right) + c\left(\frac{1}{4\left(b+c\right)} + \frac{1}{a+c}\right) \\ &= \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{4\left(b+c\right)} + \frac{a+c}{a+c} = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(a;b;c\right) = \left(\dfrac{7}{\sqrt{15}}; \dfrac{1}{\sqrt{15}}; \dfrac{1}{\sqrt{15}}\right)$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^0$, $BC = 5cm$ và đường cao $AH = 1cm$. Tìm độ dài các cạnh AB và AC.



• **Lời giải.** Gọi $AB = y; AC = x$. Dựng CM vuông góc với AB, khi đó ta được $AM = CM = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{5}{2}$. Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}CM.AB = \frac{1}{2}y.\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

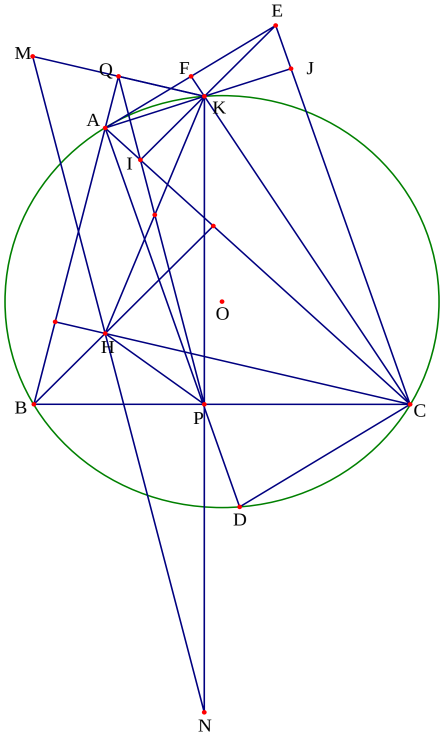
Do đó ta được $S_{ABC} = \frac{1}{2}CM.AB = \frac{1}{2}y.\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow xy\sqrt{2} = 10$. Tam giác BCM vuông tại M nên ta lại có $BM^2 + MC^2 = BC^2$. Suy ra $\left(y + \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} + xy\sqrt{2} + \frac{x^2}{2} = 25$.

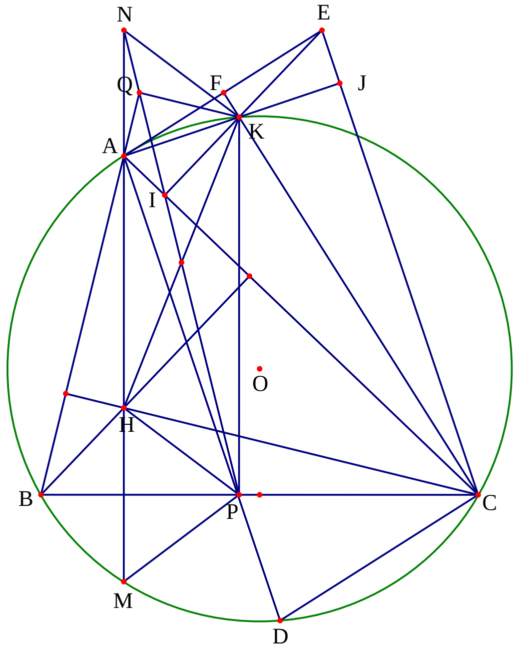
Từ đó ta được $x^2 + y^2 = 15$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15 \\ xy\sqrt{2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 15 \\ xy = 5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Do vai trò của AB và AC như nhau nên ta có kết quả $AB = \sqrt{10}; AC = \sqrt{5}$ và $AB = \sqrt{5}; AC = \sqrt{10}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường trong (O), D là một điểm trên cung BC không chứa A. Dựng hình bình hành ADCE. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và ACE. Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên BC và AB, gọi I là giao điểm của EK với AC.





a) Chứng minh ba điểm I, P, Q thẳng hàng.

• ***Phân tích.*** *Từ giả thiết và quan sát hình vẽ ta thấy được EK vuông góc với AC. Như vậy Q, I, P trở thành ba hình chiếu của K trên ba cạnh của tam giác ABC. Điều này làm ta liên tưởng đến đường thẳng Simson. Để khẳng định được điều này ta chỉ cần chứng minh được K thuộc đường tròn (O) hay ta chứng minh tứ giác ADCK nội tiếp. Để ý rằng* $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$ *và* $\widehat{AKC} + \widehat{AEC} = 180^0$ *ta suy ra được tứ giác ADCK nội tiếp.*

• **Lời giải.**

Do K là trực tâm của tam giác ACE nên ta có KJEF nội tiếp. Từ đó suy ra $\widehat{AKC} + \widehat{AEC} = 180^0$.

Mặt khác do tứ giác ADCE là hình bình hành nên lại có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$.

Từ đó suy ra $\widehat{AKC} + \widehat{ADC} = 180^0$ nên tứ giác ADCK nội tiếp hay điểm K nằm trên đường tròn.

Do K là trực tâm tam giác ACE nên ta có KI vuông góc với AC.

Các tứ giác KIPC, KIAQ nội tiếp suy ra $\widehat{CIP} = \widehat{CKP}$ và $\widehat{AIQ} = \widehat{AKQ}$

Từ các tứ giác nội tiếp ABCK, BPKQ ta có $\widehat{AKC} = 180^0 - \widehat{ABC} = \widehat{QKP}$ suy ra $\widehat{CKP} = \widehat{AKQ}$

Từ đó ta được $\widehat{CIP} = \widehat{AIQ} \Rightarrow P, I, Q$ thẳng hàng.

b) Chứng minh PQ đi qua trung điểm của KH

• ***Phân tích***

+ Ý tưởng thứ nhất để chứng minh PQ đi qua trung điểm của KH đó là sử dụng kết của định lí Steiner. Ta biết rằng khi M, N lần lượt là điểm đối xứng của K qua AB và BC thì theo bài toán Steiner thì ba điểm M, N, H thẳng hàng. Như vậy thì PQ đóng vai trò đường trung bình của tam giác KMN và đương nhiên khi đó ta suy ra được QP đi qua trung điểm của KH.

+ Ý tưởng thứ hai là tạo ra một hình bình hành có HK là đường chéo và đường chéo còn lại nằm trên đường thẳng PQ. Để làm được điều này ta cần tìm ra một điểm N sao cho tứ giác HPKN là hình bình hành. Từ các nhận định trên ta chọn N là giao điểm của AH và PQ. Ta cần chứng minh được tứ giác HPKN là hình bình

hành. Để ý tiếp ta thấy nếu gọi M là giao điểm của AH với đường tròn (O), khi đó dễ thấy tam giác HPM cân. Như vậy ta đi chứng minh được tứ giác KPMN là hình thang cân nữa được

• **Lời giải: Cách 1.** Sửng dụng kết quả đường thẳng Steiner.

Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của K qua AB và BC. Ta cần chứng minh ba điểm P, N, H thẳng hàng và đường thẳng qua ba điểm này gọi là đường thẳng Steiner (có nhiều cách chứng minh bài toán đường thẳng Steiner). Khi đó PQ là đường trung bình của tam giác KMN. Đến đây thì ta có thể suy ra điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi N là giao điểm của PQ và AH, gọi M là giao điểm của AH với đường tròn (O). Khi đó dễ thấy tam giác PHK cân. Do AH//KP nên tứ giác KPMN là hình thang.

Lại có BPKQ nội tiếp nên suy ra được $\widehat{QBK} = \widehat{ABK} = \widehat{AMK} = \widehat{QPK}$ nên tứ giác KPMN nội tiếp. Do đó KPMN là hình thang cân. Do đó $\widehat{PMH} = \widehat{PHM} = \widehat{KNM}$ nên KN//HP.

Do vậy tứ giác HPKN là hình bình hành. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 5. a) Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{mnpq}=1$.

• **Lời giải.** Do m, n, p, q là các số nguyên tố khác nhau nên không mất tình tổng quát ta giả sử $n > m > p > q$, khi đó ta được $q \ge 2; p \ge 3; n \ge 5; m \ge 7$.

Dễ thấy $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2.3.5.7}=\frac{3.5.7+2.3.7+2.5.7+2.3.5+1}{2.3.5.7}=\frac{248}{210}>1$.

Lại thấy $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3.5.7.11}=\frac{3.5.7+11.3.7+11.5.7+11.3.5+1}{3.5.7.11}=\frac{887}{1155}<1$.

Từ đó suy ra trong các số m, n, p, q có một số là 2. Do q nhỏ nhất nên ta được $q=2$.

Từ đó ta lại được $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2mnp}=\frac{1}{2}$.

Dễ thấy với $p=5; n=7; m=11$ ta có $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{2.5.7.11}<\frac{1}{2}$. Như vậy trong ba số nguyên tố m, n, p phải có một số bằng 3, do đó suy ra $p=3$.

Từ đó lại có $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{6mn}=\frac{1}{6}$ hay ta được $mn-6m-6n=1 \Leftrightarrow (m-6)(n-6)=37$.

Đến đây ta được $n=7; m=43$. Thử lại ta thấy bội số $(m;n;p;q)=(2;3;7;43)$ thỏa mãn bài toán.

Vậy các bộ số cần tìm là $(2;3;7;43)$ và các hoán vị.

b) Trên một bảng có ghi hai số 1 và 5. Ta ghi các các số tiếp theo lên bảng thao quy tắc sau: Nếu có hai số phân biệt trên bảng thì ghi thêm số $z = xy + x + y$. Chứng minh rằng các số trên bảng(trừ số 1) có dạng $3k+2$ với k là số tự nhiên.

• **Lời giải.** Từ hai số trên bảng ta thấy có một số chia 3 dư 2. Do đó trong hai số x và y khác nhau thì có $x+1$ hoặc $y+1$ chia hết cho 3, suy ra $(x+1)(y+1)$ chia hết cho 3.

Khi ta viết thêm số mới là $z = xy + x + y = (x+1)(y+1)-1$ thì ta được z chia 3 dư 2.

Như vậy dãy số viết trên bảng trừ số 1 luôn chia 3 dư 2 hay các số đó có dạng $3k+2$.

Đề số 5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH HƯNG YÊN

Năm học: 2016 – 2017

Câu 1 (2.0 điểm). Cho $a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}; b = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Cho hàm số $y = ax + b\left(a \neq 0\right)$ có đồ thị $\left(d\right)$. Lập phương trình đường thẳng $\left(d\right)$, biết $\left(d\right)$ đi qua điểm $A\left(1;2\right)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB + OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$.

Câu 3 (3.0 điểm). Giải phương trình $4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x+1} - 3x$.

Câu 4 (3.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4\left(5x^2 - 17x + 6\right) = 6 - 15x \end{cases}$

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho điểm M thuộc nửa đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AB $\left(M \neq A, M \neq B, MA < MB\right)$. Tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM thứ tự tại D, H

a) Chứng minh rằng $CA = CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của đường tròn $\left(O\right)$, F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh rằng E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi S_1, S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1.S_2}$

Câu 5 (2.0 điểm). Cho ba số $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $32abc = 18\left(a+b+c\right) + 27$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \dfrac{\sqrt{c^2-1}}{c}$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho $a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}; b = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

- ***Phân tích.*** *Đầu tiên khi nhìn vào bài toán ta sẽ nghĩ ngay tới việc thay thẳng a, b và sử dụng hằng đẳng thức nhưng có vẻ phải tính khá nhiều lần nên ta đổi cách khác. Với các loại tính giá trị biểu thức kiểu* $a^n + b^n$ *ta thường đưa về dạng các phép toán của* $a + b$ *và ab. Dễ thấy*

$$a + b = \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \sqrt{2}; ab = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{1}{4}$$

Đều là những kết quả đẹp nên ý tưởng này hoàn toàn có cơ sở. Đến đây ta có biểu diễn a^7+b^7 *theo cách sau.*

$$\begin{aligned} a^7+b^7 &= \left(a^4+b^4\right)\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3\left(a+b\right) \\ &= \left\{\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2\right\}\left[\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\right]-a^3b^3\left(a+b\right) \end{aligned}$$

Đến đây chỉ cần thay số vào là tính được a^7+b^7

- **Lời giải.** Từ giả thiết ta có $a+b=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\sqrt{2}; ab=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$. Lại có

$$\begin{aligned} a^7+b^7 &= \left(a^4+b^4\right)\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3\left(a+b\right) \\ &= \left\{\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2\right\}\left[\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\right]-a^3b^3\left(a+b\right) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$a^7+b^7=\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right]\left[2\sqrt{2}-\frac{3}{4}.\sqrt{2}\right]-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{17}{8}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{170\sqrt{2}}{64}-\frac{\sqrt{2}}{64}=\frac{169\sqrt{2}}{64}$$

Vậy $a^7+b^7=\frac{169\sqrt{2}}{64}$.

Câu 2. a) Cho hàm số $y=ax+b\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(d\right)$. Lập phương trình đường thẳng $\left(d\right)$, biết $\left(d\right)$ đi qua điểm $A\left(1;2\right)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB+OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

- ***Phân tích.*** *Để lập được phương trình đường thẳng* $\left(d\right)$ *ta cần tính được giá trị a, b của hàm số* $y=ax+b$

+ Do $\left(d\right)$ *đi qua điểm* $A\left(1;2\right)$ *nên thay giá trị x, y vào ta được* $a+b=2$

+ Do $\left(d\right)$ *cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương khi đó* $y=0$ *nên* $OB=\frac{-b}{a}>0$

+ Do $\left(d\right)$ *cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương khi đó* $x=0$ *nên* $OC=b>0$

Vì $b>0$ *và* $\frac{-b}{a}>0$ *nên* $a<0$.

Vì đề ra cho $OB+OC$ *nhỏ nhất nên ta nghĩ đến việc sử dụng giá trị nhỏ nhất và vị trí dấu bằng xảy ra để tính giá trị a, b. Thay OB và OC vào ta được* $OB+OC=-\frac{b}{a}+b$.

Đến đây ta kết hợp việc sử dụng $a+b=2$ *và chú ý vì* $OB+OC$ *nhỏ nhất nên cần đánh giá lớn hơn hay chuyển bài toán thành bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức với biến a hoặc b.*

Để $OB+OC$ *nhỏ nhất tức là* $-\frac{b}{a}+b=-\frac{2-a}{a}+2-a=\frac{3a-a^2-2}{a}=3-\frac{2}{a}-a$ *nhỏ nhất.*

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $-a+\frac{2}{-a}\geq 2\sqrt{-a.\frac{2}{-a}}=2\sqrt{2}$ *nên* $3-\frac{2}{a}-a\geq 3+2\sqrt{2}$.

Suy ra $OB + OC \geq 3 + 2\sqrt{2}$. *Vì dấu bằng xảy ra nên* $a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ *(vì a âm)*

Từ đó ta được $a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = 2 + \sqrt{2}$*, đến đây coi như ta giải được bài toán*

- **Lời giải.**

+ Do (d) đi qua điểm $A(1;2)$ nên thay giá trị x, y vào ta được $a + b = 2$

+ Do (d) cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương khi đó $y = 0$ nên $OB = \frac{-b}{a} > 0$

+ Do (d) cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương khi đó $x = 0$ nên $OC = b > 0$

Vì $b > 0$ và $\frac{-b}{a} > 0$ nên $a < 0$.

Ta có $OB + OC = -\frac{b}{a} + b = -\frac{2-a}{a} + 2 - a = \frac{3a - a^2 - 2}{a} = 3 + \left(-a + \frac{2}{-a}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $-a + \frac{2}{-a} \geq 2\sqrt{-a.\frac{2}{-a}} = 2\sqrt{2}$ nên $3 - \frac{2}{a} - a \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Suy ra $OB + OC \geq 3 + 2\sqrt{2}$. Theo bài ra thì dấu bằng xảy ra nên $a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2}$ (vì a âm). Từ đó ta được $a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = 2 + \sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = -\sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$.

- ***Phân tích.*** *Quan sát ta thấy vế phải là một căn vế trái là một căn và vế phải là một số nguyên nên để phương trình có nghiệm nguyên thì* $9x^2 + 16x + 32$ *phải là một số chính phương.*

Đặt $9x^2 + 16x + 32 = t^2\ (t \in \mathbb{N})$. *Ở dạng phương trình nghiệm nguyên này ta thường chuyển thành hiệu hai bình phương là một số nguyên rồi xét các trường hợp tuy nhiên chưa thể chuyển phương trình vừa đặt thành hiệu hai bình phương ngay được nên ta nghĩ đến việc nhân thêm hai vế một số chính phương. Để ý thấy* $16x$ *không chứa thừa số 3 của* $9x^2$ *nên ta cần nhân thêm vào 2 vế là 9 để có thể viết được thành bình phương*

$$81x^2 + 144x + 288 = 9t^2 \Leftrightarrow 81x^2 + 2.9.8 + 64 + 224 = 9t^2$$
$$\Leftrightarrow (9x + 8 - 3t)(9x + 8 + 3t) = -224 = -2^4.14 = -2^3.28 = -2^2.56 = -2.112$$
$$= 2^4.(-14) = 2^3.(-28) = 2^2.(-56) = 2.(-112)$$

Ta có $x \in Z; t \in N$ *nên* $9x + 8 + 3t > 9x + 8 - 3t$ $9x + 8 - 3t$; $9x + 8 + 3t$ *cùng tính chẵn lẻ. Ở đây vì cảm thấy có quá nhiều trường hợp nên suy nghĩ nảy sinh là giới hạn trường hợp lại bằng quan hệ chia hết chú ý* $9x + 8 + 3t$ *và* $9x + 8 - 3t$ *đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.*

$$\begin{cases} 9x + 8 + 3t = 14 \\ 9x + 8 - 3t = -16 \end{cases}; \begin{cases} 9x + 8 + 3t = 56 \\ 9x + 8 - 3t = -4 \end{cases}; \begin{cases} 9x + 8 + 3t = 8 \\ 9x + 8 - 3t = -28 \end{cases}; \begin{cases} 9x + 8 + 3t = 2 \\ 9x + 8 - 3t = -112 \end{cases}$$

Đến đây giải các hệ phương trình này coi như ta giải được phương trình ban đầu

- **Lời giải.** Để phương trình có nghiệm thì $9x^2 + 16x + 32$ phải là một số chính phương.

Khi đó $9x^2 + 16x + 32 = t^2\ (t \in \mathbb{N})$. Phương trình trên tương đương với

$$81x^2+144x+288=9t^2 \Leftrightarrow 81x^2+2.9.8+64+224=9t^2$$

$$\Leftrightarrow (9x+8-3t)(9x+8+3t)=-224=-2^4.14=-2^3.28=-2^2.56=-2.112$$
$$=2^4.(-14)=2^3.(-28)=2^2.(-56)=2.(-112)$$

Ta có $x\in Z; t\in N$ nên $9x+8+3t>9x+8-3t$ $9x+8-3t; 9x+8+3t$ cùng tính chẵn lẻ. Lại thấy $9x+8+3t$ và $9x+8-3t$ đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.

$$\begin{cases}9x+8+3t=14\\9x+8-3t=-16\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=56\\9x+8-3t=-4\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=8\\9x+8-3t=-28\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=2\\9x+8-3t=-112\end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $x\in\{-7;-2;-1;2\}$

+ Với $x=-1\Rightarrow -27-16y=5\Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn).

+ Với $x=-2\Rightarrow -30-16y=6\Rightarrow y=-\frac{9}{4}$ (loại).

+ Với $x=2\Rightarrow -18-16y=10\Rightarrow y=\frac{7}{4}$ (loại)

+ Với $x=-7\Rightarrow -45-16y=19\Rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(-1;-2),(-7;-4)$.

Câu 3. Giải phương trình $4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$

- ***Phân tích.*** *Điều kiện xác định của phương trình là* $x\ge\frac{-1}{3}$. *Phương trình có vế trái là bậc 3 còn vế phải là bậc 1 và một căn thức vì thế không thể nào để căn ở một vế để bình phương được. Cũng không thể phân tích thành tích với các hệ số như thế. Ta thử nhẩm các giá trị đặc biệt được một nghiệm là 0 và đây là cơ sở để nhân lượng liên hợp.*

Với $x=0$ *thì* $\sqrt{3x+1}=1$ *nên ta nhân lượng liên hợp như sau*

$$4x^3+5x^2+3x+1-\sqrt{3x+1}=0\Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3\right)-\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0\end{array}\right.$$

Đến đây chỉ cần chứng minh được $4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}\ne 0$ *là xong, tuy nhiên không thể chứng minh được phương trình trên khác không nên ta giải luôn phương trình trên vì bây giờ quay lại phương trình ban đầu thì hầu như không còn hướng mà đi nữa. Nhận thấy* $4x^2+5x+1=(4x+1)(x+1)$ *và ta cố gắng thử biểu diễn những cái còn lại qua* $4x+1$ *hoặc* $x+1$ *để làm nhân tử chung. Khi đó ta phát hiện được cách đưa* $4x+1$ *làm nhân tử chung như sau*

$$4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0 \Leftrightarrow \left(4x^2+5x+3\right)\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(x+1\right)\left(4x+1\right)+2\right]\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+4x^2+x+4x+1+2\sqrt{3x+1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+x\left(4x+1\right)+4x+1+\frac{12x+3}{2\sqrt{3x+1}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4x+1\right)\left[\left(x+1\right)\sqrt{3x+1}+x+1+\frac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}\right]=0$$

Khi đó chỉ cần chứng minh $\left(x+1\right)\sqrt{3x+1}+x+1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}>0$ *là xong.*

- **Lời giải.** Phương trình tương đương với

$$4x^3+5x^2+3x+1-\sqrt{3x+1}=0 \Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3\right)-\frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^2+5x+3-\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0 \end{array}\right.$$

Khi đó $x=0$ là một nghiệm của phương trình.

Với $4x^2+5x+3-\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0$, khi đó đó ta có

$$4x^2+5x+3-\frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=0 \Leftrightarrow \left(4x^2+5x+3\right)\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(x+1\right)\left(4x+1\right)+2\right]\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{3x+1}+4x^2+5x=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+4x^2+x+4x+1+2\sqrt{3x+1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x+1\right)\sqrt{3x+1}+x\left(4x+1\right)+4x+1+\frac{12x+3}{2\sqrt{3x+1}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4x+1\right)\left[\left(x+1\right)\sqrt{3x+1}+x+1+\frac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}\right]=0$$

Vì $x\ge\dfrac{-1}{3}$ nên $x+1$ luôn lớn hơn không nên $\left(x+1\right)\sqrt{3x+1}+x+1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}+1}>0$

Suy ra từ phương trình trên ta được $x=\dfrac{-1}{4}$ là một nghiệm nữa của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{-1}{4}$ và $x=0$.

Câu 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{6x-3} \\ 2y^4\left(5x^2-17x+6\right)=6-15x \end{cases}$

• **Phân tích.** *Điều kiện xác định của hệ phương trình là* $x \ge \frac{1}{2}$. *Phương trình thứ hai của hệ là phương trình đa thức nên ta để ý phân tích phương trình thứ hai trước. Phương trình thứ hai tương đương với*

$$2y^4(5x-2)(x-3) = 3(2-5x) \Leftrightarrow (5x-2)\left[2y^4(x-3)+3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5} \\ 2y^4(x-3)+3 = 0 \end{array}\right.$$

Với $2y^4(x-3)+3=0$ *ta được* $y^4 = \frac{3}{6-2x} \Rightarrow y^2 = \sqrt{\frac{3}{6-2x}}$, *khi đó thế vào phương trình thứ nhất ta được* $\sqrt{\frac{3}{6-2x}}.\sqrt{2x-1}+\sqrt{3} = 5\sqrt{\frac{3}{6-2x}} - \sqrt{6x-3}$ *hay ta được*

$$\sqrt{6x-3}+\sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$

Với hệ phương trình trên ta nhận thấy có các hướng xử lý như sau

+ *Hướng 1. Đặt ẩn phụ* $a = \sqrt{6x-3}; b = \sqrt{3(6-2x)}$.

Khi đó ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2 = 15 \\ a+b = 5\sqrt{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Đây là phương trình đối xứng nên ta có thể giải được hệ trên.

+ *Hướng 2. Nhận thấy phương trình có một nghiệm* $x=1$ *nên ta sử dụng đại lượng liên hợp*

$$\begin{aligned} &\sqrt{6x-3}+\sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)} \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{6x-3}-\sqrt{3}+\sqrt{3(6-2x)}-2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{-12x^2+42x-18} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{6x-6}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} + \frac{6-6x}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} = \frac{12x^2-42x+30}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}} \\ \Leftrightarrow\ &(6x-6)\left[\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}\right] = 0 \end{aligned}$$

Ta cần xử lý phương trình $\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}} = 0$.

Phương trình trên được viết lại thành

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{6-2x}+2}-\frac{2x-5}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}+2-\sqrt{2x-1}-1}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}-1+2-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{5-2x}{\sqrt{6-2x}+1}+\dfrac{5-2x}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(5-2x\right)\left[\frac{\dfrac{1}{\sqrt{6-2x}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}+\frac{1}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}\right]=0$$

Đến đây ta giải hệ phương trình.

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \ge \frac{1}{2}$. Phương trình thứ hai tương đương với

$$2y^4\left(5x-2\right)\left(x-3\right)=3\left(2-5x\right)\Leftrightarrow\left(5x-2\right)\left[2y^4\left(x-3\right)+3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5}\\2y^4\left(x-3\right)+3=0\end{array}\right.$$

Với $2y^4\left(x-3\right)+3=0$ ta được $y^4=\dfrac{3}{6-2x}\Rightarrow y^2=\sqrt{\dfrac{3}{6-2x}}$, khi đó thế vào phương trình thứ nhất ta được $\sqrt{\dfrac{3}{6-2x}}.\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}=5\sqrt{\dfrac{3}{6-2x}}-\sqrt{6x-3}$ hay

$$\sqrt{6x-3}+\sqrt{3\left(6-2x\right)}=5\sqrt{3}-\sqrt{\left(6x-3\right)\left(6-2x\right)}$$

Với phương trình trên ta nhận thấy có các hướng xử lý như sau

+ Hướng 1. Đặt ẩn phụ $a=\sqrt{6x-3}\ge 0; b=\sqrt{3\left(6-2x\right)}\ge 0$. Khi đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=15\\a+b=5\sqrt{3}-\dfrac{ab}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=15\\\sqrt{3}\left(a+b\right)+ab=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(a+b\right)^2=45+6ab\\\sqrt{3}\left(a+b\right)=15-ab\end{cases}$$

Từ hệ trên ta được $45+6ab=\left(15-ab\right)^2\Leftrightarrow\left(ab\right)^2-36ab+180=0$.

Chú ý là $ab\ge 0$ nên từ phương trình trên ta được $ab=6$ và $ab=30$.

Với $ab=30$ ta được $a+b=-5\sqrt{3}$, loại

Với $ab=6$ ta được $a+b=3\sqrt{3}$ suy ra $a=2\sqrt{3}; b=\sqrt{3}$ hoặc $a=\sqrt{3}; b=2\sqrt{3}$.

Từ $a=2\sqrt{3}; b=\sqrt{3}$ ta được $\begin{cases}\sqrt{6x-3}=2\sqrt{3}\\\sqrt{3\left(6-2x\right)}=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Từ $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$ ta được $\begin{cases} \sqrt{6x-3} = \sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Đây là hệ phương trình đối xứng nên ta có thể giải được hệ trên.

+ Hướng 2. Nhận thấy phương trình có một nghiệm $x = 1$ nên ta sử dụng đại lượng liên hợp

$$\sqrt{6x-3} + \sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6x-3} - \sqrt{3} + \sqrt{3(6-2x)} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{-12x^2+42x-18}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x-6}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} + \frac{6-6x}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} = \frac{12x^2-42x+30}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}$$
$$\Leftrightarrow (6x-6)\left[\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}}\right] = 0$$

Xét phương trình $\frac{1}{\sqrt{6x-3}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)}+2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3}+\sqrt{-12x^2+42x-18}} = 0$.

Phương trình trên được viết lại thành.

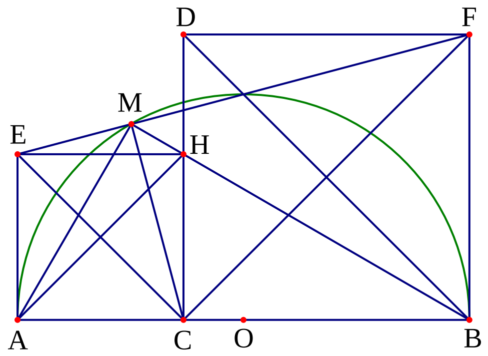
$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{6-2x}+2} - \frac{2x-5}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}+2-\sqrt{2x-1}-1}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} + \frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2x}-1+2-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} + \frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{5-2x}{\sqrt{6-2x}+1} + \frac{5-2x}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} + \frac{5-2x}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (5-2x)\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{6-2x}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2x-1}}}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} + \frac{1}{2+\sqrt{-4x^2+14x-6}}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Từ các kết quả trên ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$(x;y) = \left(1;\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right), \left(1;-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right), \left(\frac{5}{2};\sqrt[4]{3}\right), \left(\frac{5}{2};-\sqrt[4]{3}\right)$$

Câu 5. Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB $(M \neq A, M \neq B, MA < MB)$. Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM thứ tự ở D, H.

a) Chứng minh $CA = CH$



• ***Phân tích.*** *Bài toán cho MC là phân giác của góc AMB nên ta có tỷ số* $\frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MB}$. *Bây giờ ta cần chứng minh được* $\frac{HC}{BC} = \frac{MA}{MB}$. *Đây chính là tỷ số đồng dạng của hai tam giác HCB và AMB. Đến đây thì bài toán được chứng minh.*

• **Lời giải.** Ta có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BCH}$ đồng thời có góc MBA chung nên $\Delta AMB \backsim \Delta BCH \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{MA}{MB}$

Cũng có MC là phân giác của góc AMB nên $\frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MB}$

Kết hợp hai kết quả trên ta có $\frac{HC}{BC} = \frac{AC}{BC}$ suy ra $CA = CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Chứng minh E, M, F thẳng hàng

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh 3 điểm E, M, F thẳng hàng ta có các hướng sau:*

+ *Chứng minh* $\widehat{EMA} = \widehat{DMF}$.

+ *Chứng minh* $\widehat{EMC} + \widehat{FMC} = 180^0$.

Theo ý a ta có $HC = AC$ *và dựa các giả thiết mới của ý b ta có thể thấy được tứ giác EHAC và CDFB là các hình vuông. Khi đó ta vẽ thêm các đường chéo để khai thác giả thiết. Để ý* $\widehat{AMB} = \widehat{AMH} = 90^0$ *nên* $MI = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}EC \Rightarrow \widehat{EMC} = 90^0$. *Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được* $\widehat{FMC} = 90^0$ *nên suy ra* $\widehat{EMC} + \widehat{FMC} = 180^0$, *do đó suy ra ba điểm M, E, F thẳng hàng.*

• **Lời giải.** Tứ giác EHCA có ba góc vuông nên là hình chữ nhật lại có hai cạnh kề nhau $HC = AC$ nên tứ giác EHCA là hình vuông.

Khi đó vì $\widehat{AMB} = \widehat{AMH} = 90^0$ nên $MI = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}EC \Rightarrow \widehat{EMC} = 90^0$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{FMC} = 90^0$ nên $\widehat{EMC} + \widehat{FMC} = 180^0$ suy ra ba điểm M, E, F thẳng hàng

c) Gọi S_1, S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1.S_2}$

• ***Phân tích.*** *Trước tiên ta phải tính được diện tích của các tứ giác ACHE và BCDF. Có hai cách là tính theo cạnh của hình vuông và tính theo độ dài đường chéo. Do các cạnh của hai hình vuông thay đổi nên việc tìm liên hệ giữa hai cạnh của hai hình vuông với CM khá là khó khăn. Vì thế ta chuyển sang tính theo đường chéo. Dễ thấy hai đường chéo của hình vuông là hai cạnh của tam giác vuông ECF có CM đóng vai trò là đường cao.*

Ta có $S_1 = \frac{CE^2}{2}; S_2 = \frac{CF^2}{2} \Rightarrow \sqrt{S_1.S_2} = \frac{CE.CF}{2}$

Hệ thức lượng liên hệ giữa cạnh góc vuông và đường cao trong tam giác vuông là $\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{EC^2} + \frac{1}{CF^2}$ *Bây giờ thấy ở trên là* CM^2 *nên ta quy đồng rồi nghịch đảo được.* $CM^2 = \frac{CE^2.CF^2}{CE^2 + CF^2}$. *Quy về chứng minh* $\frac{CE^2.CF^2}{CE^2 + CF^2} < \frac{2}{CE + CF}$, *điều này hoàn toàn có thể đánh giá được theo bất đẳng thức Cauchy. Dấu bằng không xảy ra vì* $AM < BM$

- **Lời giải.**

Ta có $S_1 = \frac{CE^2}{2}; S_2 = \frac{CF^2}{2} \Rightarrow \sqrt{S_1.S_2} = \frac{CE.CF}{2}$

Vì E, M, F thẳng hàng nên CM là đường cao của tam giác vuông CEF.

Khi đó áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{EC^2} + \frac{1}{CF^2} \Rightarrow CM^2 = \frac{CE^2.CF^2}{CE^2 + CF^2}$

Áp dụng bất đẳng thức cosy ta có: $\frac{CE^2.CF^2}{CE^2 + CF^2} \le \frac{CE.CF}{2} = \sqrt{S_1.S_2}$

Suy ra $CM^2 \le \sqrt{S_1.S_2}$, vì $AM < BM$ nên dấu bằng không xảy ra khi đó ta có điều phải chứng minh.

- ***Nhận xét.*** *Nhìn thấy trên hình vẽ có một giao điểm của đường tròn với cạnh EF và BD gọi giao điểm đó là N. Đó chính là chân đường vuông góc hạ từ E xuống BD. Khi đó ta có thể nghĩ thêm một vài cách phát biểu nữa như*

+ Chứng minh tứ giác AMNB nội tiếp đường tròn.

+ Chứng minh ba đường HA, BD, EF đồng quy.

+ Chứng minh M, N, E, F thẳng hàng.

Để ý nữa ta thấy N chính là trung điểm của EF hay N là điểm chính giữa của cung tròn khi đó ON là đường trung bình của hình thang vuông EAFB. Suy ra $ON = \frac{1}{2}\left(AE + FB\right) = \frac{1}{2}AB$.

Câu 5. Cho 3 số $a, b, c \ge 1$ thỏa mãn $32abc = 18\left(a + b + c\right) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} + \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}$$

- ***Phân tích.*** *Vì vai trò của a, b, c là như nhau kết hợp giả thiết dấu bằng xẩy ra tại* $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Biến đổi giả thiết ta có $32abc = 18\left(a + b + c\right) + 27 \Leftrightarrow \frac{9}{16}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{27}{32}.\frac{1}{abc} = 1$

Để đơn giản hóa giả thiết ta đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z$.

Khi đó giả thiết trở thành $\frac{9}{16}\left(xy + yz + zx\right) + \frac{27}{32}xyz = 1$ *và* $P = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - z^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản ta có:

$$P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}\le\sqrt{3\left[3-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}$$

Đến đây ta cần đánh giá $x^2+y^2+z^2$ *theo hướng giảm dần. Ta có hai đánh giá hết sức quen thuộc đó là*

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ *và* $x^2+y^2+z^2\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}$*, tuy nhiên khi xử lý với* $xy+yz+zx$ *ta cần đại lượng nhỏ hơn và cũng theo giả thiết ta không thể đánh giá nó giảm hơn được nữa nên ta đánh giá theo*

$x^2+y^2+z^2\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}$*. Chú ý đến chiều bất đẳng thức và ta biểu diễn giả thiết cũng như bất đẳng thức theo* $x+y+z$.

Chú ý đánh giá $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ *và* $xy+yz+zx\le\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}$*. Khi đó giả thiết trở thành*

$$1=\frac{9}{16}\left(xy+yz+zx\right)+\frac{27}{32}xyz\le\frac{3\left(x+y+z\right)^2}{16}+\frac{\left(x+y+z\right)^3}{32}$$

1. *Từ đó ta được* $x+y+z\ge2$*. Suy ra* $x^2+y^2+z^2\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}\ge\frac{4}{3}$*. Khi đó áp dụng vào bất đẳng thức ta có* $P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}\le\sqrt{3\left[3-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}\le\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Đến đây ta tìm được giá trị lớn nhất của P

- **Lời giải:** Biến đổi giả thiết ta có

$$32abc=18\left(a+b+c\right)+27\Leftrightarrow\frac{9}{16}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{27}{32}.\frac{1}{abc}=1$$

Đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z\left(x,y,z>0\right)$. Khi đó giả thiết trở thành $\frac{9}{16}\left(xy+yz+zx\right)+\frac{27}{32}xyz=1$

Và P được viết lại là $P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ và $xy+yz+zx\le\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}$

Ta được $1=\frac{9}{16}\left(xy+yz+zx\right)+\frac{27}{32}xyz\le\frac{3\left(x+y+z\right)^2}{16}+\frac{\left(x+y+z\right)^3}{32}$

Vì $x,y,z>0$ nên $x+y+z\ge2$ suy ra $x^2+y^2+z^2\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}\ge\frac{4}{3}(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản và (1) ta có

$$P=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}\le\sqrt{3\left[3-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]}\le\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{2}$.

Đề số 6

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH PHÚ THỌ

Năm học 2016 – 2017

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) ra tờ giấy thi.

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm)

Câu 1. Biểu thức $\dfrac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{6-x^2-x}}$ có nghĩa khi nào?

A. $-3 \le x \le 2$. **B.** $\dfrac{5}{3} < x < 2$. **C.** $x < -3$ hoặc $x > 2$. **D.** $-3 < x \le \dfrac{5}{3}$.

Câu 2. Cho biểu thức $Q = \dfrac{x\sqrt{x} - 4x + 4\sqrt{x} - 45}{x - 2\sqrt{x} - 15} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$ $(x \ge 0; x \ne 25)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = (2m-3)x + 4m - 3$. Gọi h là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng (d). Tìm giá trị lớn nhất của h.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 5.

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-2;3); B(-4;-4); C(5;-1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 30,5. **B.** 28,5. **C.** 42. **D.** 38.

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $(d_1): \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{2}{3}; (d_2): y = \dfrac{-1}{3}x - \dfrac{1}{2}$ và $(d_3): (2m+3)x - 3my = 0$. Tìm m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

A. $\dfrac{-1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Câu 6. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2(m-2)x + 5m - 16$. Tìm giá trị của m để (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

A. $m < \dfrac{16}{5}$. **B.** $3 < m < \dfrac{16}{5}$.

C. $m < -4$ hoặc $m > \dfrac{16}{5}$. **D.** $m > \dfrac{16}{5}$.

Câu 7. Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 9y^2 - 4x + 7 = 2y(3x-7)$ sao cho y_0 đạt giá trị lớn nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

A. -4. **B.** $\dfrac{-5}{2}$. **C.** $\dfrac{-3}{2}$. **D.** -5.

Câu 8. Tìm m để phương trình $x^2-(m+4)x+m+3=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{26}$.

A. $m=-8$ hoặc $m=2$ **B.** $m=2$

C. $m=-8$ **D.** $m=8$ hoặc $m=-2$

Câu 9. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có $AB=2,5\text{ cm}; AD=3,5\text{ cm}; BD=5\text{ cm}$ và $\widehat{DBC}=\widehat{DAB}$. Tính tổng $BC+CD$.

A. 17 (cm). **B.** 19 (cm). **C.** 20 (cm). **D.** 22 (cm).

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A đường phân giác AD, $(D\in BC)$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$. **B.** $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{AD}$.

C. $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$. **D.** $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{2}{AD}$.

Câu 11. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC}=30^0$, kẻ hai đường cao BD, CE $(D\in AC; E\in AB)$. Gọi $S; S'$ lần lượt là diện tích $\Delta ABC, \Delta ADE$. Tính tỉ số $\frac{S'}{S}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ $AH\perp BC$, $HD\perp AB$, $HE\perp AC$ $(H\in BC, D\in AB, E\in AC)$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $AD.AB=AE.AC$. **B.** $BD.BA=CE.CA$. **C.** $AD.DB+AE.EC=AH^2$ **D.** $BD.BA=AH^2$

Câu 13. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{ABC}>\widehat{ACB}$, kẻ đường cao AH, trung tuyến AM $(M, H\in BC)$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\tan\widehat{HAM}=\frac{\cot C-\cot B}{2}$. **B.** $\tan\widehat{HAM}=\frac{\cot B-\cot C}{2}$.

C. $\tan\widehat{HAM}=\frac{\tan C-\tan B}{2}$. **D.** $\tan\widehat{HAM}=\frac{\cos C-\cos B}{2}$.

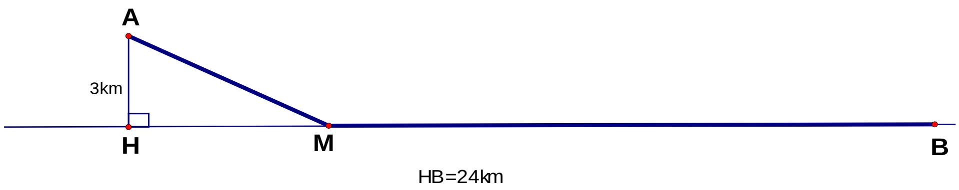
Câu 14. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB =2R . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M kẻ dây cung CD, qua N kẻ dây cung EF sao cho CD//EF (C, F cùng thuộc nửa đường tròn đường kính AB) và $\widehat{CMO}=30^0$. Tính diện tích tứ giác CDEF theo R.

A. $\frac{R^2\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{R^2\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{R^2\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{3R^2\sqrt{15}}{8}$.

Câu 15. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB=2R. Điểm M thuộc tia đối của tia AB, qua M kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm), kẻ CH vuông góc với AB $(H\in AB)$ biết $MA=a; MC=3a\ (a>0)$. Tính CH theo a.

A. $\frac{12a}{5}$.	**B.** $\frac{9a}{5}$.	**C.** $\frac{8a}{5}$.	**D.** $\frac{14a}{5}$.

Câu 16. Một ngọn hải đăng ở vị trí A cách bờ biển (là đường thẳng) một khoảng $AH = 3\,(km)$. Một người gác hải đăng muốn từ vị trí A trở về vị trí B trên bờ biển (HB = 24 (km)), bằng cách chèo thuyền với vận tốc 3 (km/h) tới vị trí M trên bờ (M nằm giữa H và B) sau đó từ M chạy bộ dọc theo bờ biển đến B với vận tốc gấp bốn lần vận tốc chèo thuyền. Biết tổng thời gian di chuyển từ A về đến B hết 3 giờ 20 phút. Tính khoảng cách MB ?



A. 12 (km).	**B.** 16 (km).	**C.** 18 (km) .	**D.** 20 (km).

B. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm).

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

b) Chứng minh rằng nếu $a.b = 3$ thì hai phương trình sau $\left(a^3 + a\right)x + a^2y + a^4 + 1 = 0$ và $\left(b^3 + b\right)x + b^2y + b^4 + 1 = 0$ (a,b là các tham số) không có nghiệm nguyên chung.

Câu 2 (3.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2y = 3x^2 + 5xy + y^2 + 4x + y \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y+1} = x + 1. \end{cases}$.

Câu 3 (4.0 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định trên $(O;R)$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$ và $(A;R)$, H là điểm thay đổi trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của đường tròn $(A;R)$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt đường tròn $(O;R)$ tại B, C. Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$ với $I \in AB$ và $K \in AC$.

a) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC = 2R^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔAIK khi H thay đổi.

Câu 4 (1.5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 4abc$$

Phân tích và hướng dẫn giải

1. Phần trắc nghiệm khách quan

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Đáp án	D	C	B	B	A	D	A	B	A	B	A	A, C	A	C	A	D
Điểm	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

2. Phần tự luận.

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

• **Lời giải.** Ta có $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+b)(a+c)$. Hoàn toàn tương tự ta có

$$1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = (b+a)(b+c)$$
$$1 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = (c+a)(c+b)$$

Suy ra $\frac{a-b}{1+c^2} = \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} = \frac{a+c-b-c}{(c+a)(c+b)} \frac{1}{c+b} - \frac{1}{c+a}$.

$$\frac{b-c}{1+a^2} = \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} = \frac{b+a-a-c}{(a+b)(a+c)} = \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b}$$
$$\frac{c-a}{1+b^2} = \frac{c-a}{(b+c)(b+a)} = \frac{c+b-a-b}{(b+c)(b+a)} = \frac{1}{b+a} - \frac{1}{b+c}$$

Vậy $\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = \frac{1}{c+b} - \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+a} - \frac{1}{b+c} = 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $a.b = 3$ thì hai phương trình $(a^3 + a)x + a^2y + a^4 + 1 = 0$ (1) và $(b^3 + b)x + b^2y + b^4 + 1 = 0$ (2) (Với a,b là các tham số) không có nghiệm nguyên chung.

• **Lời giải.** Giả sử hai phương trình (1) và (2) có nghiệm nguyên chung $(x_0; y_0)$, ta có

$$(a^3 + a)x_0 + a^2y_0 + a^4 + 1 = 0 (3); (b^3 + b)x_0 + b^2y_0 + b^4 + 1 = 0 (4)$$

Vì $a, b \neq 0$ nên ta có

$$(3) \Leftrightarrow a^4 + x_0a^3 + y_0a^2 + x_0a + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right)x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + x_0\left(a + \frac{1}{a}\right) + y_0 - 2 = 0;$$
$$(4) \Leftrightarrow b^4 + x_0b^3 + y_0b^2 + x_0b + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + x_0\left(b + \frac{1}{b}\right) + y_0 - 2 = 0.$$

Suy ra $t_1 = a + \frac{1}{a}; t_2 = b + \frac{1}{b}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai (ẩn t)

$$t^2 + x_0t + y_0 - 2 = 0$$

Theo định lí Vi – et ta có $\begin{cases} a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}=-x_0 \\ \left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=y_0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\dfrac{a+b}{ab}=-x_0 \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+ab+\dfrac{1}{ab}=y_0-2. \end{cases}$

Vì $a.b=3$ nên $\begin{cases} a+b=-\dfrac{3}{4}x_0 \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=y_0-\dfrac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab=\dfrac{9}{16}x_0^2 \\ a^2+b^2=ab(y_0-\dfrac{16}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{9}{16}x_0^2-6 \\ a^2+b^2=3y_0-16. \end{cases}$

Suy ra $\dfrac{9}{16}x_0^2-6=3y_0-16 \Rightarrow 9x_0^2=48y_0-160\ (4)$. Điều này vô lí vì vế trái của (4) chia hết cho 3 nhưng vế phải của (4) không chia hết cho 3.

Vậy nếu $a.b=3$ thì hai phương trình đã cho không có nghiệm nguyên chung.

Câu 2. a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow 2x+3=x+2+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4\left(x+1\right)=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-1; x=3$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+x^2y=3x^2+5xy+y^2+4x+y \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y+1}=x+1 \end{cases}$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \geq 0; y \geq -1$.

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$y^2-\left(x^2-5x-1\right)y-\left(x^3-3x^2-4x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y+x+1\right)\left(y-x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2-4x \\ y+x+1=0 \end{array}\right.$$

Từ phương trình thứ hai ta được $3\sqrt{x}=\sqrt{y+1}+x+1 \geq 1 \Rightarrow x>0 \Rightarrow y+x+1>0$.

Do vậy từ phương trình thứ nhất ta có $y=x^2-4x$. Thay $y=x^2-4x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình $3\sqrt{x}-\sqrt{x^2-4x+1}=x+1$.

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình trên nên ta xét $x \neq 0$.

Khi đó $3\sqrt{x}-\sqrt{x^2-4x+1}=x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-4}=3$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(t \geq 2\right) \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=t^2-2$. Phương trình trên trở thành

$$t+\sqrt{t^2-6}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t^2-6=\left(3-t\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$$

Suy ra $x+\frac{1}{x}=\frac{25}{4}-2 \Leftrightarrow x^2-\frac{17}{4}x+1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4};4\right\}$.

Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=(4;0),\left(\frac{1}{4};\frac{-15}{16}\right)$.

Câu 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định trên $(O;R)$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $(O;R)$ và $(A;R)$, điểm H là điểm thay đổi trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của đường tròn $(A;R)$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt $(O;R)$ tại B, C. Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$ với $I \in AB$ và $K \in AC$

a) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC=2R^2$.

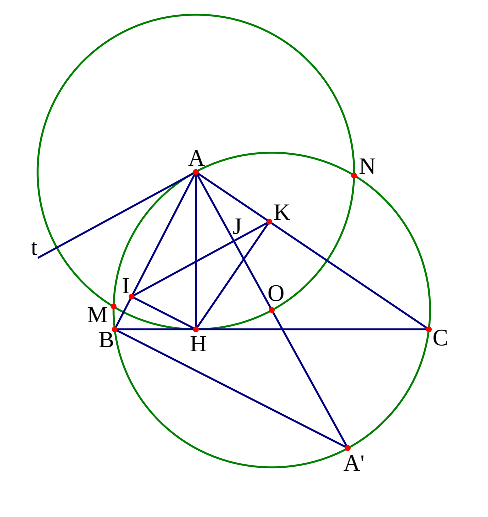
Ta có $\widehat{AIH}=90^0;\widehat{AKH}=90^0$. Vì $\widehat{AIH}+\widehat{AKH}=180^0$ nên tứ giác AIHK nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn $(O;R)$ tại A.

Ta có $\begin{cases}\widehat{ACB}+\widehat{HAC}=90^0\\ \widehat{AHK}+\widehat{HAC}=90^0\end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{AHK}$ (1)

Ta lại có $\widehat{AHK}=\widehat{AIK}$ (do tứ giác AIHK nội tiếp) (2)

và $\widehat{BAt}=\widehat{ACB}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$) (3).



Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BAt}=\widehat{AIK}$ nên At song song với IK.

Mặt khác $OA \perp At \Rightarrow IK \perp OA$. Vậy IK luôn vuông góc với đường thẳng cố định OA.

Gọi J là giao điểm của AO và IK và A′ là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có $\Delta ACH \backsim \Delta AA'B \left(\widehat{AHC}=\widehat{ABA'}=90^0;\widehat{ACH}=\widehat{AA'B}\right)$.

Do đó ta được $\frac{AC}{AA'}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AB.AC=AH.AA'=2R.AH=2R^2$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔAIK khi H thay đổi.

Ta có $\Delta AKH \backsim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AK}{AH}=\frac{AH}{AC} \Rightarrow AK.AC=AH^2$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AIK.

Ta có $\Delta AIK \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AI}{AC}=\frac{AK}{AB}=\frac{IK}{BC}=\frac{AJ}{AH}$, suy ra:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}AJ.IK}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{AJ}{AH}.\frac{IK}{BC}=\left(\frac{AK}{AB}\right)^2=\left(\frac{AK.AC}{AB.AC}\right)^2=\frac{AH^4}{(AH.2R)^2}=\frac{AH^2}{4R^2}=\frac{1}{4}.$$

Suy ra $S'=\frac{1}{4}.S=\frac{1}{8}AH.BC=\frac{R}{8}.BC \le \frac{R}{8}.2R=\frac{R^2}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tam giác AIK bằng $\frac{R^2}{4}$, đạt khi $H \equiv O$.

Câu 4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 4abc.$$

• **Lời giải.** Ta có

$$ab + bc + ca = \left(a + b + c\right)\left(ab + bc + ca\right) = \left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 3abc$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \left(a + b + c\right)^2 - 2\left(ab + bc + ca\right) = 1 - 2\left(ab + bc + ca\right) \\ &= 1 - 2\left[\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 3abc\right] \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= 2\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + 1 - 2\left[\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) + \left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 3abc\right] + 4abc \\ &= 1 - 2\left(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc\right) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \le b \le c$.

Suy ra $a\left(a - b)\right)\left(b - c\right) \ge 0 \Rightarrow \left(a^2 - ab\right)\left(b - c\right) \ge 0$

Do đó suy ra $a^2b - a^2c - ab^2 + abc \ge 0 \Rightarrow ab^2 + ca^2 \le a^2b + abc$

Do đó $ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc = \left(ab^2 + ca^2\right) + bc^2 + abc \le \left(a^2b + abc\right) + bc^2 + abc = b\left(a + c\right)^2$

Với các số dương x, y, z ta luôn có

$$x + y + x - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}\right)^2\right] \ge 0$$

Suy ra $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$b\left(a + c\right)^2 = 4b\left(\frac{a + c}{2}\right)\left(\frac{a + c}{2}\right) \le 4\left(\frac{b + \frac{a + c}{2} + \frac{a + c}{2}}{3}\right)^3 = 4\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Suy ra $P = 1 - 2\left(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc\right) \ge 1 - 2b\left(a + c\right)^2 \ge 1 - 2.\frac{4}{27} = \frac{19}{27}$

Vậy $\text{MinP} = \frac{19}{27}$ và P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Đề số 7

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Năm học: 2016 – 2017

Bài 1 (3.0 điểm). Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện sau $a - b = 7; b - c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$

Bài 2 (3.0 điểm). Giải phương trình $(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3$.

Bài 3 (3.0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y - 1) + y(x + 1) = 6 \\ (x - 1)(y + 1) = 1 \end{cases}$

Bài 4 (4.0 điểm).

1. Cho các số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $\dfrac{x}{1 + x} + \dfrac{2y}{1 + y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy^2$

2. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x + y)(x + 2y) = x + 5$

Bài 5 (5.0 điểm).

1. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với HK.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi AH, AD lần lượt là đường cao. đường phân giác trong của tam giác ABC (H,D thuộc BC). Tia AD cắt (O) tại E, tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K. Chứng minh rằng AK là đường kính của (O).

Bài 6 (2.0 điểm). Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1. Cho ba số a, b, c thoả các điều kiện sau $a - b = 7, b - c = 3$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$$

- **Phân tích và lời giải.** Nhìn vào tử số của P ta có biến đổi quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2}$$

Từ đây phải biến đổi giả thiết để xuất hiện thêm $c - a$.

Ta có $c - a = -(b - c) - (a - b) = -3 - 7 = -10$. Đặt T là tử của của P ta được $T = 79$.

Đặt M là mẫu của P, khi đó M cũng có thể phân tích thành tích được thành

$$M = (a-c)(a+c-2b) = (a-c)(a-b+c-b) = 40$$

Vậy ta được $P = \dfrac{79}{40}$.

Bài 2. Giải phương trình $(2x-1)\sqrt{x+3} = x^2 + 3$.

- **Phân tích và lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge \dfrac{1}{2}$. Phương trình có căn nên ta sẽ khử căn bằng cách bình phương 2 vế nhưng phương trình lúc này bậc 4, tuy nhiên nếu không nhẩm được hai nghiệm của phương trình bậc bốn thì ta không thể sử dụng phương pháp này.

Phương trình tương đương với $x^2 + 3 - 2x\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3} = 0$

Nhận thấy có hệ số 2 ở $2x\sqrt{x+3}$, có x^2 và 3 nên ta nghĩ đến phân tích thành bình phương.
Phương trình lại tương đương với

$$x^2 - 2x\sqrt{x+3} + x + 3 - x + \sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(x-\sqrt{x+3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+3}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{x+3} \\ x-1 = \sqrt{x+3} \end{array}\right.$$

Đến đây kết hợp với $x \ge \dfrac{1}{2}$ ta xét các trường hợp như trên

+ Với $x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ $x \ge \dfrac{1}{2}$

+ Với $x - 1 = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (x-1)^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{cases}$

- **Phân tích và lời giải.** Cả hai phương trình đều có hạng tử xy nên ta sẽ tìm cách triệt tiêu, lúc này bài toán có thể giải được. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2xy - x + y = 6 \\ xy - y + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - x + y = 6 \\ 2xy - 2y + 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow 3y - 3x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3} + x$$

Thế $y = \dfrac{2}{3} + x$ vào phương trình thứ nhất ta được $x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{8}{3} = 0 \Rightarrow x \in \left\{-2; \dfrac{4}{3}\right\}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(-2; \dfrac{-4}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3}; 2\right)$

Bài 4. 1. Cho hai số thực dương x, y thoả mãn điều kiện $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=xy^2$

- **Phân tích và lời giải.** Cả giả thiết và kết luận đều không có liên hệ gì đến nhau. Thậm chí, giả thiết $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1$ ta cũng không biết nên áp dụng bđt nào phù hợp. Do đó để có đánh giá hợp lí ta đi biến đổi giả thiết trước

Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1 \Leftrightarrow \frac{x+3xy+2y}{x+y+xy+1}=1 \Leftrightarrow 2xy+y=1$

Đến đây quan sát để ý kĩ thì $xy^2=y.xy$ trong đó y và xy là hai hạng tử trong đẳng thức trên. Ta sẽ tìm cách biến đổi vế trái đẳng thức trên thành tích bằng sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Ta có $1=2xy+y\ge 2\sqrt{2xy.y}=2\sqrt{2}.\sqrt{xy^2} \Leftrightarrow 1\ge 8xy^2 \Leftrightarrow xy^2\le \frac{1}{8}$

Vậy giác trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$, xẩy ra tại $2xy=y \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể trình bài bài toán theo cách khác sau:*

Từ giả thiết đã cho, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

2. $$\frac{1}{1+y}=1-\frac{y}{1+y}=\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}} \Rightarrow \frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{4xy}{(1+x)(1+y)}$$

3. *Mặt khác ta lại có* $\frac{1}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}=\frac{2y}{1+y} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2}=\frac{4y^2}{(1+y)^2}$

Do đó ta được $\frac{1}{(x+1)(y+1)^2}\ge\frac{8xy^2}{(x+1)(y+1)^2} \Leftrightarrow xy^2\le\frac{1}{8}$.

2. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x+y)(x+2y)=x+5$

- **Phân tích và lời giải.** Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0$. nhận thấy đây là phương trình có bậc là hai nên ta sẽ sử dụng delta để giải phương trình nghiệm nguyên này.

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

Xem phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x ta được

$$\Delta=(3y-1)^2-4(2y^2-5)=y^2-6y+21=(y-3)^2+12$$

Để phương trình trên có nghiệm là nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta=(y-3)^2+12=a^2 \Leftrightarrow (a-y+3)(a+y-3)=12$ với a là số nguyên.

Vì $a-y+3$ và $a+y-3$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có bảng sau

$a-y+3$	2	6	-2	-6
$a+y-3$	6	2	-6	-2
a	4	4	-4	-4

y	5 (TM)	1 (TM)	1 (TM)	5 (TM)

Thay $y = 5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 + 14x + 45 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-9; -5\}$

Thay $y = 1$ vào phương trình đã cho ta được $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1\}$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y) = (5; -5), (5; -9), (1; 1), (1; -3)$

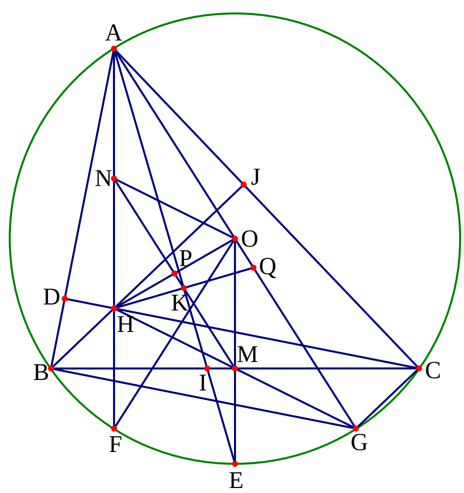
Bài 5.1. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với HK.

- **Phân tích và lời giải.**

+ Cách 1. Để chứng minh AK vuông góc với HK ta sẽ dựng một tam giác cân bên ngoại chứa đường cao AK và tìm cách chứng minh đó là tam giác cân bằng cách chứng minh AK là trung trực, trung tuyến, phân giác.

Thật vậy, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giả sử AH cắt đường tròn tại F và AK cắt đường tròn (O) tại E. Kẻ đường kính AG và . HK cắt AG tại Q. Dễ thấy OE là trung trực của BC suy ra OE song song với AH. Khi đó ta có

$$\widehat{EOG} = \widehat{FAG} = \frac{1}{2}sd\widehat{FG} = \frac{1}{2}\widehat{FOG} = \widehat{FOE}.$$



Do đó ta được $\widehat{FE} = \widehat{EG}$ nên suy ra AK là phân giác $\widehat{HAQ}$. Mặt khác BJ và CD là đường cao tam giác ABC và MN cắt OH tại P. Dễ thấy BG vuông góc với AB và CH vuông góc với AB dẫn đến HC song song với BG, tương tự BH song song với CG nên suy ra HBGC là hình bình hành hay M là trung điểm của HC. Ngoài ra còn có N là trung điểm của AH nên MN là đường trung bình tam giác AHG và PK song song với OQ. Mặt khác vì N là trung điểm của AH nên ON là đường trung bình của tam giác AHC hay ON song song với HM, mà ta đã có OM song song với NH suy ra ONHM là hình bình hành. Do P là giao điểm hai đường chéo nên P là trung điểm của OH. Kết hợp với PK song song với OQ suy ra K là trung điểm của HQ. Đến đây là có được AK vuông góc với HK. Từ đó ta được

+ Cách 2. Để chứng minh AK vuông góc với HK hay tam giác AKH vuông ở K ta cần chứng minh

4. $AN = NH = NK$ hay $\widehat{HNK} = 2\widehat{HAK}$. Mà ta có $\widehat{DNH} = 2\widehat{DAN}$ nên ta sẽ phải chứng minh được $\widehat{DNK} = 2\widehat{DAK}$. Ta có $2\widehat{DAK} = \widehat{BAC}$ do đó ta đi chứng minh $\widehat{DNK} = \widehat{BAC}$.

5. Dễ thấy $\widehat{DNK} = \widehat{KNE} = \frac{1}{2}\widehat{DNE}$ và tứ giác AOHE nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}sd\widehat{DE} = \frac{1}{2}\widehat{DNE} = \widehat{DNK}$.

Bài toán được chứng minh.

6. • ***Nhận xét.*** *Một số kết quả thú vị từ bài toán hình 5.1.*

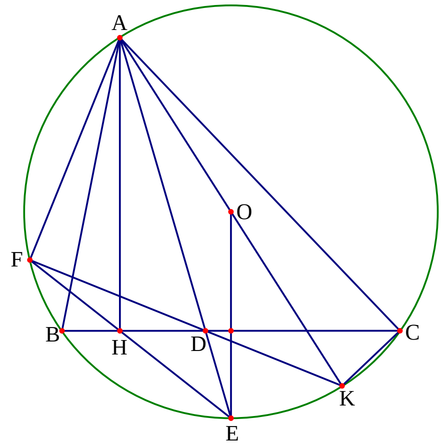
+ *Giả sử BC là dây cố định của đường tròn (O), điểm A di động trên đường tròn (O) và đường thẳng HK cũng luôn đi qua điểm cố định*

+ Gọi I là hình chiếu của B trên AC. Gọi H′ là điểm đối xứng với H qua K. Gọi G là trung điểm của AH′. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK, đường tròn ngoại tiếp tam giác NGK và AH′ đồng quy tại 1 điểm.

+ Tia AK cắt BC tại Q, khi đó tứ giác CQKI nội tiếp.

7. *+ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó các điểm A, H′, O thẳng hàng.*

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi AH, AD lần lượt là đường cao và đường phân giác trong của tam giác ABC (H, D thuộc BC). Tia AD cắt đường tròn (O) tại E, tia EH cắt đường tròn (O) tại F và tia FD cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh rằng AK là đường kính của đường tròn (O).



• **Phân tích và lời giải.** Để chứng minh AK là đường kính đường tròn (O) ta cần chứng minh tam giác AFK vuông ở F hay $\widehat{AFD} = 90^\circ$. Nhận thấy $\widehat{AHD} = 90^\circ$ nên ta cũng cần tiếp tục phải chứng minh tứ giác AFHD nội tiếp. Thật vậy

$$\widehat{HDE} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BE} + \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{EC} + \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AE}$$

Mà ta có $\widehat{AFE} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AE}$, do đóAK là đường kính của đường tròn (O).

Bài 6 (2.0 điểm). Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

• **Lời giải.** Theo giả thiết thì Nam chơi bóng bàn vào thứ Hai và chơi bóng đá vào thứ Tư.

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn		Bóng đá				

Do Nam chạy 3 ngày mỗi tuần, trong đó không có 2 ngày nào liên tiếp nên Nam chỉ có thể chạy vào thứ 3, thứ 5, thứ 7 hoặc thứ 3, thứ 6, chủ nhật hoặc thứ 3, thứ 5, chủ nhật

+ Trường hợp 1. Nam chạy vào Thứ 3, Thứ 5, Thứ 7

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Chạy		Chạy	

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ 7 hoặc chủ nhật, mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên Nam không thể chơi cầu lông. Trường hợp này loại

+ Trường hợp 2. Nam chạy vào thứ 3, thứ 6, chủ nhật

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá		Chạy		Chạy

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ 5 hoặc thứ7, mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên Nam chơi cầu lông vào thứ 5. Khi đó Nam bơi vào thứ 7

Trường hợp 3. Nam chạy vào thứ 3, thứ 5, chủ nhật

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN

Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Chạy			Chạy

Lúc này, Nam chỉ có thể chơi cầu lông và bơi trong thứ 6 và thứ 7, mà Nam không chơi hai môn này trong hai ngày liên tiếp nên không thể thế được. Loại

Qua các trường hợp trên thì ta có thời gian biểu chính thức của Nam là:

Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Bóng bàn	Chạy	Bóng đá	Cầu lông	Chạy	Bơi	Chạy

Vậy Nam bơi vào T7

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể trình bài cách giải thích khác như sau.*

Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp, điều này dẫn đến Nam không thể chạy cả 3 trong bốn ngày từ thứ 5 đến chủ nhật. Do ngày thứ 2 Nam chơi bóng bàn và ngày thứ 4 M chơi bóng đá nên trong 3 ngày chạy thì có một ngày là thứ 3. Do Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam bơi hoặc chạy nên Nam có thể chơi cầu luông vào ngày thứ 5 hoặc chủ nhật. Từ đó có thể chọn được ngày chơi cầu lông là thứ 5 vì ngày chủ nhật là không thể. Do vậy còn ba ngày còn lại thì Nam phải chạy vào hai ngày thứ 6 và chủ nhật vì Nam không thể chạy vào hai ngày liên tiếp. Do đó thứ bày là ngày Nam bơi.

Đề số 8

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Chứng minh rằng $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $\left(x;y\right)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ đều là số chính phương.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 3 (3.0 điểm).

Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

a) Chứng minh rằng $x + y + z \le 2 + xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy}$.

Bài 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC $\left(BC > CA > AB\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng huộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $CF = BE$. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng $PN = PO$

Bài 5 (1.0 điểm).

Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100.Hai người A và B lần lượt chọn lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bào nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Chứng minh rằng $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

- ***Phân tích.*** *Đặt* $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ *và để ý là* $30 = 2.3.5$ *(2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một) do đó ta phân tích A sao cho A chia hết cho 2, 3, 5.*

- **Lời giải.** Đặt $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ khi đó ta có

$$A = n^5 + 5n^3 - 6n = n(n-1)(n+1)(n^2+6) = n(n-1)(n+1)(n^2-4+10)$$
$$= n(n-1)(n+1)(n^2-4) + 10n(n-1)(n+1)$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 10(n-1)n(n+1)$$

Do $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên tích này chia hết cho cả 2, 3, 5. Mà 2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi 1 nên $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 30. Mặt khác ta lại có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2, 3 nên chia hết cho 6. Do đó $10(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 30. Vậy A chia hết cho 30 hay $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ đều là số chính phương.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy vai trò của hai biến x và y trong bài toán như nhau nên ta có thể giả sử* $x \ge y$*, khi đó ta có thấy được mối liên hệ* $x^2 + 8y \le x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$*. Để ý là* $x^2 < x^2 + 8y$*. Như vậy ta được* $x^2 < x^2 + 8y < (x+4)^2$*. Do* $x^2 + 8y$ *là số chính phương nên ta có thể suy ra được*

$$x^2 + 8y = (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$$

Đến đây ta xét các trường hợp để tìm $(x;y)$ *thỏa mãn.*

• **Lời giải.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$. Khi đó ta có

$$x^2 < x^2 + 8y \le x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Mà $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta có thể suy ra được $x^2 + 8y$ nhận một trong các giá trị

$$(x+1)^2; (x+2)^2; (x+3)^2$$

+ Trường hợp 1. Khi $x^2 + 8y = (x+1)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 8y = 2x + 1$, trường hợp này không xảy ra do $8y$ là số chẵn và $2x + 1$ là số lẻ.

+ Trường hợp 2. Khi $x^2 + 8y = (x+2)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2y - 1$.

Do $y^2 + 8x$ là số chính phương nên suy ra $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

Khi $y = 1$ ta được $x = 1$ và cặp số $(x;y) = (1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét $y \ge 2$, khi đó ta có $y^2 + 16y - 8 = (y+3)^2 + (10y - 17) > (y+3)^2$

Đồng thời ta cũng có $y^2 + 16y - 8 = (y+6)^2 - 72 < (y+8)^2$.

Do đó suy ra $(y+3)^2 < y^2 + 16y - 8 < (y+8)^2$. Mà $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

Suy ra $y^2 + 16y - 8 \in \{(y+4)^2; (y+5)^2; (y+6)^2; (y+7)^2\}$.

Giải trực tiếp các trường hợp ta được các cặp số $(x;y) = (5;3), (21;11)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 3. Khi $x^2 + 8y = (x+3)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 8y = 6x + 9$, trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $6x + 9$ là số lẻ.

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y) = (1;1),(3;5),(5;3),(11;21),(21;11)$

• ***Nhận xét.*** *Để tìm y thỏa mãn $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương ta có thể xử lý theo cách khác*

Đặt $y^2 + 16y - 8 = k^2\ (k \in N)$. Khi đó ta có

$$y^2 + 16y - 8 = k^2 \Leftrightarrow (y+8)^2 = k^2 + 72 \Leftrightarrow (y+8-k)(y+8+k) = 72$$

Để ý rằng $y + 8 + k > y + 8 - k > 0$ và $y + 8 + k; y + 8 - k$ cùng tính chẵn lẻ.

Lại có $72 = 2.36 = 4.18 = 6.12$. Đến đây ta xét các trường hợp xẩy ra để tìm y theo bản sau

$y+8-k$	2	4	6
$y+8+k$	36	18	12
k	17	7	3
y	11	3	1

Đến đây ta có kết quả tương tự như trên.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \dfrac{3}{x}} + \sqrt{\dfrac{6}{x} - 2x} = 1 + \dfrac{3}{2x}$

• ***Phân tích.*** *Phương trình đã cho có chứa hai căn thức và có ẩn ở mẫu. Quan sát kỹ phương trình ta nhận thấy $\left(2x - \dfrac{3}{x}\right) + \left(\dfrac{6}{x} - 2x\right) = \dfrac{3}{x}$ có mối liên hệ với vế phải của phương trình, do đó ta sử dụng các đánh giá để làm mất căn thức hoặc đưa hai biểu thức trong căn vào cùng một căn thức. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{2x - \dfrac{3}{x}} + \sqrt{\dfrac{6}{x} - 2x} \le \dfrac{1}{2}\left(1 + 2x - \dfrac{3}{x}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \dfrac{3}{2x}$. Đến đây ta giải quyết được phương trình.*

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \ne 0; 2x - \dfrac{3}{x} \ge 0; \dfrac{6}{x} - 2x \ge 0$ hay $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \le x \le \sqrt{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \le \frac{1}{2}\left(1 + 2x - \frac{3}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{6}{x} - 2x\right) = 1 + \frac{3}{2x}$$

Kết hợp với phương trình đã cho suy ra dấu bằng của các bất đẳng thức trên xẩy ra

Do đó ta có $\begin{cases} 2x - \dfrac{3}{x} = 1 \\ \dfrac{6}{x} - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{3}{2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\end{cases}$

• ***Phân tích.*** *Quan sát hệ phương trình ta nhận thấy* $\sqrt{\dfrac{4x}{5y}}.\sqrt{\dfrac{5y}{x}} = 2$ *và khi nhân hai vế phải của hai phương trình thì ta lại có* $\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right) = 2y$. *Đến đây ta được* $y = 1$, *khi đó ta đưa về giải phương trình* $\sqrt{\dfrac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \ge y > 0$. Nhận theo vế hai phương trình của hệ đã cho ta được

$$\sqrt{\frac{4x}{5y}}.\sqrt{\frac{5y}{x}} = \left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right) \Leftrightarrow 2 = 2y \Leftrightarrow y = 1$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được $\sqrt{\dfrac{5}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

+ Xét $x = \dfrac{5}{4}$. Khi đó ta được $\sqrt{4} = \sqrt{\dfrac{5}{4}+1} + \sqrt{\dfrac{5}{4}-1}$, đẳng thức đúng. Do đó $x = \dfrac{5}{4}$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x > \dfrac{5}{4}$. Khi đó ta có $\sqrt{\dfrac{5}{x}} < \sqrt{4} = \sqrt{\dfrac{5}{4}+1} + \sqrt{\dfrac{5}{4}-1} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, do đó phương trình không có nghiệm.

+ Xét $x < \dfrac{5}{4}$. Khi đó ta có $\sqrt{\dfrac{5}{x}} > \sqrt{4} = \sqrt{\dfrac{5}{4}+1} + \sqrt{\dfrac{5}{4}-1} > \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, do đó phương trình không có nghiệm

Do đó $x = \dfrac{5}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y) = \left(\dfrac{5}{4};1\right)$.

Bài 3. Với mọi số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

a) Chứng minh rằng $x + y + z \le 2 + xy$.

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$x+y+z = (x+y).1 + z.1 \le \frac{(x+y)^2+1}{2} + \frac{z^2+1}{2} = \frac{x^2+y^2+x^2+2xy+2}{2} = 2 + xy$$

Dấu bằng xẩy ra tại $\begin{cases} x+y=1 \\ z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=z=1; y=0 \\ y=z=1; x=0 \end{array}\right.$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy}$.

• **Lời giải.**

+ Tìm giá trị lớn nhất của P.

Áp dụng kết quả câu a ta có các bất đẳng thức

$$x + y + z \le 2 + xy; x + y + z \le 2 + yz; x + y + z \le 2 + zx$$

Khi đó ta được $P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \le \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của P là 1, dấu bằng xẩy ra tại $x = y = 1; z = 0$ và các hoán vị.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{x}{2+yz} = \frac{2x}{4+2yz} \ge \frac{2x}{4+y^2+z^2} = \frac{2x}{6-x^2}$.

Ta sẽ chứng minh khi $0 \le x \le \sqrt{2}$ thì $\frac{2x}{6-x^2} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$. Thật vậy, đặt $t = x\sqrt{2}$ thì ta có $0 \le t \le 1$.

Ta cần chứng minh $\frac{t\sqrt{2}}{3-t^2} \ge \frac{t^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t\left(1-t\right)^2\left(2+t\right) \ge 0$ là một bất đẳng thức đúng.

Vậy ta có $\frac{2x}{6-x^2} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$, dấu bằng xẩy ra tại $x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

Như vậy ta có $\frac{x}{2+yz} \ge \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{y}{2+zx} \ge \frac{y^2}{2\sqrt{2}}; \frac{z}{2+xy} \ge \frac{z^2}{2\sqrt{2}}$. Công theo vế các bất đẳng thức ta được

$$P = \frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$ và các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{\sqrt{2}}{2}$, đạt được tại $x = \sqrt{2}; y = z = 0$ và các hoán vị.

• ***Nhận xét.*** *Câu a của bài toán chính là gợi ý để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P. Ngoài ra ta có thể tìm giá trị lớn nhất của P độc lập với gợi ý ở câu a như sau*

$$2P = \frac{2x}{2+yz} + \frac{2y}{2+zx} + \frac{2z}{2+xy} = x + y + z - xyz\left(\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{1}{2+yz} + \frac{1}{2+zx} + \frac{1}{2+xy} \ge \frac{9}{6+xy+yz+zx} \ge \frac{9}{6+x^2+y^2+z^2} = \frac{9}{8} > 1$$

Khi đó ta có $2P \le x + y + z - xyz = x\left(1-yz\right) + y + z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được ta lại có

$$\left[x\left(1-yz\right)+\left(y+z\right)\right]^2 \le \left[x^2+\left(y+z\right)^2\right]\left[\left(1-yz\right)^2+1\right]$$
$$=\left(2+2yz\right)\left(2-2yz+y^2z^2\right)=4+2y^2z^2\left(yz-1\right)\le 4$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $yz \le \dfrac{y^2+z^2}{2} \le 2$. *Do đó ta được* $4P^2 \le 4 \Rightarrow P \le 1$.

Với ý thứ hai của câu b ta có thể trình bày cách khác như sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$P=\frac{x}{2+yz}+\frac{y}{2+zx}+\frac{z}{2+xy} \ge \frac{\left(x+y+z\right)^2}{x\left(2+yz\right)+y\left(2+zx\right)+z\left(2+xy\right)}=\frac{\left(x+y+z\right)^2}{2\left(x+y+z\right)+3xyz}$$

Đặt $t=x+y+z$, *khi đó ta có* $t^2 \ge x^2+y^2+z^2=2$ *và* $t^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=6$.

Từ đó suy ra $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{6}$. *Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được*

$$9xyz \le \left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)=\frac{t\left(t^2-2\right)}{2}$$

Kết hợp với bất đẳng thức trên ta được $P \ge \dfrac{t^2}{2t+\dfrac{t\left(t^2-2\right)}{2}}=\dfrac{6t}{t^2+10}$.

Ta có $\dfrac{6t}{t^2+10} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 12t \ge \sqrt{2}\left(t^2+10\right) \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-5\sqrt{2}\right) \le 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{6}$. *Vậy ta được* $P \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC $\left(BC > CA > AB\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ và có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai là M. Gọi P là trực tâm của tam giác BMC.

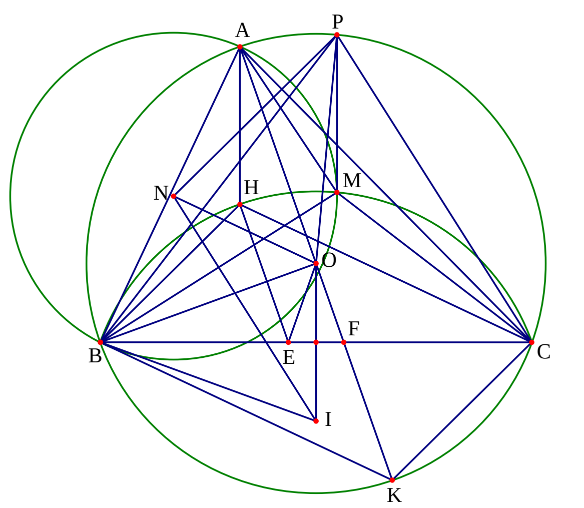
a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng huộc một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn ta cần có* $\widehat{BPC}=\widehat{BAC}$.

Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là trực tâm tam giác PBC. Từ đó ta có $\widehat{BPC}=180^0-\widehat{BMC}$.

Lại thấy $\widehat{BAC}=180^0-\widehat{BHC}$. *Đến đây ta có điều cần chứng minh vì* $\widehat{BHC}=\widehat{BMC}$.

• **Lời giải.** Do P là trực tâm tam giác BMC nên M là trực tâm tam giác PBC.



Từ đó ta có $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BMC}$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{BHC}$.

Mà ta lại có $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$ do tứ giác BHMC nội tiếp.

Do đó ta được $\widehat{BPC} = 180^0 - \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{BHC} = \widehat{BAC}$. Suy ra bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng qua H song song với AO cắt cạnh BC tại E. Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $CF = BE$. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng ta cần chứng minh F thuộc đường kính đi qua A của đường tròn (O). Giả sử AK là đường kính, khi đó ta đi chứng minh ba điểm A, F, K thẳng hàng. Giả thiết cho HE song song với AK nên ta đi chứng minh FK song song với EH.*

Dễ thấy hai tam giác HBE và CKF bằng nhau nên $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, đến đây ta có điều phải chứng minh.

• **Lời giải.** Dựng đường kính AK của đường tròn (O). Khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCK là hình bình hành.

Xét hai tam giác BHE và CKF có $BE = CF; \widehat{HBE} = \widehat{KCF}; BH = CK$ nên $\Delta BHE = \Delta CKF$.

Từ đó ta được $\widehat{KFC} = \widehat{HEB}$, từ đó ta được HE song song với KF. Lại có AK song song với HE nên ba điểm A, F, K thẳng hàng. Suy ra ba điểm A, F, O thẳng hàng.

c) Gọi N là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM. Chứng minh rằng $PN = PO$.

• **Phân tích và lời giải.** Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Ta có $\Delta BHC = \Delta CKB$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BKB. Từ đó ta suy ra được $OB = OC = IB = IC$. Chú ý rằng ON là đường trung trực của AB và OI là đường trung trực của BC, IN là đường trung trực của BM nên ta suy ra được $\widehat{ONI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{OIN} = \widehat{MBC}$.

Từ đó dẫn đến $\widehat{ABM} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ nên $\widehat{OIN} = \widehat{ONI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ hay tam giác OIN cân tại O, đồng thời ta có $\widehat{NOI} = 180^0 - 2\widehat{NIO} = 180^0 - \widehat{ABC}$.

Lại có $\widehat{POB} = 2\widehat{PCB} = 2\left(90^0 - \widehat{MBC}\right) = 180^0 - 2\widehat{MBC} = 180^0 - \widehat{ABC}$.

Từ đó ta được $\widehat{NOI} = \widehat{POB}$ nên suy ra $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$.

Hai tam giác OBI và OPN có $OI = ON; \widehat{NOP} = \widehat{IOB}; OB = ON$ nên $\Delta OBI = \Delta POB$.

Mà tam giác OBO cân tại B nên tam giác OPN cân tại P. Từ đó suy ra $PN = PO$

Bài 1 (1.0 điểm). Trên bàn có 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt chọn lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• ***Phân tích.*** *Vì B bốc thẻ có đánh số $2n + 2$ nên $2n + 2 \le 100$. Suy ra $n \le 49$. Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta xét tập $\{1; 2; 3; 4; ...; 49\}$. Giả sử ta cho A bốc các tâm thẻ có đánh các số lẻ từ 1 đến 49. Như vậy A có thể bốc được 25 số. Khi đó B bốc được các 12 tấm thẻ đánh số chẵn là $4; 8; 12; ...48$ có trong tập hợp trên và 13 tấm thẻ đánh số lấy từ các số còn lại. Cho A bốc các tâm thẻ có đánh số chẵn, khi đó A bốc được 8* *số tương ứng với B bốc được 8 số trong đó có bố số thuộc tập hợp trên. Như vậy tập hợp trên vừa hết số. Do đó tối đa A chỉ bốc được 33 số. Để chứng minh điều này ta chia tập hợp* $\{1;2;3;4;...;49\}$ *thành các như sau*

+ Nhóm 1 gồm $\{1;4\},\{3;8\},\{5;12\};\{7;16\},...,\{23;48\}$, *trong đó có 12 số A bốc được và 12 số B bốc được có trong tập hợp trên.*

+ Nhóm 2 gồm $\{2;6\},\{10;22\},\{14;30\};\{18;38\}$, *trong đó có 4 số A bốc được và 4 số B bốc được có trong tập hợp trên.*

+ Nhóm 3 gồm $\{25\},\{27\},\{29\};\{31\},...,\{49\}$, *trong đó có 13 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 13 số B bốc được từ các số còn lại.*

+ Nhóm 4 gồm $\{26\},\{32\},\{42\};\{46\}$, *trong đó có 4 số A bốc được có trong tập hợp trên và tương ứng 4 số B bốc được từ các số còn lại.*

Như vậy nếu A bốc được từ 34 số trở lên thì sẽ có hai số trùng nhau. Từ đó ta có lời giải như sau

- **Lời giải.** Vì B bốc thẻ có đánh số $2n+2$ nên $2n+2 \le 100$. Suy ra $n \le 49$. Do đó A chỉ được bốc các tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 49. Ta chia tập hợp $\{1;2;3;4;...;49\}$ thành 33 tập hợp con như sau

  + Nhóm 1 gồm $\{1;4\},\{3;8\},\{5;12\};\{7;16\},...,\{23;48\}$ (12 nhóm).

  + Nhóm 2 gồm $\{2;6\},\{10;22\},\{14;30\};\{18;38\}$ (4 nhóm).

  + Nhóm 3 gồm $\{25\},\{27\},\{29\};\{31\},...,\{49\}$ (13 nhóm).

  + Nhóm 4 gồm $\{26\},\{32\},\{42\};\{46\}$ (4 nhóm).

Trong mỗi nhóm A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn được nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hai số bằng nhau. Do đó A chỉ chọn được tối đa 33 số.

Mặt khác A chỉ chọn được 33 số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$\{1;3;5;...;23;2;10;14;18;25;27;29;...;49;26;32;42;46\}$$

Vậy A có thể lấy tối đa 33 tấm thẻ.

Đề số 9

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG NINH

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (3.5 điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{5\sqrt{x}+4}{x-5\sqrt{x}+4} - \dfrac{3-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$, với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 16$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $A < 1$.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 9 - \sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = -5 \\ 3x^2 = y^2 + 2xy - 4y + 3 \end{cases}$

Bài 3 (2.5 điểm).

Tìm số tự nhiên n sao cho n chỉ thỏa mãn hai trong ba tính chất sau

a) $n + 8$ là số chính phương.

b) $n - 3$ là số chính phương.

c) n chia hết cho 9

Bài 4 (7.0 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Gọi A là một điểm cố định trên nửa đường tròn(A khác B và C) và D là một điểm di động trên cung AC. Hai đoạn thẳng BD và AC cắt nhau tai M, gọi K là hình chiếu của M trên BC.

a) Chứng minh rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADK.

b) Khi D di chuyển trên cung AC(D khác C), chứng minh rằng DK luon đi qua một điểm cố định.

c) Đường thẳng qua A và vuông góc với BC cắt BD tại E. Chứng minh rằng $\dfrac{BD.EM}{AM}$ có giá trị không đổi khi D di chuyên trên cung AC(D khác A).

Bài 5 (2.0 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x + \sqrt{1 - 14x - 15x^2}$ với $-1 \le x \le \dfrac{1}{15}$.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1. Cho biểu thức $A = \dfrac{5\sqrt{x}+4}{x-5\sqrt{x}+4} - \dfrac{3-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$, với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 16$.

a) Rút gọn biểu thức A.

Với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 16$ ta có

$$A = \frac{5\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)} - \frac{3-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$
$$= \frac{5\sqrt{x}+4-\left(3-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)} = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$$

b) Tìm các giá trị của x để $A < 1$.

Với $x \ge 0; x \ne 1; x \ne 16$ ta có $A = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$. Do đó ta có

$$A < 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} < 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-4} < 0$$

Do $2\sqrt{x}+5 > 0$ nên $\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-4} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-4 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow x < 16$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $0 \le x < 16$ và $x \ne 1$ thì $A < 1$.

Bài 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 9 - \sqrt{x+3}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -3$. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 9 - \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+3} + x + 3 + x + \sqrt{x+3} - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+3}\right)^2 + x + \sqrt{x+3} - 12 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+3}+4\right)\left(x+\sqrt{x+3}-3\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x+3}+4 = 0 \\ x+\sqrt{x+3}-3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = -x-4 \\ \sqrt{x+3} = 3-x \end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{x+3} = -x-4$. Dễ thấy khi $x \ge -3$ thì $-x-4 \le -1$ và $\sqrt{x+3} \ge 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Với $\sqrt{x+3} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x+3 = \left(3-x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = -5 \\ 3x^2 = y^2 + 2xy - 4y + 3 \end{cases}$

Biến đổi rương đương phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được

$$3x^2 = y^2 + 2xy - 4y + 3 \Leftrightarrow 4x^2 = \left(x+y\right) - 4y + 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = \left(x+y\right)^2 - 4\left(x+y\right) + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2 = \left(x+y-2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = x+y-2 \\ 2x-1 = -x-y+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y-1 \\ y = 3-3x \end{array}\right.$$

+ Với $x = y - 1$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được $y^2 + y + 4 = 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Với $y = 3 - 3x$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$3x^2 - x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{97}}{6} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{97}}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{97}}{6}; y = \dfrac{5-\sqrt{97}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{97}}{6}; y = \dfrac{5+\sqrt{97}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{1+\sqrt{97}}{6}; \dfrac{5-\sqrt{97}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{97}}{6}; \dfrac{5+\sqrt{97}}{2}\right)$.

Bài 3. Giả sử ta tìm được n thỏa mãn tính chất thứ 3. Ta sẽ chứng minh n không thể thỏa mãn tính chất 1 và tính chất 2.

Thật vậy, khi n chia hết cho 9 thì suy ra n chia hết cho 3. Do đó $n + 8$ chia 3 có số dư là 2. Mà một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1. Từ đó dẫn đến $n + 8$ không phải là số chính phương. Điều này chứng tỏ n không thỏa mãn tính chất thứ nhất.

Mặt khác khi n chia hết cho 9 thì $n - 3$ chia hết cho 3. Mà do 3 không chia hết cho 9 nên $n - 3$ không chia hết cho 9. Mà một số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9. Do đó $n - 3$ không thể là số chính phương. Điều này chứng tỏ n không thỏa mãn tính chất thứ hai.

Như vậy n chỉ có thể thỏa mãn tính chất thứ nhất và tính chất thứ hai, ta đi tìm các số tự nhiên n như vậy.

Do $n + 8$ và $n - 3$ là các số chính phương nên ta có $\left\{\begin{array}{l} n + 8 = p^2 \\ n - 3 = q^2 \end{array}\right. \left(p, q \in N\right)$.

Khi đó ta có $p^2 - q^2 = 11 \Leftrightarrow \left(p-q\right)\left(p+q\right) = 11$.

Do $p, q \in N$ nên $p + q \in N; p - q \in N; p + q > p - q$. Từ đó ta được $\left\{\begin{array}{l} p + q = 11 \\ p - q = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p = 6 \\ q = 5 \end{array}\right.$.

Từ đó ta được $n = 28$. Dễ thấy $n = 28$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4 (7.0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Gọi A là một điểm cố định trên nửa đường tròn (A khác B và C) và D là một điểm di động trên cung AC. Hai đoạn thẳng BD và AC cắt nhau tai M, gọi K là hình chiếu của M trên BC.

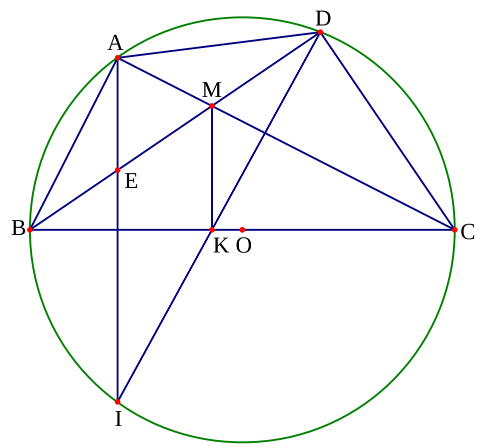
a) Chứng minh rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADK.

Tứ giác MKCD nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{MDK} = \widehat{MCK}$. Lại có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của đường tròn tâm O). Do đó ta được $\widehat{MDK} = \widehat{MDA}$ hay MD là một đường phân giác của tam giác ADK.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được AM là một tia phân giác của tam giác ADK.

Vậy M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADK.

b) Khi D di chuyển trên cung AC(D khác C), chứng minh rằng DK luôn đi qua một điểm cố định.



Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt DK tại I. Suy ra AI song song với MK, từ đó ta được $\widehat{IAC} = \widehat{KMC}$. Mà tứ giác ADCI nội tiếp nên ta có $\widehat{KMC} = \widehat{KDC}$.

Do đó ta được $\widehat{IAC} = \widehat{IDC}$ nên tứ giác ADCI nội tiếp đường tròn (O), suy ra điểm I thuộc đường tròn (O) cố định. Mà điểm I thuộc đi qua điểm A cố định và vuông góc với đường thẳng BC cố định. Do đó điểm I cố định. Vậy đường thẳng DK luôn đi qua một điểm cố định.

c) Đường thẳng qua A và vuông góc với BC cắt BD tại E. Chứng minh rằng $\frac{BD.EM}{AM}$ có giá trị không đổi khi D di chuyên trên cung AC(D khác A).

Ta có $\widehat{EAM} = \widehat{KDC}$ và $\widehat{AME} = \widehat{DKC} = \widehat{DMC}$ nên hai tam giác AEM và DCK đồng dạng với nhau.

Từ đó ta có $\frac{AM}{ME} = \frac{DK}{KC}$.

Xét hai tam giác KDB và KCA có $\widehat{KCA} = \widehat{KDB}$ và $\widehat{KAC} = \widehat{KBD}$ nên đồng dạng với nhau.

Từ đó ta lại có $\frac{DK}{KC} = \frac{BD}{CA}$. Suy ra $\frac{AM}{ME} = \frac{DB}{CA} \Rightarrow CA = \frac{BD.EM}{AM}$.

Do AC không đổi nên suy ra $\frac{BD.EM}{AM}$ có giá trị không đổi khi D di chuyên trên cung AC(D khác A).

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x + \sqrt{1 - 14x - 15x^2}$ với $-1 \le x \le \frac{1}{15}$.

Ta có $A = x + \sqrt{1 - 14x - 15x^2} = x + \sqrt{(x+1)(1-15x)}$

Do đó ta được $3A = 3x + \sqrt{9(x+1)(1-15x)}$.

Do $-1 \le x \le \frac{1}{15}$ nên ta có $9(x+1) \ge 0; 1 - 15x \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được $\sqrt{9(x+1)(1-15x)} \le \frac{9(x+1) + 1 - 15x}{2} = 5 - 3x$.

Từ đó ta được $3A \le 3x + 5 - 3x = 5 \Rightarrow A \le \frac{5}{3}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

$$9\left(x+1\right) = 1 - 15x \Leftrightarrow 24x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{5}{3}$, đạt được tại $x = -\frac{1}{3}$(thỏa mãn điều kiện xác định).

Đề số 10

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG BÌNH

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

b) Tính giá trị biểu thức $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}-\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=4$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x+y-1\right)=2y\left(y+1\right)\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

Bài 3 (1.5 điểm).

Cho x, y, z là các thực dương bất kỳ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{5x^2+6xy+5y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{5y^2+6yz+5z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{5z^2+6zx+5x^2}}{z+x+2y}$$

Bài 4 (3.5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O bán kính R có đường kính BC cố định. Lấy điểm A trên nửa đường tròn sao cho $AB>AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Đường thẳng EF cắt nửa đường tròn tại P, Q(E nằm giữa P và F).

a) Chứng minh rằng AO vuông góc với EF và $AP^2=AE.AB$. Từ đó suy ra tam giác AHP cân tại A.

b) Gọi D là giao điểm của BC với PQ, K là giao điểm của AD với đường tròn. Chứng minh rằng tứ giác AEFFK nội tiếp.

c) Đặt $BH=x$. Tính diện tích của tam giác ABH theo R và x. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác ABH có giá trị lớn nhất.

Bài 5 (1.0 điểm).

Tìm x, y nguyên dương để $P=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ là một số nguyên tố.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

• **Lời giải.** Với $x\ge 0; x\ne 1$ ta có

$$P=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$$
$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}$$
$$=\frac{3x+3\sqrt{x}-3+x-2\sqrt{x}+1+x-4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{5x+\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=-\frac{5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2}$$

b) Tính giá trị biểu thức $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$.

• **Lời giải.** Biến đổi biểu thức đã cho ta có

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6+\sqrt{35}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}-\sqrt{7}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{12+2\sqrt{35}}+\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{7}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{3}\right]^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$$

Bài 2. a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=4$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 2$. Đặt $a=\sqrt{x+2};b=\sqrt{x-2}\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$.

Khi đó dễ thấy $a^2-b^2=4$. Phương trình đã cho được viết lại thành

$$\left(a-b\right)\left(1+ab\right)=a^2-b^2\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(ab+1-a-b\right)=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(a-1\right)\left(b-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b=0\\a-1=0\\b-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=1\\b=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=\sqrt{x-2}\\\sqrt{x+2}=1\\\sqrt{x-2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta có tập nghiệm là $S=\{3\}$.

• ***Nhận xét.*** *Để ý rằng* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}>0$. *Nên phương trình đã cho tương đương với*

$$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 4\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$$
$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)=0$$

Đến đây ta có kết quả tương tự như trên.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\left(x+y-1\right)=2y\left(y+1\right)\\\sqrt{x-1}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x \ge 1; y \ge 0$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + xy - x = 2y^2 + 2y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4y^2 + xy + 2y^2 - x - 2y = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(x-y-1) = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y \\ 2\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay vào hệ phương trình ta được $(x; y) = (2; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 3. Cho x, y, z là các thực dương bất kỳ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{5x^2 + 6xy + 5y^2}}{x + y + 2z} + \frac{\sqrt{5y^2 + 6yz + 5z^2}}{y + z + 2x} + \frac{\sqrt{5z^2 + 6zx + 5x^2}}{z + x + 2y}$$

• **Lời giải.** Ta có $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4(x+y)^2 + (x-y)^2 \ge 4(x+y)^2$.

Do đó ta được $\dfrac{\sqrt{5x^2 + 6xy + 5y^2}}{x + y + 2z} \ge \dfrac{2(x+y)}{x + y + 2z}$. Áp dụng tương tự ta được

$$P \ge \frac{2(x+y)}{x + y + 2z} + \frac{2(y+z)}{y + z + 2x} + \frac{2(z+x)}{z + x + 2y}$$

Đặt $x + y = a; y + z = b; z + x = c$. Khi đó ta có

$$P \ge \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} = 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+c}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+c} \ge \dfrac{3}{2}$ (bất đẳng thức Neibitz) nên suy ra $P \ge 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được tại $x = y = z$.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O bán kính R có đường kính BC cố định. Lấy điểm A trên nửa đường tròn sao cho $AB > AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Đường thẳng EF cắt nửa đường tròn tại P, Q(E nằm giữa P và F).

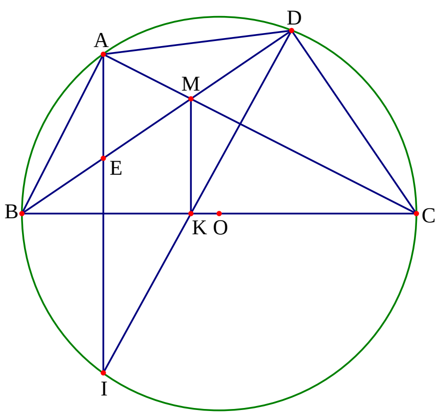
a) Chứng minh rằng AO vuông góc với EF và $AP^2 = AE.AB$. Từ đó suy ra tam giác AHP cân tại A.

+ Gọi I là giao điểm của AO và EF. Khi đó tứ giác AEHF là hình chữ nhật. Do đó ta có $\widehat{AEI} = \widehat{HAB}$ và $\widehat{EAI} = \widehat{ABH}$ nên $\widehat{AEI} + \widehat{EAI} = \widehat{HAB} + \widehat{ABH} = 90^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{AIE} = 90^0$ hay AO vuông góc với EF.

+ Xét hai tam giác ABP và APE có $\widehat{PAB}$ và $\widehat{ABP} = \widehat{APE}$ nên $\Delta ABP \backsim \Delta APE$.

Từ đó suy ra $\dfrac{AP}{AE} = \dfrac{AB}{AP}$ nên $AP^2 = AB.AE$.



Do tam giác AHB vuông tại H có HE là đường cao nên $AH^2 = AE.AB$.

Do đó ta được $AP^2 = AH^2 \Rightarrow AP = AH$ hay tam giác AHP cân tại A.

b) Gọi D là giao điểm của BC với PQ, K là giao điểm của AD với đường tròn. Chứng minh rằng tứ giác AEFFK nội tiếp.

Gọi J là giao điểm của AH và EF, khi đó trong tam giác AOD có hai đường cao DI và AH cắt nhau tại J nên J là trực tâm. Từ đó dẫn đến OJ vuông góc với AD hay OJ vuông góc với AK. Suy ra OJ lầ đường trung trực của dây AK. Lại có J là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật AEHF. Từ đó ta suy ra được $JA = JE = JF = JK$ nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFK hay từ giác AEFK nội tiếp đường tròn.

c) Đặt $BH = x$. Tính diện tích của tam giác ABH theo R và x. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác ABH có giá trị lớn nhất.

Chọn $BH = x\left(R < x < 2R\right)$. Khi đó ta có $AH = \sqrt{BH.CH} = \sqrt{x\left(2R - x\right)}$.

Do đó ta được $S_{ABH} = \frac{1}{2}AH.BH = \frac{1}{2}x\sqrt{x\left(2R - x\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S_{ABH} = \frac{1}{2}x\sqrt{x\left(2R-x\right)} = \frac{1}{2}.\sqrt{3}x.\sqrt{\frac{x}{3}.\left(2R-x\right)} \le \frac{1}{2}\sqrt{3}x.\frac{\frac{x}{3}+2R-x}{2} = \frac{1}{2}.\sqrt{3}x\left(R - \frac{x}{3}\right)$$

Mặt khác ta lại có $\frac{1}{2}.\sqrt{3}x.\left(R - \frac{x}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{x}{3}\left(R - \frac{x}{3}\right) \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{x}{3} + R - \frac{x}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Do vậy ta có $S_{ABH} \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x = \frac{3R}{2}$, khi đó A là giao điểm của đường trung trự của OC với nửa đường tròn $\left(O\right)$

Vậy tam giác ABH có diện tích lớn nhất khi A là giao điểm của đường trung trực của OC nửa đường tròn $\left(O\right)$.

Bài 5. Tìm x, y nguyên dương để $P = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ là một số nguyên tố.

• **Lời giải.** Giả sử $\left(x;y\right)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó ta có $P\left(x^2 + y^2\right) = x^2y^2$. Suy ra $Px^2 + py^2 = x^2y^2 \Rightarrow x^2\left(y^2 - P\right) = Py^2$.

Từ đó ta suy ra $Py^2 \vdots x^2$, mà P là số nguyên tố nên $y^2 \vdots x^2$ hay $y \vdots x$.

Lập luận tương tự ta cũng được $x \vdots y$. Từ đó suy ra $x = y$, thay vào đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{x^4}{x^2 + x^2} \Rightarrow x^2 = 2P \Rightarrow P \vdots 2$$

Do P là số nguyên tố nên $P = 2$, duy ra $x = y = 2$.

Vậy $\left(x;y\right) = \left(2;2\right)$ là cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đề số 11

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH BÌNH THUẬN

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (4.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x \ge 0; x \ne 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $\sqrt{A} > A$

Bài 2 (4.0 điểm).

a) Cho biểu thức $P = \frac{x}{\left(x+2017\right)^2}$ với $x > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản.

Bài 3 (4.0 điểm).

a) Tìm số thực a để phương trình sau có nghiệm nguyên $x^2 - ax + a + 2016 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy = 5\left(x+y\right) \\ 6yz = 7\left(y+z\right) \\ 8zx = 9\left(z+x\right) \end{cases}$

Bài 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} < 90^0\right)$, một đường tròn $\left(O\right)$ tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B và C. Trên cung BC nằm trong tam giác ABC lấy một điểm M tuỳ ý $\left(M \ne B; C\right)$ Gọi các điểm I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB và P là giao điểm của MB với IK. Gọi Q là giao điểm của MC với IH

a) Chứng minh các tứ giác CIMH và MPIQ nội tiếp

b) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔMPK và ΔMQH.

c) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPK và tam giác MQH. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5 (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong BM và CN cắt nhau tại I. Chứng minh rằng nếu $IM = IN$ thì tam giác ABC cân tại A hoặc góc A bằng 60^0.

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x > 0; x \ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

Với $x > 0; x \ne 1$ ta có

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1-\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+4\sqrt{x}\left(x-1\right)}{x-1}.\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}+4\sqrt{x}\left(x-1\right)}{x-1}.\frac{x-1}{\sqrt{x}}=4x$$

b) Tìm các giá trị của x để $\sqrt{A}>A$. Với $x>0; x\neq 1$ ta có $A=4x$. Khi đó

$$\sqrt{A}>A\Leftrightarrow\sqrt{x}>2x\Leftrightarrow x>2x^2\Leftrightarrow 2x^2-x<0\Leftrightarrow 2x-1<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{2}$$

Vậy với $0<x<\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{A}>A$.

Bài 2. a) Cho biểu thức $P=\frac{x}{\left(x+2017\right)^2}$ với $x>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

- **Phân tích.** Ta có $P=\frac{x}{\left(x+2017\right)^2}=\frac{x}{x^2+2.2017x+2017^2}=\frac{1}{x+\frac{2017^2}{x}+2.2017}$.

Với $x>0$ ta chuyển từ tìm giá trị lớn nhất của P sang tìm giá trị nhỏ nhất của $x+\frac{2017^2}{x}$.

- **Lời giải.** Với $x>0$ ta có $P=\frac{x}{\left(x+2017\right)^2}=\frac{x}{x^2+2.2017x+2017^2}=\frac{1}{x+\frac{2017^2}{x}+2.2017}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có $x+\frac{2017^2}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{2017^2}{x}}=2.2017$.

Do đó $P\leq\frac{1}{2.2017+2.1717}=\frac{1}{4.2017}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x=\frac{2017^2}{x}\Leftrightarrow x=2017$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4.2017}$, đạt được tại $x=2017$.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản.

- **Phân tích.** Để chứng minh phân số $\frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ là phân số tối giản ta gọi d là ước chung lớn nhất của $\left(10n^2+9n+4\right)$ và $\left(20n^2+20n+9\right)$ rồi chứng minh $d=1$.

- **Lời giải.** Gọi d là ước chung lớn nhất của $\left(10n^2+9n+4\right)$ và $\left(20n^2+20n+9\right)$.

Khi đó ta có $\begin{cases}10n^2+9n+4\,\vdots\, d\\20n^2+20n+9\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\left(10n^2+9n+4\right)\vdots\, d\\20n^2+20n+9\,\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow 2n+1\,\vdots\, d$.

Do $2n+1$ là số lẻ nên suy ra d phải là số lẻ.

Từ $\left(2n+1\right)\vdots\, d\Rightarrow\left(2n+1\right)^2\vdots\, d\Rightarrow 5\left(4n^2+4n+1\right)\vdots\, d$.

Do đó ta được $(20n^2+20n+9)-(20n^2+20n+5)\vdots d \Rightarrow 4\vdots d$. Mà d là số lẻ nên suy ra được $d=1$.

Vậy phân số $\dfrac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản.

Bài 3. a) Tìm số thực a để phương trình sau có nghiệm nguyên $x^2-ax+a+2016=0$.

• **Lời giải.** Xem phương trìn trên là phương trình bậc hai ẩn x.

Khi đó để phương trình trên có nghiệm thì ta cần có $\Delta=a^2-4(a+2016)\ge 0$.

Giả sử $x_1;x_2$ là các nghiệm nguyên. Theo định lý Vi – ét ta có $x_1+x_2=a$. Suy ra a là số nguyên.

Ta có $x^2-ax+a+2016=0 \Leftrightarrow (a-2)^2-(2x-a)^2=4.2017 \Leftrightarrow (a-x-1)(x-1)=2017$.

Do x và a là các số nguyên nên suy ra $x-1$ là ước của 2017.

Từ đó ta có $x-1\in\{-2017;-1;1;2017\} \Rightarrow x\in\{-2016;0;2;2018\}$. Ta có bảng sau

x	-2016	0	2	2018
$a=\dfrac{x^2+2016}{x-1}$	-2016	-2016	2020	2020

Thử lại ta thấy $a=-2016$ và $a=2020$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4xy=5(x+y)\\6yz=7(y+z)\\8zx=9(z+x)\end{cases}$

+ Xét trường hợp $x=0$, ta suy ra được $y=z=0$. Do đó $(x;y;z)=(0;0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

+ Xét trường hợp $x\ne 0$, khi đó ta suy ra được $y\ne 0; z\ne 0$. Ta có

$$\begin{cases}4xy=5(x+y)\\6yz=7(y+z)\\8zx=9(z+x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{7}\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{7}\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{9}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{401}{315}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{131}{315}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{121}{315}\\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{149}{315}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{315}{131}\\ y=\dfrac{325}{121}\\ z=\dfrac{315}{149}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(x;y;z)=(0;0;0),\left(\dfrac{315}{131};\dfrac{325}{121};\dfrac{315}{149}\right)$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A $(\widehat{A}<90^0)$, một đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B và C. Trên cung BC nằm trong tam giác ABC lấy một điểm M tuỳ ý $(M\ne B;C)$ Gọi các điểm I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB và P là giao điểm của MB với IK. Gọi Q là giao điểm của MC với IH.

• **Phân tích**

+ Để chứng minh các tứ giác CIMH ta chỉ ra $\widehat{CIM} + \widehat{CHM} = 180^0$ và để chứng minh MPIQ nội tiếp ta chỉ ra $\widehat{PIQ} + \widehat{PMQ} = 180^0$.

+ Để chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔMPK và ΔMQH. Ta đi chứng PQ là tiếp tuyến của mỗi tam giác trên. Do vai trò hai tam giác như nhau nên phép chứng minh tương tự. Để chứng minh PQ là tiếp tuyến của tam giác MPK ta cần phải chỉ ra được $\widehat{MPQ} = \widehat{MKI}$.

+ Để chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định thì trước hết ta dự đoán điểm cố định là trung điểm F của BC và chứng minh MN đi qua F. Để ý rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nên khi MN cắt P tại E thì E là trung điểm của PQ. Như vậy ta chỉ chần chứng minh PQ song song với BC thì bài toán được giải quyết.

- **Lời giải.**

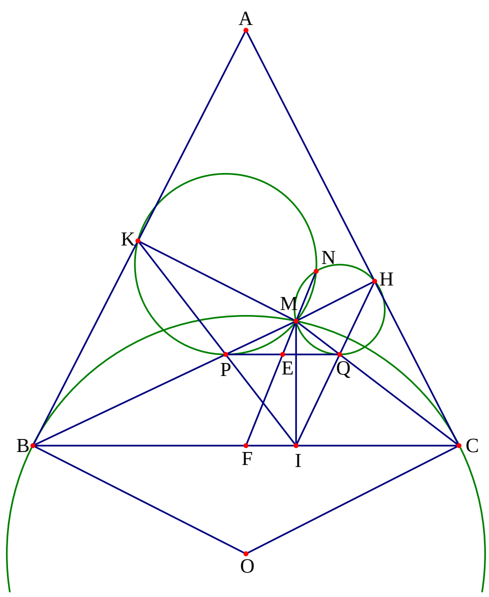
a) Chứng minh các tứ giác CIMH và MPIQ nội tiếp.

Xét tứ giác CIMH có $\widehat{CIM} + \widehat{CHM} = 180^0$ nên tứ giác CIMH nội tiếp đường tròn. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được tứ giác IMKB nội tiếp đường tròn. Do đó suy ra

$$\widehat{PIQ} = \widehat{PIM} + \widehat{QIM} = \widehat{MCH} + \widehat{KBM} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{CM} + sd\overset{\frown}{MB}\right) = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BMC}.$$

Trong đương tròn (O) có góc BMC là góc nội tiếp nên $\widehat{PMQ} = \widehat{MBC} = \frac{1}{2}\left(360^0 - sd\overset{\frown}{BMC}\right)$.

Do đó ta được



$$\widehat{PIQ} + \widehat{PMQ} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{BMC} + \frac{1}{2}\left(360^0 - sd\overset{\frown}{BMC}\right) = 180^0$$

Suy ra tứ giác PIQM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔMPK và ΔMQH.

Ta có $\widehat{MBC} = \widehat{MCH}$ (cùng chắn cung CM).

Lại do các tứ giác CHMI, PIQM, BIMK nội tiếp đường tròn.

Do đó ta có $\widehat{MIQ} = \widehat{MCH}; \widehat{MPQ} = \widehat{MIQ}; \widehat{MKI} = \widehat{MBI}$.

Từ đó suy ra $\widehat{MPQ} = \widehat{MKI} = \widehat{MBI}$ nên PQ song song với BC.

Trong đường trong ngoại tiếp tam giác MPK có $\widehat{MPQ} = \widehat{MKI}$ nên PQ là tiếp tuyến.

Chứng minh hoàn toàn tương tư ta có QP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MQH.

Vậy PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp ΔMPK và ΔMQH.

c) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPK và tam giác MQH. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MN với PQ và BC. Khi đó xét hai ta giác EPM và ENP có $\widehat{PEM}$ chung và $\widehat{MPE} = \widehat{MNP}$ (góc tao bởi tia tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung PM của đường tròn ngoại tiếp tứ goác MNKP).

Từ đó suy ra $\Delta EPM \backsim \Delta ENP$ nên ta được $\frac{EP}{EM} = \frac{EN}{EP} \Rightarrow EP^2 = EM.EN$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $EQ^2 = EM.EN$.

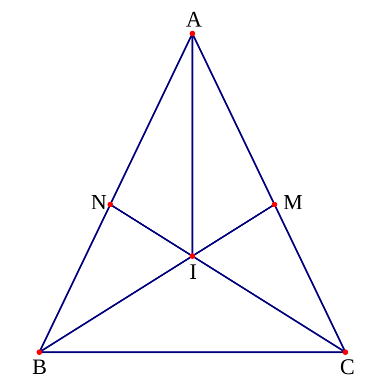
Từ đó ta được $EP^2 = EQ^2 \Rightarrow EP = EQ$ hay E là trung điểm của PQ.

Mà do PQ song song với BC nên F là trung điểm của BC. Do BC cố định nên F cố định.

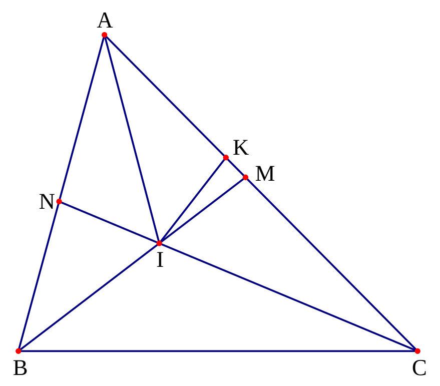
Vậy MN luôn đi qua mọt điểm cố định.

Bài 5. Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong BM và CN cắt nhau tại I. Chứng minh rằng nếu $IM = IN$ thì tam giác ABC cân tại A hoặc góc A bằng 60^0.

- **Lời giải.** Ta xét hai trường hợp sau



Trường hợp 1



Trường hợp 2

+ Trường hợp 1. Với $AM = AN$, khi đó dễ thấy $\Delta AIM = \Delta AIN$ nên ta được $\widehat{AMI} = \widehat{ANI}$.

Xét hai tam giác ABM và ACN có $\widehat{AMI} = \widehat{ANI}$, $AM = AN$ và $\widehat{MAN}$ chung.

Do đó ta được $\Delta ABM = \Delta ACN$ nên $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A.

+ Trường hợp 2. Với $AM \neq AN$, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $AM > AN$.

Trên AM lấy điểm K sao cho $AN = AK$. Dễ thấy $\Delta ANI = \Delta AKI$ nên $\widehat{ANI} = \widehat{AKI}$ và $IN = IK$.

Do đó $IM = IN = IK$ nên tam giác IMK cân tại I. Suy ra $\widehat{IKM} = \widehat{KMI}$.

Lại có $\widehat{IKM} = \widehat{INB}$ nên $\widehat{IKM} = \widehat{INB} = \widehat{KMI}$.

Ta lại có $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{ABM} - \widehat{BMA} = 180^0 - \widehat{ACN} - \widehat{ANC}$.

Do đó ta có $2.\widehat{BAC} = 360^0 - \left(\widehat{ABM} + \widehat{ACN} + \widehat{AMB} + \widehat{ANC}\right)$ hay ta được

$$2.\widehat{BAC} = 360^0 - \left(\widehat{ABM} + \widehat{ACN} + 180^0\right) = 360^0 - \left(180^0 - \widehat{BIC} + 180^0\right) = \widehat{BIC} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Suy ra $4\widehat{BAC} = 180^0 + \widehat{BAC} \Rightarrow 3\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$.

Vậy tam giác ABC cân tại A hoặc có $\widehat{BAC} = 60^0$.

Đề số 12

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH ĐĂK LĂK

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (4.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a}\left[\frac{(a-1)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}} + \frac{(a-1)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}\right]$ với $a > 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{y} = 1 \\ \frac{16}{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases}$

Bài 2 (4.0 điểm).

a) Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

b) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x) = x^2 + bx + 2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh rằng cả hai phương trình $4x^2 - 12\sqrt{10}x + b = 0$ và $4x^2 - 12\sqrt{10}x - b = 0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3 (4.0 điểm).

a) Tìm số nguyên x và y thỏa mãn phương trình $1 + 2^x = y^2$.

b) Với mỗi số tự nhiên n ta đặt $M(n) = 2^{n^2} + 2^{4n^4 - n^2 + 1}$. Chứng minh rằng số $2^{M(n)} - 8$ luôn chia hết cho 31.

Bài 4 (4.0 điểm).

Cho đường tròn tâm O và dây cung AB không phải là đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) lấy các điểm C, E sao cho các góc CIA và EIB là các góc nhọn. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C và đường thẳng EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M, các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Đường thẳng OM cắt CD tại O và ON cắt EF ại Q.

a) Chứng minh rằng tứ giác PQNM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng MN song song với AB.

Bài 5 (2.0 điểm).

Cho tam giác ABC cân tại C có góc ở đỉnh là 36^0. Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6 (2.0 điểm).

Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1 \le a \le 2; 1 \le b \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b}\right)\left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right)$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1 (4.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A=\frac{1}{a}\left[\frac{\left(a-1\right)\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\frac{\left(a-1\right)\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}\right]$ với $a>2$.

Với $a>2$ thì các căn thức của biểu thức A đều xác định. Khi đó ta có

$$A=\frac{1}{a}\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3+1}{\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}}+\frac{\left(\sqrt{a-1}\right)^3-1}{\sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)\left(a-1-\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{\left(\sqrt{a-1}-1\right)\left(a-1+\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{a-1}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{\left(\sqrt{a-1}+1\right)\left(a-1-\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{a-1}-1\right)\left(a-1+\sqrt{a-1}+1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left(a-\sqrt{a-1}+a+\sqrt{a-1}\right)=2$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}$

- **Phân tích.** Nhận thấy $x^2-3x\sqrt{y}+3\sqrt{y}=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-3\sqrt{y}+1\right)=0$ nên ta giải được hệ phương trình.
- **Phân tích.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\neq 0; y\geq 0$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\left(x-1\right)\left(x-3\sqrt{y}+1\right)=0\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x-3\sqrt{y}+1\end{array}\right.\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}$$

Ta xét các hệ phương trình sau

+ Với $\begin{cases}x=1\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 3\sqrt{y}=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{121}{9}\end{cases}$.

+ Với $\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \frac{16}{x}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ \frac{16}{3\sqrt{y}-1}-3\sqrt{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{y}-1\\ 3y+4\sqrt{y}-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có các nghiệm của hệ phương trình là $\left(x;y\right)=\left(1;\frac{121}{9}\right),\left(2;1\right)$.

Bài 2 (4.0 điểm).

a) Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

• **Lời giải.** Xét phương trình $x^2 + (2m+1)x + 3m - 1 = 0$.

Khi đó ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(3m-1) = 4(m-1)^2 + 1 > 0$. Do đó phương trình trên có hai nghiệm với mọi m.

Theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m+1) \\ x_1x_2 = 3m - 1 \end{cases}$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$ nên ta được

$$(2m+1)^2 - 2(3m-1) = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$$

Vậy với $m \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Cho số thực b thỏa mãn điều kiện đa thức $P(x) = x^2 + bx + 2017$ có giá trị nhỏ nhất là một số thực dương. Chứng minh rằng cả hai phương trình $4x^2 - 12\sqrt{10}x + b = 0$ và $4x^2 - 12\sqrt{10}x - b = 0$ đều có hai nghiệm phân biệt.

• **Phân tích.** Từ giả thiết ta được $2017 - \frac{b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow b^2 < 4.2017 \Leftrightarrow -2\sqrt{2017} < b < 2\sqrt{2017}$. Mà ta có $\Delta_1' = 360 - 4b$ và $\Delta_2' = 360 + 4b$ nên dễ thấy $\Delta_1' > 0; \Delta_2' > 0$ nên ta có điều phải chứng minh.

• **Lời giải.** Ta có $P(x) = x^2 + bx + 2017 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 2017 - \frac{b^2}{4} \ge 2017 - \frac{b^2}{4}$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của $P(x)$ là $2017 - \frac{b^2}{4}$. Theo bài ra ta được

$$2017 - \frac{b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow b^2 < 4.2017 \Leftrightarrow -2\sqrt{2017} < b < 2\sqrt{2017}$$

Phương trình $4x^2 - 12\sqrt{10}x + b = 0$ có $\Delta_1' = 360 - 4b$

Phương trình $4x^2 - 12\sqrt{10}x - b = 0$ có $\Delta_2' = 360 + 4b$

Mà $-2\sqrt{2017} < b < 2\sqrt{2017} \Rightarrow \begin{cases} 360 - 8\sqrt{2017} < 360 - 4b < 360 + 8\sqrt{2017} \\ 360 - 8\sqrt{2017} < 360 + 4b < 360 + 8\sqrt{2017} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \end{cases}$

Vậy cả hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3 (4.0 điểm).

a) Tìm số nguyên x và y thỏa mãn phương trình $1 + 2^x = y^2$.

Ta có $1 + 2^x = y^2 \Leftrightarrow 2^x = y^2 - 1 \Leftrightarrow 2^x = (y-1)(y+1)$. Khi đó tồn tại các số tự nhiên m và n thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} y+1=2^m \\ y-1=2^n \\ m+n=x \end{cases} \Rightarrow 2^m-2^n=2 \Rightarrow m=2; n=1$$

Từ đó ta tìm được $x=3; y=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Với mỗi số tự nhiên n ta đặt $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4-n^2+1}$. Chứng minh rằng số $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

• **Phân tích.** Để ý rằng $32-1=31$, do đó để chứng minh được $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31 ta cần viết được $2^{M(n)}-8=8(32^k-1)$. Điều này có nghĩa là ta phải chứng minh $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4-n^2+1}$ có dạng $5k+3\,(k\in N)$.

• **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu n là số chẵn, khi đó n^2 chia hết cho 4. Đặt $n^2=4t\,(t\in N)$, khi đó ta có $2^{n^2}=2^{4t}=16^t$.

Do 16 chia 5 dư 1 nên $2^{n^2}=2^{4t}=16^t=5k_1+1\,(k_1\in N)$. Lại có $4n^4+1-n^2=4p+1\,(p\in N)$ nên ta có $2^{4n^4+1-n^2}=2^{4p+1}=2.16^p=2(5k_2+1)=2.5k_2+2\,(k_2\in N)$.

Từ đó suy ra $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4-n^2+1}=5k+3\,(k\in N)$, do đó ta được

$$2^{M(n)}-8=2^{5k+3}-8=8.2^{5k}-8=8(32^k-1)$$

Do 32^k-1 chia hết cho 31 nên $2^{M(n)}-8$ chia hết cho 31.

+ Nếu n là số lẻ, khi đó n^2 chia 4 có số dư là 1. Đặt $n^2=4t+1\,(t\in N)$.

Khi đó ta có $2^{n^2}=2^{4t+1}=2.16^t=5k_1+2\,(k_1\in N)$. Lại có $4n^4+1-n^2=4p\,(p\in N)$ nên ta được $2^{4n^4+1-n^2}=2^{4p}=16^p=5k_2+1\,(k_2\in N)$.

Từ đó suy ra $M(n)=2^{n^2}+2^{4n^4-n^2+1}=5k+3\,(k\in N)$, do đó ta được

$$2^{M(n)}-8=2^{5k+3}-8=8.2^{5k}-8=8(32^k-1)$$

Do 32^k-1 chia hết cho 31 nên $2^{M(n)}-8$ chia hết cho 31.

Vậy $2^{M(n)}-8$ luôn chia hết cho 31.

Bài 4 (4.0 điểm). Cho đường tròn tâm O và dây cung AB không phải là đường kính. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) lấy các điểm C, E sao cho các góc CIA và EIB là các góc nhọn. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại điểm D khác C và đường thẳng EI cắt đường tròn (O) tại điểm F khác E. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại M, các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E và F cắt nhau tại N. Đường thẳng OM cắt CD tại O và ON cắt EF ại Q.

• ***Phân tích.***

+ Để chứng minh tứ giác PQNM nội tiếp đường tròn ta cần chỉ ra được $\widehat{OPQ} = \widehat{ONM}$, muốn vậy ta cần chứng minh $\frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM}$. Chú ý rằng bài toán có hai cặp tiếp tuyến cắt nhau nên nên ta sẽ sử dụng các hệ thức liên quan đến tiếp tuyến để chứng minh hệ thức trên.

+ Ta đã có AB và IO vuông góc với nhau nên để chứng minh AB và MN song song ta cần chứng minh được MN vuông góc với OI.

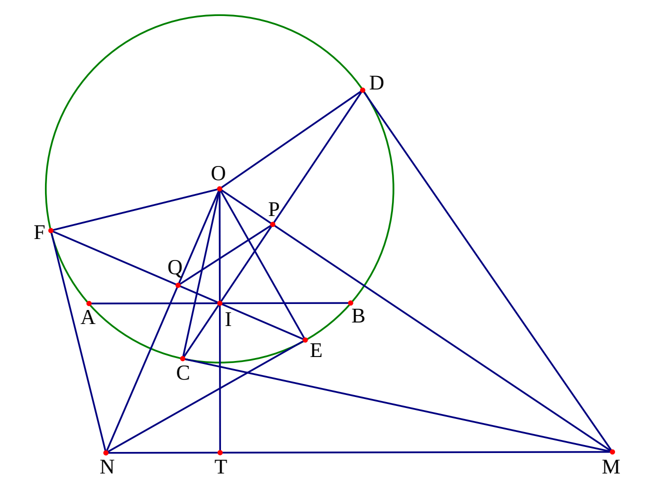
a) Chứng minh rằng tứ giác PQNM nội tiếp đường tròn.

Ta có $CO = OD$ và $MC = MD$ nên OM là đường trùn trực của CD hay ta được OM vuông góc với CD. Xét tam giác OMD vuông tại D có DP là đường cao nên $OD^2 = OP.OM$.

Chứng minh tương tự ta có $OF^2 = OQ.ON$.

Mà $OD = OF$ nên $OP.OM = OQ.ON$

Hay ta có $\frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM}$



Xét hai tam giác OPQ và ONM có $\widehat{MON}$ chung và $\frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM}$ nên $\Delta OPQ \backsim \Delta ONM$.

Từ đó suy ra $\widehat{OPQ} = \widehat{ONM}$ nên tứ giác PQNM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng MN song song với AB.

Gọi T là giao điểm của OI và MN. Tứ giác OPIQ có $\widehat{OPI} = \widehat{OQI} = 90^0$ nên tứ giác OPIQ nội tiếp được, suy ra $\widehat{QOI} = \widehat{QPI}$.

Lại có $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}$ nên suy ra $\widehat{QOI} + \widehat{ONM} = \widehat{QPI} + \widehat{OPQ} = 90^0$.

Do đó tam giác ONT vuông tại T hay $OI \perp MN$.

Mặt khác $OI \perp AB$, do đó AB và MN song song với nhau.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại C có góc ở đỉnh là 36^0. Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do tam giác ABC cân tại C nên ta có $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \frac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = \frac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$.

Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC ta được $\widehat{CBD} = \widehat{ABD} = 36^0$.

Dễ thấy tam giác BCD cân tại D và tam giác ABD cân tại B nên $AB = BC$ và $AB = BC = CD$

Đặt $AB = BC = x$ và $AB = BC = CD = a\left(x > 0; a > 0\right)$.

Do BD là phân giác của tam giác ABC nên ta có

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD + DA}{BC + AB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{x+a} \Leftrightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$$

Do $x > 0$ nên giải phương trình trên ta được $x = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)a}{2}$. Do đó $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6. Cho hai số thực a, b thay đổi sao cho $1 \le a \le 2; 1 \le b \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b}\right)\left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right)$$

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$ ta được

$$A = \left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b}\right)\left(b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right) \le \frac{1}{4}\left(a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b} + b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a}\right)^2$$

Đặt $\begin{cases} a + \frac{2}{a} = x \\ b + \frac{b}{2} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{4}{a^2} = x^2 - 4 \\ b^2 + \frac{4}{b^2} = x^2 - 4 \end{cases}$

Khi đó biểu thức A được viết lại thành $A = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + x + y - 8\right)^2$.

Do $1 \le a \le 2; 1 \le b \le 2$ nên ta có

$$\left(a-1\right)\left(a-2\right) \le 0 \Rightarrow a^2 \le 3a - 2 \Rightarrow a + \frac{2}{a} = \frac{a^2+2}{a} \le \frac{3a-2+2}{a} = 3 \Rightarrow 0 < x \le 3$$
$$\left(b-1\right)\left(b-2\right) \le 0 \Rightarrow b^2 \le 3b - 2 \Rightarrow b + \frac{2}{b} = \frac{b^2+2}{b} \le \frac{3b-2+2}{b} = 3 \Rightarrow 0 < y \le 3$$

Do đó $A = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + x + y - 8\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(3^2 + 3^2 + 3 + 3 - 8\right)^2 = 64$. Dấu bằng xẩy ra khi

$$\begin{cases} a + b^2 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b} = b + a^2 + \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a} \\ \left(a-1\right)\left(a-2\right) = 0 \\ \left(b-1\right)\left(b-2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 \\ a = b = 2 \end{array}\right.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 64, đạt được tại $a = b = 1$ hoặc $a = b = 2$.

Đề số 13

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH THANH HÓA

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (4.0 điểm).

1) Cho biểu thức $P = \left(1 + \dfrac{4}{\sqrt{x} - 1} + \dfrac{1}{x - 1}\right) : \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - 1}$ với $x > 0; x \neq 1$. Rút gọn biểu thức P.

2) Cho biểu thức $F\left(x\right) = \sqrt{x^8 + 12x + 12} - 3x$. Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Tính giá trị của $F\left(x_0\right)$

Câu 2 (4.0 điểm).

1) Cho phương trình $mx^2 + x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| > 1$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x}\left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right) = 3 \\ 2\sqrt{y}\left(1 - \dfrac{1}{x + y}\right) = 1 \end{cases}$

Câu 3 (4.0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2\left(y - 5\right) - xy = x - y + 1$

2) Tìm các số tự nhiên x, y, z đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau $x^3 + y^3 = 2z^3$ và $x + y + z$ là số nguyên tố.

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho $\widehat{ABx}$ cố định, trên tia Bx lấy điểm C sao cho $AB < AC, AB < BC$. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC lần lượt I, J, K. Tia BO cắt các đường thẳng JK, AC lần lượt tại M và D.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AOB} = 90^0 + \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ và năm điểm A, I, O, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $DK.BM = DM.BJ$ và đường thẳng JK luôn đi qua 1 điểm cố định khi điểm C di động trên tia Bx thỏa mãn giả thiết.

c) Gọi P là giao điểm của đường thẳng KI và đường thẳng BC, đường thẳng AJ cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng PN là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\left(a + b + c\right)^2}{30\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} - \frac{131\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{60\left(ab + bc + ca\right)}$$

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1 (4.0 điểm).

1) Cho biểu thức $P=\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{x-1}\right):\frac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$ với $x>0; x\neq 1$. Rút gọn biểu thức P.

• **Lời giải.** Với $x>0; x\neq 1$ ta có

$$P=\frac{x-1+4\left(\sqrt{x}+1\right)+1}{x-1}:\frac{x+2\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-1}.\frac{x-1}{x+2\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

2) Cho biểu thức $F\left(x\right)=\sqrt{x^8+12x+12}-3x$. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$.

Tính giá trị của $F\left(x_0\right)$.

• **Lời giải.** Do x_0 là nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$ nên $x_0^2-x_0-1=0\Leftrightarrow x_0^2=x_0+1$.

Do đó ta được $x_0^8=\left(x_0+1\right)^4$, $x_0^4=\left(x_0+1\right)^2$ và $x_0^2+1=x_0+2$.

Để ý rằng khi đó $3x_0+4=3x_0^2+1>0$ nên ta có

$$\begin{aligned}F\left(x_0\right)&=\sqrt{x_0^8+12\left(x_0+1\right)}-3x_0=\sqrt{\left(x_0+1\right)^4+12\left(x_0+1\right)}-3x_0\\&=\sqrt{x_0^4+4x_0^3+6x_0^2+4x_0+1+12x_0+12}-3x_0\\&=\sqrt{\left(x_0+1\right)^2+4x_0\left(x_0^2+1\right)+6x_0^2+12x_0+13}-3x_0\\&=\sqrt{x_0^2+2x_0+1+4x_0\left(x_0+2\right)+6x_0^2+12x_0+13}-3x_0\\&=\sqrt{11x_0^2+22x_0+14}-3x_0=\sqrt{2\left(x_0^2-x_0-1\right)+9x_0^2+24x_0+16}-3x_0\\&=\sqrt{\left(3x_0+4\right)^2}-3x_0=3x_0+4-3x_0=3\end{aligned}$$

Câu 2. 1) Cho phương trình $mx^2+x+m-1=0$. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$.

• **Lời giải.** Phương trình $mx^2+x+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 nên ta có

$$\Delta=1-4m\left(m-1\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leq m\leq\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1+x_2=-\frac{1}{m}; x_1.x_2=\frac{m-1}{m}$. Ta có

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1\Leftrightarrow\left|\frac{x_2-x_1}{x_1.x_2}\right|>1\Leftrightarrow\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)^2>1\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}{x_1^2.x_2^2}>1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-4x_1x_2}{x_1^2.x_2^2}>1\Leftrightarrow\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}{x_1^2.x_2^2}>1$$

Thay hệ thức Vi – et vào bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)^2-4.\frac{m-1}{m}}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2}>1\Leftrightarrow\frac{1-4m^2+4m}{(m-1)^2}>1\Leftrightarrow -5m^2+6m>0\Leftrightarrow 0<m<\frac{6}{5}$$

Kết hợp với điều kiện có nghiệm suy ra khi $0<m<\frac{6}{5}$ thì ta có $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=3\\ 2\sqrt{y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=1\end{cases}$

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\ge 0; y\ge 0; x+y\ne 0$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}1+\frac{1}{x+y}=\frac{3}{2\sqrt{x}}\\ 1-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\end{cases}$

Cộng và trừ theo vế hai phương trình của hệ trên ta được hệ $\begin{cases}2=\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\\ \frac{2}{x+y}=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\end{cases}$

Nhân theo vế hai phương trình của hệ trên ta được

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{9}{4x}-\frac{1}{4y}=\frac{4}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow 9y^2-8xy-x^2=0\Leftrightarrow (x-y)(9y+x)=0\Rightarrow x=y$$

(Do $x\ge 0; y\ge 0; x+y\ne 0$ nên $x+9y>0$)

Thay $x=y$ vào hệ phương trình ban đầu ta được $\begin{cases}2\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)=3\\ 2\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=1\end{cases}$

Ta có $2\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)=3\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{4};1\right\}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thấy $x=1$ thỏa mãn.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $(x;y)=(1;1)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu 3. 1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2(y-5)-xy=x-y+1$.

• **Lời giải.** Ta có $x^2(y-5)-xy=x-y+1\Leftrightarrow x^2(y-5)-x(y+1)+y-1=0$.

+ Nếu $y=5$ ta thu được phương trình $-6x+4=0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $y\ne 5$, khi đó xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x.

Ta có $\Delta = (y+1)^2 - 4(y-5)(y-1) = -3y^2 + 26y - 19$.

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = -3y^2 + 26y - 19 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{13-4\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{13+4\sqrt{7}}{3}$.

Do $y \in Z$ nên ta $y \in \{1;2;3;4;5;6;7\}$. Thay lần lượt các giá trị của y vào phương trình và giải phương trình ta được các cặp số nguyên thỏa mãn $(x;y) = (0;1),(1;7),(3;7)$.

2) Tìm các số tự nhiên x, y, z đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau $x^3 + y^3 = 2z^3$ và $x + y + z$ là số nguyên tố.

- **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Xét $x = 0$ khi đó ta có $y^3 = 2z^3$, suy ra $y = z = 0$ nên ta được $x + y + z = 0$ không phải là số nguyên tố.

+ Xét $y = 0$ khi đó ta có $x^3 = 2z^3$, suy ra $x = z = 0$ nên ta được $x + y + z = 0$ không phải là số nguyên tố.

+ Xét $x \geq 1; y \geq 1$. Khi đó đặt $p = x + y + z$ là số nguyên tố.

Ta có $x^3 + y^3 = 2z^3 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2z^3 = (p-z)(x^2 - xy + y^2) = 2z^3$.

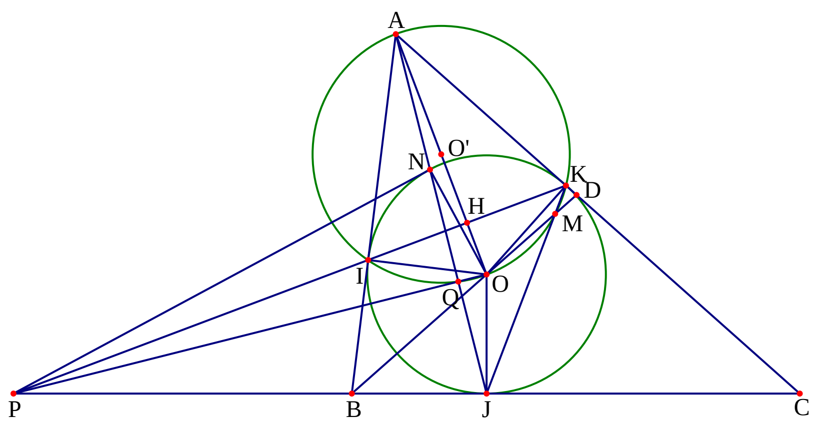
Do p là số nguyên tố nên dễ thấy $(p - z, 2z^3) = 1$. Do đó ta được $x^2 - xy + y^2 = kz^3 \left(k \in N^*\right)$.

Điều này dẫn đến $(p-z)k = 2$ hay $(x+y)k = 2 \Rightarrow x = y = k = 1$.

Từ đó ta được $z = 1$. Dễ thấy $p = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

Vậy bộ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z) = (1;1;1)$.

Câu 4 (6.0 điểm). Cho $\widehat{ABx}$ cố định, trên tia Bx lấy điểm C sao cho $AB < AC$. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC lần lượt I, J, K. Tia BO cắt các đường thẳng JK, AC lần lượt tại M và D.



a) Chứng minh rằng $\widehat{AOB} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ và năm điểm A, I, O, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

+ Ta có $\widehat{AOB} = 180^0 - \left(\widehat{OAB} + \widehat{OBA}\right) = 180^0 - \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC}}{2} = 180^0 - \frac{180^0 - \widehat{C}}{2} = 90^0 + \frac{\widehat{C}}{2}$

+ Mặt khác $\widehat{AOM} = 180^0 - \widehat{AOB} = 90^0 - \frac{\widehat{C}}{2}$. Tam giác CKJ cân tại C nên $\widehat{CKM} = 90^0 - \frac{\widehat{C}}{2}$

Tứ giác AOMD có $\widehat{AOM} + \widehat{AKM} = \widehat{CKM} + \widehat{AKM} = 180^0$ nên tứ giác AOMD nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DK.BM = DM.BJ$ và đường thẳng JK luôn đi qua 1 điểm cố định khi điểm C di động trên tia Bx thỏa mãn giả thiết.

+ Vì tứ giác AOMK nội tiếp nên dễ dàng chứng minh được $DK.DA = DM.DO$ nên $\frac{DK}{DM} = \frac{DO}{AD}$

Vì AO là tia phân giác của $\widehat{BAD}$ nên ta lại có $\frac{OD}{AD} = \frac{OB}{AB}$

Tam giác BAO đồng dạng với tam giác BMJ nên $\frac{BJ}{BM} = \frac{OB}{AB}$

Kết hợp ba kết của trên ta được $\frac{DK}{DM} = \frac{BJ}{BM}$ nên $DK.BM = DM.BJ$.

+ Ta có $\widehat{AMO} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AM \perp BD$ tại M

Mà BD cố định và A cố định nên M cố định. Vậy KJ luôn đi qua điểm M cố định.

c) Gọi P là giao điểm của đường thẳng KI và đường thẳng BC, đường thẳng AJ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng PN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Gọi Q là giao điểm của đường tròn (O') ngoại tiếp tứ giác AIOK, khi đó ta có $\widehat{AQO} = 90^0$

Xét ΔOQA và ΔOHP có $\widehat{AOP}$ chung và $\widehat{AQO} = \widehat{PHO} = 90^0$ nên $\Delta OQA \backsim \Delta OHP$.

Từ đó dẫn đến $OH.OA = OQ.OP$ mà $OH.OA = OI^2$ nên $OQ.OP = ON^2 \Rightarrow \frac{OQ}{ON} = \frac{ON}{OP}$.

Từ đó dẫn đến $\Delta OQN \backsim \Delta ONP$ nên suy ra $\widehat{PNO} = \widehat{NQO} = 90^0 \Rightarrow ON \perp PN$ tại N thuộc đường tròn (O). Do đó PN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 5 (2.0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b+c)^2}{30(a^2+b^2+c^2)} + \frac{a^3+b^3+c^3}{4abc} - \frac{131(a^2+b^2+c^2)}{60(ab+bc+ca)}$$

- **Lời giải.** Dễ dàng chứng minh được

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2-c^2-ab-bc-ca).$$

Do đó biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}&=\frac{3}{4}+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{4abc}\\&=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&\ge\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\frac{9}{ab+bc+ca}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{3}{4}+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}-\frac{9}{4}=\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Lại có $\frac{(a+b+c)^2}{30(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{30(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{30}+\frac{ab+bc+ca}{15(a^2+b^2+c^2)}$.

Do đó thu gọn và áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta suy ra được

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{1}{30}+\frac{ab+bc+ca}{15(a^2+b^2+c^2)}+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{4(ab+bc+ca)}-\frac{3}{2}-\frac{131(a^2+b^2+c^2)}{60(ab+bc+ca)}\\&=\frac{1}{30}+\frac{ab+bc+ca}{15(a^2+b^2+c^2)}+\frac{a^2+b^2+c^2}{15(ab+bc+ca)}-\frac{3}{2}\\&\ge\frac{1}{30}+2.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{15(a^2+b^2+c^2)}.\frac{a^2+b^2+c^2}{15(ab+bc+ca)}}-\frac{3}{2}=\frac{1}{30}+\frac{2}{15}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{4}{3}$, đạt được tại $a=b=c$.

Đề số 14

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH

Năm học 2016 – 2017

Bài 1.

1) Cho biểu thức $P = \dfrac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \dfrac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2) Cho biểu thức $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 2. a) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y dương, ta luôn có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x + y}$

b) Cho phương trình $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\dfrac{1 + x_1^2}{x_1} - \dfrac{1 + x_2^2}{x_2}\right)^2$

Bài 3. Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Bài 4.

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh rằng $MB + MC = MA$

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S′ lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng khi M di động ta luôn có đẳng thức

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}\left(S + 2S'\right)}{3R}$$

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$

Phân tích và hướng dẫn giải

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \dfrac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \dfrac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn biểu thức P.

Điều kiện xác định của biểu thức P là $m \geq 0; m \neq 1$. Khi đó ta có

$$P=\frac{2m+4\sqrt{m}+6+\left(\sqrt{m}-2\right)\left(\sqrt{m}+3\right)+3\left(\sqrt{m}-1\right)-2\left(m+2\sqrt{m}-3\right)}{m+2\sqrt{m}-3}$$
$$=\frac{2m+4\sqrt{m}+6+m+\sqrt{m}-6+3\sqrt{m}-3-2m-4\sqrt{m}+6}{m+2\sqrt{m}-3}$$
$$=\frac{m+4\sqrt{m}+3}{m+2\sqrt{m}-3}=\frac{\left(\sqrt{m}+1\right)\left(\sqrt{m}+3\right)}{\left(\sqrt{m}-1\right)\left(\sqrt{m}+3\right)}=\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}$$

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

Với $m\ge 0; m\ne 1$ ta có $P=\dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{m}-1}$.

Để P nhận giá trị là số tự nhiên thì $\sqrt{m}-1$ phải là ước của 2. Do đó $\sqrt{m}-1\in\{1;2\}$ nên $m\in\{4;9\}$.

Thử lại ta thấy với $m\in\{4;9\}$ thì P nhận giá trị là một số tự nhiên.

2) Cho biểu thức $P=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)-abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

- **Lời giải.** Giả sử $a+b+c$ chia hết cho 4, khi đó tồn tại số nguyên k sao cho $a+b+c=4k$.

Từ đó ta được $a+b=4k-c; b+c=4k-a; c+a=4k-b$. Thay vào P là được

$$\begin{aligned}P&=\left(4k-c\right)\left(4k-a\right)\left(4k-b\right)-abc\\&=64k^3-16k^2\left(a+b+c\right)+4k\left(ab+bc+ca\right)-abc-abc\\&=4\left[16k^3-4k^2\left(a+b+c\right)+k\left(ab+bc+ca\right)\right]-2abc\end{aligned}$$

Giả sử cả ba số a, b, c không chia hết cho hai. Khi đó a, b, c chia 2 có số dư là 1. Suy ra $a+b+c$ chia 2 có số dư là 1. Điều này mâu thuẫn với $a+b+c$ chia hết cho 4. Như vậy trong ba số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 2. Do đó $2abc$ chia hết cho 4. Từ đó suy ra P chia hết cho 4.

- ***Nhận xét.*** *Ta có biến đổi* $P=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)-abc=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-2abc$.

Do $a+b+c$ *chia hết cho 4 nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Do vậy P chia hết cho 4.*

Bài 2. a) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y dương, ta luôn có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$

- **Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x=y$.

b) Cho phương trình $2x^2+3mx-\sqrt{2}=0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\left(x_1-x_2\right)^2+\left(\dfrac{1+x_1^2}{x_1}-\dfrac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$.

- **Lời giải.** Dễ thấy $ac=-2\sqrt{2}<0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Theo hệ thức Vi – et ta có $x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}; x_1x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có

$$M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_2 + x_1^2x_2 - x_1 - x_1x_2^2}{x_1x_2}\right)^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + \frac{\left[(x_2 - x_1) + x_1x_2(x_1 - x_2)\right]^2}{x_1^2x_2^2} = (x_1 - x_2)^2\left(1 + \frac{1 - x_1x_2}{x_1x_2}\right)^2$$

$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]\left(1 + \frac{1 - x_1x_2}{x_1x_2}\right)^2$$

Thay hệ thức Vi – et vào biểu thức M ta được

$$M = \left[\left(-\frac{3m}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left(1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 m^2 + 8 + 8\sqrt{2}$$

Do $m^2 \ge 0$ nên $M = \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 m^2 + 8 + 8\sqrt{2} \ge 8 + 8\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $8 + 8\sqrt{2}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $m = 0$.

Bài 3. Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

• **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $x^2 + yz \ge 2x\sqrt{yz}$. Do đó $\frac{1}{x^2 + yz} \le \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$.

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{zx}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)$$

Ta có $\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{zx}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{xyz}$.

Mà ta lại có $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \le x + y + z$.

Do đó ta được $\frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{xyz} \le \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$.

Như vậy ta được $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + zx} + \frac{1}{z^2 + xy} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 4. 1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $MB + MC = MA$

Trên AM lấy điểm D sao cho $AD = MC$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta ADB = \Delta CMB$. Do đó ta được $BD = BM$ nên tam giác BDM cân tại B. Mà ta lại có $\widehat{BMD} = \widehat{BCA} = 60^0$ (cùng chắn cung AB). Từ đó suy ra tam giác BDM đều. Do đó $MB = MD$.

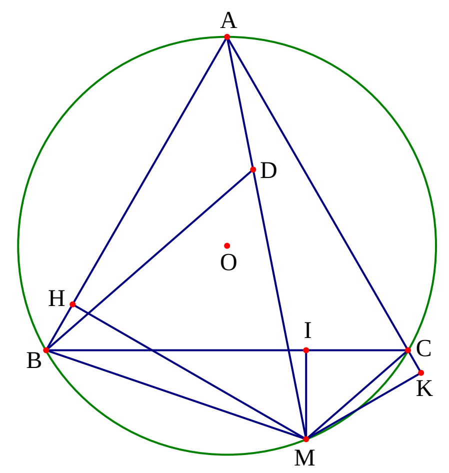
Như vậy $MB + MC = DM + AD = MA$.

b) Ta có $MH.AB + MI.BC + MK.CA$

$= S_{ABM} + 2S_{BCM} + 2S_{ACM} = 2\left(S_{ABC} + 2S_{BMC}\right)$

Từ đó ta được

$$MH.AB + MI.BC + MK.CA = 2\left(S + 2S^{'}\right)$$



Mà ta có $AB = BC = CA = a$ nên suy ra

$$a\left(MH + MI + MK\right) = 2\left(S + 2S^{'}\right) \Rightarrow MH + MI + MK = \frac{2\left(S + 2S^{'}\right)}{a}$$

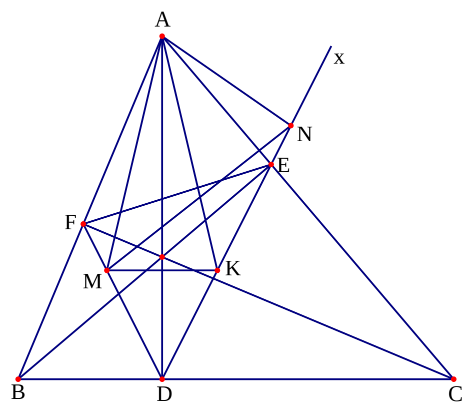
Lại có $a = R\sqrt{3}$ nên suy ra $MH + MI + MK = \dfrac{2\left(S + 2S^{'}\right)}{R\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}\left(S + 2S^{'}\right)}{3R}$

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

+ Ta có $\widehat{BDF} = \widehat{BAC} = \widehat{EDC}$. Do đó $\widehat{FDA} = \widehat{KDA}$ và MK vuông góc với AD nên suy ra tam giác AMK cân tại A

+ Lại có $\widehat{EDB} + \widehat{EAB} = 180^0$. Do MK song song với BC và kết hợp với giả thiết của bài toán ta có $\widehat{EDB} = \widehat{EKM}; \widehat{BAE} = \widehat{MAN}$ nên $\widehat{EKM} + \widehat{MAN} = 180^0$, do đó tứ giác MANK nội tiếp.



Từ các điều trên ta có $\widehat{xNA} = \widehat{AMK} = \widehat{AKM} = \widehat{ANM}$. Suy ra AN là phân giác ngoài $\widehat{DNM}$ của tam giác DNM. Kết hợp DA là phân giác $\widehat{MDN}$ suy ra A là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{MDN}$ của tam giác MDN. Vậy MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$

Đề số 15

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG NAM

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (5.0 điểm).

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1}\right)\left(x\sqrt{x}+2+\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x > 0; x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$

b) Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}$$

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a-b) = (a+1)(b+1) + 25$$

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa mãn $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Câu 4 (2.5 điểm).

Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AK. Lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC. Đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình bình hành.

Câu 5 (4.5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

a) Gọi K là giao điểm của đường thẳng EF và BC. Gọi L là giao điểm của đường thẳng AK với đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh rằng HL vuông góc với AK.

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua hai đường thẳng AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Câu 1 (5.0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2}-\dfrac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1}\right)\left(x\sqrt{x}+2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ với $x>0; x\ne\dfrac{1}{4}$.

- **Lời giải.** Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P\le\dfrac{3}{2}$.

Với $x>0; x\ne\dfrac{1}{4}$ ta có

$$P=\left[\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}-\frac{2x-5\sqrt{x}-1}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}\right].\frac{2x^2+x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\left[\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}-\frac{2x-5\sqrt{x}-1}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}\right].\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}+2\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2x-3\sqrt{x}-2-\left(2x-5\sqrt{x}-1\right)}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}+2\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-1}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}+2\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

Khi đó $P\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2\le0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+2\right)\le0\Leftrightarrow x=1$.

b) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{a^3}{c+a^2}+\frac{b^3}{a+b^2}+\frac{c^3}{b+c^2}$$

- **Lời giải.** Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$3=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\dfrac{a^3}{c+a^2}=\dfrac{a^2+ac-ac}{c+a^2}=a-\dfrac{ac}{c+a^2}\ge a-\dfrac{ac}{2a\sqrt{c}}=a-\dfrac{\sqrt{c}}{2}$.

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$A=\frac{a^3}{c+a^2}+\frac{b^3}{a+b^2}+\frac{c^3}{b+c^2}\ge a+b+c-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}$$

Cũng theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\dfrac{1}{2}\left(a+1\right)+\dfrac{1}{2}\left(b+1\right)+\dfrac{1}{2}\left(c+1\right)$.

Từ đó suy ra $A\ge a+b+c-\dfrac{\left(a+b+c\right)+3}{4}=\dfrac{3\left(a+b+c\right)-3}{4}\ge\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$, đạt được tại $a = b = c = 1$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \le x \le 1$.

Đặt $a = \sqrt{1+x}; b = \sqrt{1-x}\left(a \ge 0; b \ge 0\right)$. Khi đó ta có $a^2 = x+1; b^2 = 1-x \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$.

Lại có $ab = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1 - a^2b^2$ nên phương trình đã cho trở thành $a + b - a^2b^2 - 1 = 0$.
Kết hợp hai phương trình ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b - a^2b^2 - 1 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = a^2b^2 + 1 \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = a^2b^2 + 1 \\ \left(a^2b^2 + 1\right)^2 - 2ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = a^2b^2 + 1 \\ a^4b^4 + 2a^2b^2 - 2ab - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = a^2b^2 + 1 \\ (ab - 1)\left(a^3b^3 + a^2b^2 + 3ab + 1\right) = 0 \end{cases}$$

Do $a \ge 0; b \ge 0$ nên $a^3b^3 + a^2b^2 + 3ab + 1 > 0$. Do đó hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} a + b = a^2b^2 + 1 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x} = 1 \\ \sqrt{1-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$

• **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Xét trường hợp $y = 0$, khi đó hệ phương trình có một nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

+ Xét trường hợp $y \ne 0$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy + \dfrac{2x}{y} - 4 = -\dfrac{1}{y} \\ x^2y^2 + 2xy - \dfrac{4x}{y} + 3 = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \dfrac{2x+1}{y} - 4 = 0 \\ x^2y^2 + 2xy - \dfrac{2(2x+1)}{y} + 3 = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = xy; b = \frac{2x+1}{y}$. Khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} a + b - 4 = 0 \\ a^2 + 2a - 2b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + 2a - 2(4-a) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + 4a - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; b = 3 \\ a = -5; b = 9 \end{array}\right.$$

Với $a = 1; b = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} xy = 1 \\ \dfrac{2x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{y} \\ x(2x+1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2}; y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Với $a=-5;b=9$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} xy=-5 \\ \dfrac{2x+1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{y} \\ x\left(2x+1\right)=-45 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{1}{2};0\right),\left(1;1\right),\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên dương $\left(a;b\right)$ thỏa mãn đẳng thức

$$a^3-b^3+3\left(a^2-b^2\right)+3\left(a-b\right)=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25$$

- **Lời giải.** Phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} &\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)+\left(3a+3b\right)\left(a-b\right)+3\left(a-b\right)=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25 \\ \Leftrightarrow &\left(a-b\right)\left[\left(a^2+2a+1\right)+\left(b^2+2b+1\right)+\left(ab+a+b+1\right)\right]=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25 \\ \Leftrightarrow &\left(a-b\right)\left[\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2+\left(a+1\right)\left(b+1\right)\right]=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25 \end{aligned}$$

Đặt $x=a+1;y=b+1\left(x>0;y>0\right)$, khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$\begin{aligned} &\left(x-y\right)\left(x^2+y^2+xy\right)=xy+25 \Leftrightarrow x^3-y^3-xy=25 \\ \Leftrightarrow\ &27x^3-27x^3-27xy=675 \Leftrightarrow \left(3x\right)^3+\left(-3y\right)^3+\left(-1\right)-3.3x.\left(-3y\right).\left(-1\right)=674 \\ \Leftrightarrow\ &\left(3x-3y-1\right)\left(9x^2+9y^2+1+9xy-3y+3x\right)=674 \end{aligned}$$

Dễ thấy $9x^2+9y^2+1+9xy-3y+3x>3x-3y-1>0$ và $674=1.674=2.337$ ..

Do đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $\begin{cases} 9x^2+9y^2+1+9xy-3y+3x=674 \\ 3x-3y-1=1 \end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

+ Trường hợp 2. Với $\begin{cases} 9x^2+9y^2+1+9xy-3y+3x=337 \\ 3x-3y-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2+3xy-y+x=112 \\ 3x-3y-1=2 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $\left(x;y\right)=\left(4;3\right)$.

Từ đó ta tìm được cặp số thỏa mãn $\left(a;b\right)=\left(3;2\right)$

- ***Nhận xét.*** *Ta có thể giải bai toán trên theo các khác sau*

$$\begin{aligned} &\left(a+1\right)^3-\left(b+1\right)^3=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25 \\ \Leftrightarrow &\left[\left(a+1\right)-\left(b+1\right)\right]^3+3\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left[\left(a+1\right)-\left(b+1\right)\right]=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+25 \end{aligned}$$

Đặt: $x=\left(a+1\right)-\left(b+1\right);y=\left(a+1\right)\left(b+1\right)$. *Khi đó dễ thấy* $x>0;y>0$.

Phương trình trên được viết lại thành

$$x^3+3xy=y+25 \Leftrightarrow y\left(3x-1\right)=25-x^3 \Leftrightarrow y=\frac{25-x^3}{3x-1}$$

Do $x > 0; y > 0$ *nên* $3x - 1 > 0$*, suy ra* $25 - x^3 > 0$ *từ đó dẫn đến x nhận xác giá trị* $x \in \{1;2;3\}$

Đến đây giải tiếp ta thu được kết quả như trên.

b) Cho hai số nguyên a và b thỏa mãn $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

• **Lời giải.** Ta có $24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2$.

Ta biết rằng một số chính phương khi chia cho 5 có các số dư là 0, 1, 4.

Giả sử điều cần chứng minh là sai. Khi đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Cả hai số a và b cùng chia hết cho 5. Khi đó $a^2 + b^2$ chia hết cho 5.

Mà $25a^2 + 1$ không chia hết cho 5. Điều này vô lí, do đó không xẩy ra trường hợp cả hai số a và b cùng chia hết cho 5.

+ Trường hợp 2. Cả hai số a và b cùng không chia hết cho 5. Khi đó a^2 và b^2 chia cho 5 nhận một trong hai số dư là 1 và 4. Do đó ta được $a^2 + b^2$ chia 5 nhận một trong các số dư 0; 2; 3.

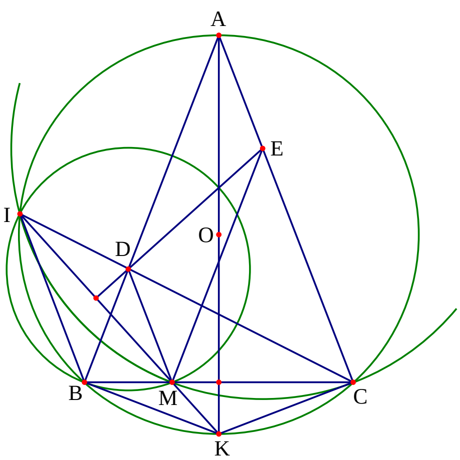
Mà $25a^2 + 1$ chia cho 5 có số dư là 1. Điều này vô lí, do đó không xẩy ra trường hợp cả hai số a và b cùng không chia hết cho 5.

Vậy trong hai số a và b chỉ có một số chia hết cho 5.

Câu 4 (2.5 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) đường kính AK. Lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC. Đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình bình hành.

• **Lời giải.** Xét hai tam giác KBM và KIB có $\widehat{BKM}$ chung và $\widehat{BIK} = \widehat{MBK}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau). Do đó $\Delta KBM \backsim \Delta KIB$ nên ta suy ra được $\dfrac{KB}{KM} = \dfrac{KI}{KB}$ nên $KB^2 = KM.KI$.

Từ đó suy ra KB là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM. Lại có KB vuông góc với BA nên đường thẳng BA chứa đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM là giao điểm của AB và đường trung trực của IM. Điều này dẫn đến D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM. Do đó $DB = DM$ hay tam giác DMB cân tại D nên ta được DM song song với AE. Do $KB = KC$ nên $KC^2 = KM.KI$, do đó CK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CIM.



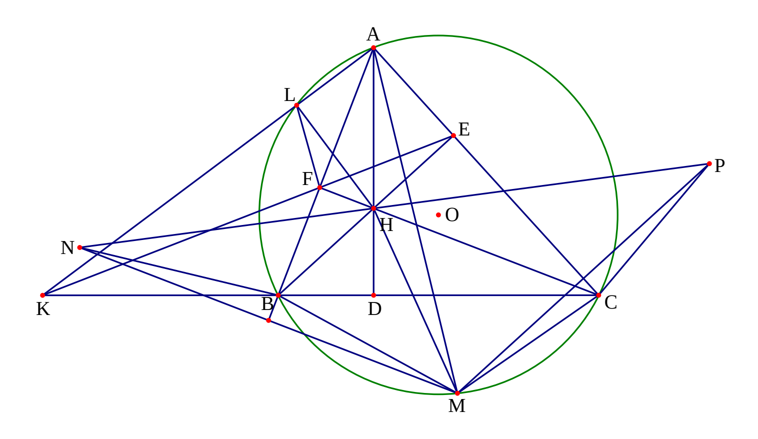
Từ đó dẫn đến E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIM nên suy ra AD song song với ME. Từ hai kết quả trên suy ra tứ giác ADME là hình bình hành

Câu 5 (4.5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

a) Chứng minh HL vuông góc với AK.

Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{KFB} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ và tứ giác ALBC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ACB} = \widehat{KLB}$. Do đó ta được $\widehat{KLB} = \widehat{KFB}$ nên KLFB nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{ALF} = \widehat{KBF} = \widehat{FHD}$ nên $\widehat{ALF} = \widehat{KBF} = \widehat{FHD}$, dẫn đến tứ giác ALFH nội tiếp.



Do đó $\widehat{ALH} = \widehat{AFH} = 90^0$ hay HL vuông góc với AK.

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua hai đường thẳng AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Ta có $\widehat{DHC} = \widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ do các tứ giác FHDB và ABMC nội tiếp

Lại có $\widehat{AMC} = \widehat{APC}$ do tính chất đối xứng.

Do đó suy ra $\widehat{DHC} = \widehat{APC}$ nên tứ giác AHCP nội tiếp

Từ đó ta được $\widehat{CHP} = \widehat{CAP} = \widehat{CAM} = \widehat{CBM}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{NHB} = \widehat{MCB}$

Mà ta lại có $\widehat{BHC} = \widehat{BMC}$ (cùng bù góc BAC)

Do đó suy ra $\widehat{CHP} + \widehat{BHC} + \widehat{NHB} = \widehat{MBC} + \widehat{MCB} + \widehat{BMC} = 180^0$

Từ đó suy ra ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Đề số 16

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG TRỊ

Năm học 2016 – 2017

Câu 1 (5.0 điểm).

Cho biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} : \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi biết $x = \sqrt[3]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$.

c) Giả sử số thực x thoả mãn $x \ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x+11 = 7\sqrt{x+1}$.

b) Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng $\dfrac{b}{\left(a+\sqrt{b}\right)^2} + \dfrac{d}{\left(c+\sqrt{d}\right)^2} \ge \dfrac{\sqrt{bd}}{ac+\sqrt{bd}}$.

Câu 3 (2.0 điểm).

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

Câu 4 (6.0 điểm).

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E; Gọi F là hình chiếu của E trên AD và G là trung điểm ED. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DGF cắt (O) tại điểm thứ hai là H $(H \ne D)$. Gọi I là giao điểm của BC và FG.

a) Chứng minh rằng tứ giác BCGF nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh rằng ba điểm D, I, H thẳng hàng

2. Bên trong hình tròn có bán kính bằng 1 chọn 7 điểm bất kí. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm trong 7 điểm đã cho có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1

Câu 5 (2.0 điểm).

1. Cho các số thực x và y. Chứng minh rằng $[x]+[y] \le [x+y] \le [x]+[y]+1$ (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x)

2. Ta gọi một bộ số nguyên tố đẹp khi tích của các số nguyên tố này bằng 10 lần tổng của chúng. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên tố đẹp nói trên (các số trong bộ không nhất thiết phải phân biệt).

Phân tích và hướng dẫn giải

Câu 1. Cho biểu thức $A = \dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} : \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

Điều kiện xác định của biểu thức A là $x > 0; x \neq 1$. Khi đó ta có

$$A = \frac{x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

b) Tính giá trị biểu thức A khi biết $x = \sqrt[3]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$. Ta có

$$x = \frac{\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^4} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}$$
$$= \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$$

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 \Leftrightarrow a^3 = 4\sqrt{2} - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a = 4\sqrt{2}$$
$$b^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3 \Leftrightarrow b^3 = 6 + 3b \Leftrightarrow b^3 - 3b = 6$$

Do đó ta được $x^3 = 24\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{\left(12\sqrt{2}+17\right)\left(12\sqrt{2}-17\right)}\left(\sqrt[3]{12\sqrt{2}+17} + \sqrt[3]{12\sqrt{2}-17}\right)$

Hay ta được $x^3 = 24\sqrt{2} - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x = 24\sqrt{2}$

$$\frac{x^6}{\left(x-1\right)^3} = \frac{\left(24\sqrt{2}-3x\right)^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{\left(24\sqrt{2}-3x\right)^2}{24\sqrt{2} - 3x^2 - 1}$$

c) Giả sử số thực x thoả mãn $x \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Ta có $A = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{15\left(x-1\right)}{16} + \frac{x-1}{16} + \frac{1}{x-1}$.

Do $x \geq 5$ nên $x - 1 > 0$, do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$A = 2 + \frac{15\left(x-1\right)}{16} + \frac{x-1}{16} + \frac{1}{x-1} \geq 2 + \frac{15\left(5-1\right)}{16} + 2.\sqrt{\frac{x-1}{16}.\frac{1}{x-1}} = 2 + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$

Dấu bằng xẩy ra khi $x = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{25}{4}$, xẩy ra tại $x = 5$

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x + 11 = 7\sqrt{x+1}$.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$. Biến đổi tương đươgn phương trình là được

$$x + 11 = 7\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 11 \geq 0 \\ \left(x+11\right)^2 = 49\left(x+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ x^2 - 27x + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 24 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; 24\right\}$.

b) Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng $\dfrac{b}{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}+\dfrac{d}{\left(c+\sqrt{d}\right)^2}\ge\dfrac{\sqrt{bd}}{ac+\sqrt{bd}}$.

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bất đẳng thức: Với x và y là các số thực dương ta luôn có

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$$

Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1+xy\right)\left[\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2\right]\ge\left(1+x\right)^2\left(1+y\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(1+xy\right)\left[2+2\left(x+y\right)+x^2+y^2\right]\ge\left[\left(xy+1\right)+\left(x+y\right)\right]^2$$
$$\Leftrightarrow\left(1+xy\right)\left[2+2\left(x+y\right)+x^2+y^2\right]\ge\left(xy+1\right)^2+\left(x+y\right)^2+2\left(xy+1\right)\left(x+y\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(1+xy\right)\left(2+x^2+y^2\right)\ge\left(xy+1\right)^2+\left(x+y\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1+xy\right)+xy\left(x^2+y^2\right)\ge\left(xy\right)^2+4xy+1\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)-\left(xy\right)^2-2xy+1\ge0$$
$$\Leftrightarrow xy\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left[\left(xy\right)^2-2xy+1\right]\ge0\Leftrightarrow xy\left(x-y\right)^2+\left(xy-1\right)^2\ge0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $x>0;y>0$.

Vậy là luôn có $\dfrac{1}{\left(1+x\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}\ge\dfrac{1}{1+xy}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x=y=1$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{c}{\sqrt{d}}+1\right)^2}\ge\frac{1}{\dfrac{ac}{\sqrt{bc}}+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\dfrac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right)^2}+\frac{1}{\left(\dfrac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{d}}\right)^2}\ge\frac{1}{\dfrac{ac+\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\dfrac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{b}}+\frac{1}{\dfrac{\left(c+\sqrt{d}\right)^2}{d}}\ge\frac{\sqrt{bd}}{ac+\sqrt{bd}}\Leftrightarrow\frac{b}{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}+\frac{d}{\left(c+\sqrt{d}\right)^2}\ge\frac{\sqrt{bd}}{ac+\sqrt{bd}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{b};c=\sqrt{d}$.

Câu 3 (2.0 điểm).

Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y\end{cases}$

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x\ge1;y\ge0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$xy+x+y=x^2-2y^2\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)=0\Leftrightarrow x=2y+1$$

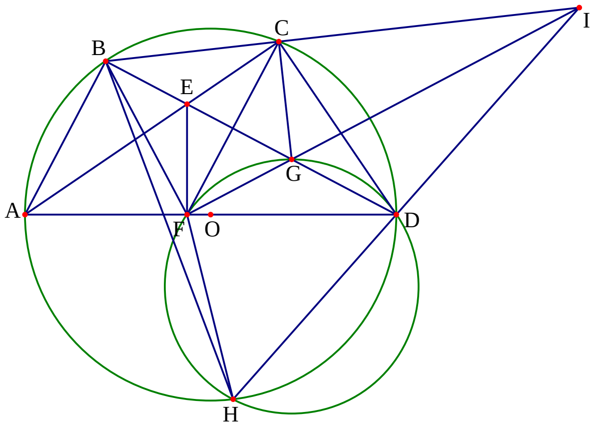
Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(2y+1\right)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2\left(2y+1\right)-2y\Leftrightarrow\left(2y+1\right)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2y+2$$
$$\Leftrightarrow\left(y+1\right)\left(\sqrt{2y}-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y+1=0\\ \sqrt{2y}-2\end{array}\right.=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1;x=-1\\ y=2;x=5\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $(x; y) = (5; 2)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu 4 (6.0 điểm).

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E; Gọi F là hình chiếu của E trên AD và G là trung điểm ED. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DGF cắt (O) tại điểm thứ hai là H $(H \neq D)$. Gọi I là giao điểm của BC và FG.



a) Chứng minh rằng tứ giác BCGF nội tiếp đường tròn.

Do tam giác EFD vuông tại F và có G là trung điểm của ED nên ta được $\widehat{BGF} = 2\widehat{EDF}$.

Lại có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ và tứ giác CDFE nội tiếp nên $\widehat{ECF} = \widehat{EDF}$ nên ta được $\widehat{BCF} = 2\widehat{BDF}$.

Do đó ta được $\widehat{BGF} = \widehat{BCF} = 2\widehat{EDF}$ nên suy ra tứ giác BCGF nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, I, H thẳng hàng.

Gọi H' là giao điểm của ID với đường tròn ngoại tiếp tam giác DFG.

Khi đó dễ dàng chứng minh được tam giác IGD và IFH' đồng dạng với nhau.

Từ đó suy ra $ID.IH' = IG.IF$.

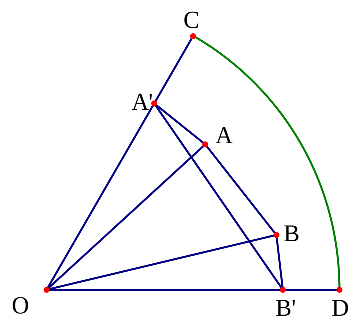
Lại do tứ giác BCGF nội tiếp nên hoàn toàn tương tự ta được $IG.IF = IC.IB$.

Từ đó ta được $ID.IH' = IB.IC$, từ đây ta suy ra được hai tam giác ICD và IH'B đồng dạng, do đó tứ giác BCDH' nội tiếp đường tròn hay H' là giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác FGD. Suy ra hai điểm H và H' trùng nhau. Điều này dẫn đến ba điểm I, D, H thẳng hàng.

2. Bên trong hình tròn có bán kính bằng 1 chọn 7 điểm bất kí. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm trong 7 điểm đã cho có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1

- Chia hình tròn thành 6 hình quạt bằng nhau, khi đó theo nguyên lí Dirichlets thì tồn tại ít nhất hai điểm cùng nằm tròn một hình quạt. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai điểm đó là A, B nằm trong hình quạt COD. Dễ thấy nếu một trong hai điểm A, B trùng với O thì bài toán được chứng minh.

Xét hai điểm A, B không trùng với O. Khi đó trên OC lấy A' sao cho $OA = OA'$. Trên OD lấy điểm B' sao cho $OB = OB'$. Từ đó ta có $A'B' \geq AB$.



Tam giác $OA'B'$ có góc $\widehat{O} = 60^0$ nên $\widehat{A'} + \widehat{B'} = 120^0$, như vậy trong hai góc $\widehat{A'}$ và $\widehat{B'}$ có một góc lớn hơn 60^0. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{A'} \geq 60^0$.

Từ đó ta được $\widehat{A'} \geq \widehat{O}$ nên suy ra $A'B' \leq OB' < OD = 1$. Như vậy $AB < 1$.

- **Nhận xét.** Nếu thay 7 điểm bằng 6 điểm kết luận của bài toán vẫn đúng.

Thật vậy ta xét hai trường hợp sau:

+ Nếu trong 6 điểm đã cho tồn tại một điểm là tâm của đường tròn, khi đó bài toán được chứng minh.

+ Nếu trong sáu điểm không có điểm nào trùng với tâm của đường tròn. Khi đó có hai khả năng xẩy ra là

- Trong sáu điểm có hai điểm cùng nằm trên một bán kính của đường tròn, khi đó bài toán được chứng minh.

- Trong sáu điểm đã cho không có hai điểm nào cùng nằm trên một bán kính. Khi đó ta vẽ sáu bán kính đi qua sáu điểm đã cho. Cứ hai bán kính gần nhau tao ra một góc ở tâm. Như vậy ta có sáu góc ở tâm. Theo nguyên lí cực hạn thì trong sáu góc đó tồn tại một góc có số đo bé nhất. Mà tổng số đo của sáu góc đó là 360^0 nên góc bé nhất không vượt quá 60^0. Không mất tnhs tổng quát ta giả sử $\widehat{COD} \leq 60^0$.

Đến đây lập luận tương tự như trên ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 (2.0 điểm).

1. Cho các số thực x và y. Chứng minh rằng $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$ (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x)

Gọi $\{x\}$ là phần lẻ của số thực xvà $[x]$ là phần nguyên của số thực x,là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Với x và y là các số thực ta có $x = [x] + \{x\}$ và $y = [y] + \{y\}$

Do đó ta được $\big[[x]+[y]\big] = \big[[x]+\{x\}+[y]+\{y\}\big] = [x]+[y]+\big[\{x\}+\{y\}\big]$

Do $0 \leq \{x\} < 1; 0 \leq \{y\} < 1$ nên suy ra $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$ do đó $0 \leq \big[\{x\}+\{y\}\big] \leq 1$

Từ đó suy ra $[x+y] \leq [x]+[y]+1$.

Mặt khác ta lại có $\big[[x]+[y]\big] = \big[[x]+\{x\}+[y]+\{y\}\big] = [x]+[y]+\big[\{x\}+\{y\}\big] \geq [x]+[y]$

Vậy ta được $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$.

2. Ta gọi một bộ số nguyên tố đẹp khi tích của các số nguyên tố này bằng 10 lần tổng của chúng. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên tố đẹp nói trên (các số trong bộ không nhất thiết phải phân biệt).

Chú ý là $10 = 2.5$ với 2 và 5 là các số nguyên tố. Do đó ta nhận thấy trong các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán có 2 và 5.

Gọi $p_1; p_2; \ldots; p_n$ các số còn lại trong bộ các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$.

Theo bài ra ta có $2.5.p_1.p_2 \ldots p_n = 10(2+5+p_1+p_2+\ldots+p_n)$

Hay ta được $p_1.p_2\ldots p_n = 7 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \ (1)$.

Nhận thấy với hai số nguyên tố a và b ta luôn có $(a-1)(b-1) \ge 1 \Rightarrow ab \ge a + b$.

Từ đó ta được $p_1.p_2\ldots p_{n-1}.p_n \ge (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1})p_n$.

Suy ra $7 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \ge (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1})p_n$

Đặt $s = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$, khi đó ta được $7 + p_n + s \ge s.p_n \Leftrightarrow (s-1)(p_n - 1) \le 8$.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $s = 2$, khi đó $n = 2$ và $p_1 = 2$. Thay vào (1) ta được $p_2 = 9$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 1: Với $s > 2$, khi đó $p_n \le 5$.

\+ Với $p_n = 5$ suy ra $s \le 3$, do đó $n = 2$ và $p_1 \in \{2;3\}$. Thử lại ta thấy $p_1 = 3$ và $p_2 = 5$ thỏa mãn.

\+ Với $p_n = 3$ suy ra $s \le 5$, do đó có bộ số nguyên tố $(p_1;p_2;\ldots;p_n)$ là $(2),(3),(2;2),(2;3),(5)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

\+ Với $p_n = 2$ khi đó ta được $2n + 7 = 2^n$, trường hợp này loại.

Vậy bộ số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(2;3;5;5)$.

Đề số 17

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TP HẢI PHÒNG

Năm học 2016 – 2017

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Cho $x = \dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P = \left(12x^2 + 4x - 55\right)^{2017}$.

b) Cho biểu thức $M = \dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{a^2 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - a\sqrt{a}}$ với $a > 0; a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \dfrac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $\left|x_1\right| + \left|x_2\right| = 8$?

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$.

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left(x_1; y_1\right)$ và $\left(x_2; y_2\right)$ thỏa mãn điều kiện $\left(x_1 + y_2\right)\left(x_2 + y_1\right) + 3 = 0$.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

b) Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

Bài 4 (3.0 điểm).

Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K. Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và điểm Q (P nằm giữa A và Q).

a) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

b) Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

Bài 5 (1.0 điểm).

Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Hướng dẫn giải

Bài 1 (2.0 điểm).

a) Cho $x = \dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P = \left(12x^2 + 4x - 55\right)^{2017}$.

- **Lời giải.** Ta có

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}\left(\sqrt{3}-1\right); \sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{5} = 1$$

Do đó ta được $x = \dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \dfrac{3-1}{1} = 2$

Thay giá trị của x vào P ta được $P = \left(12.2^2 + 4.\ 2 - 55\right)^{2017} = 1^{2017} = 1$

b) Cho biểu thức $M = \dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{a^2 - a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0; a \neq 1$. Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \dfrac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

- **Lời giải.** Với điều kiện $a > 0; a \neq 1$ thì ta có

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)} - \frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$$

$$= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}$$

Khi đó $N = \dfrac{6}{M} = \dfrac{6\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2} > 0$.

Ta thấy với $0 < a \neq 1 \Rightarrow a - \sqrt{a} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+1\right)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \dfrac{6\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2} < 2$

Do vậy ta được $0 < N < 2$. Để N có giá trị nguyên thì $N = 1$. Hay ta được

$$\frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-2\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = \sqrt{3}+2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3}+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 7+4\sqrt{3} \\ a = 7-4\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2 (2.0 điểm).

a) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

• Lời giải. Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì

$$\Delta' = m^2 - \left(m^2 - m - 6\right) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$

Ta có $|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 64 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 64$

+ Trường hợp 1. Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì ta có $x_1x_2 \geq 0$, khi đó ta được

$$\begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Khi đó $\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 64 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì ta có $x_1x_2 < 0$, khi đó ta được

$$m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

Khi đó (1) $\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 64 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4\left(m^2 - m - 6\right) = 64$

Hay ta được $m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10$ (không thỏa mãn điều kiện trên.

Vậy $m = \pm 4$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$.

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left(x_1; y_1\right)$ và $\left(x_2; y_2\right)$ thỏa mãn điều kiện

$$\left(x_1 + y_2\right)\left(x_2 + y_1\right) + 3 = 0$$

• **Lời giải.** Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được

$$x^3y^2 - x^2y^2 - 2x^2y + 2xy + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2y^2 - 2xy + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^2 - y - 3m + 1 = 0$

Để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = 1 + 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Theo đề bài $\left(x_1 + y_2\right)\left(x_2 + y_1\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0$ (do $x_1 = x_2 = 1$).

Với $m > \frac{1}{4}$, áp dụng hệ thức Vi – et cho phương trình $y^2 - y - 3m + 1 = 0$ ta có $\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1y_2 = 1 - 3m \end{cases}$

Thay vào $4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0$ ta có $5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 3 (2.0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1.

• **Lời giải.** Giả sử $a+b^2$ chia hết cho a^2b-1, khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $a+b^2=k\left(a^2b-1\right)$

Hay ta được $a+k=b\left(ka^2-b\right)$. Đặt $m=ka^2-b$ với m là một số nguyên.

Khi đó ta được $mb=a+k$. Từ đó suy ra $mb-m-b=a+k-ka^2$ hay ta được

$$mb-m-b+1=a+k-ka^2+1\Leftrightarrow\left(m-1\right)\left(b-1\right)=\left(a+1\right)\left(k+1-ka\right)$$

Do a, b, k là các số nguyên dương nên ta suy ra được $m\ge 1$.

Do đó ta suy ra được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)\ge 0$, điều này dẫn đến $\left(a+1\right)\left(k+1-ka\right)\ge 0$.

Mà ta có a là số nguyên dương nên ta suy ra được $k+1-ka\ge 0$ hay $k\left(a-1\right)\le 1$.

Mà k cũng là số nguyên dương nên từ $k\left(a-1\right)\le 1$ ta được $k\left(a-1\right)=0$ hoặc $k\left(a-1\right)=1$.

+ Nếu $k\left(a-1\right)=0$ ta suy ra được $a-1=0\Rightarrow a=1$, khi đó ta được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=2$

Do 2 là số nguyên tố nên từ $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=2$ ta được $b-1=1$ hoặc $b-1=2$. Từ đó suy ra $b=2$ hoặc $b=3$.

Do đó trong trường này ta được hai cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $a=1;b=2$ và $a=1;b=3$

+ Nếu $k\left(a-1\right)=1$, khi đó ta được $k=1;a=2$, khi đó ta được $\left(b-1\right)\left(m-1\right)=0$. Từ đây suy ra $b=1$ hoặc $m=1$.

Với $m=1$, kết hợp với hệ thức $mb=a+k$ ta suy ra được $b=3$

Do đó trong trường này ta được hai cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $a=2;b=1$ và $a=2;b=3$

Vậy các cặp số nguyên dương $\left(a;b\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(1;2\right),\left(1;3\right),\left(2;1\right),\left(2;3\right)$.

b) Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\left(c+a\right)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\left(a+b\right)^3}}\ge 1.$$

• **Lời giải.** Với x là số dương, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}\le\frac{x+1+x^2-x+1}{2}=\frac{x^2+2}{2}$$

Do đó ta được $\sqrt{\dfrac{1}{x^3+1}}\ge\dfrac{2}{x^2+2}$. Áp dụng bất đẳng thức ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\ge\frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2}=\frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}$$

Suy ra ta được $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{2a^2}{2(b^2+c^2)+2a^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2};\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

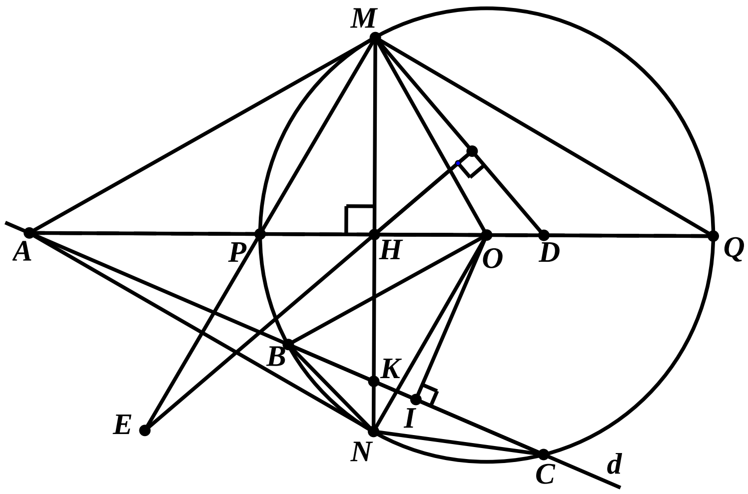
Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4 (3.0 điểm).

Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K. Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và điểm Q (P nằm giữa A và Q).



a) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

Gọi I là trung điểm của BC suy ra $IO\perp BC$.

Tam giác ABN đồng dạng với tam giác ANC (Vì $\widehat{ANB}=\widehat{ACN}$, $\widehat{CAN}$ chung) nên suy ra

$\frac{AB}{AN}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow AB.AC=AN^2$.

Tam giác ANO vuông tại N có đường cao NH nên $AH.AO=AN^2$

Từ đó suy ra $AB.AC=AH.AO$

Tam giác AHK đồng dạng với tam giác AIO nên $\frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO}\Rightarrow AI.AK=AH.AO$

Từ đó ta suy ra được $AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \dfrac{AB \cdot AC}{AI}$

Ta có A, B, C cố định nên I cố định, suy ra AK không đổi. Mà A cố định, K là giao điểm của BC và MN nên K thuộc tia AB, suy ra K là điểm cố định.

b) Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

Ta có tam giác MHE đồng dạng với tam giác QDM nên $\dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$

Tam giác PMH đồng dạng với tam giác MQH nên suy ra $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{QH} = \dfrac{MH}{2DQ}$

Từ đó ta được $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2MP$ hay P là trung điểm ME.

Bài 5. Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

- **Lời giải.** Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_{21}\}$ với $a_1;\ a_2;\ a_3; ...;\ a_{21} \in \mathbb{Z}$ và $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{21}$.

Theo giả thiết ta có $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{11} > a_{12} + a_{13} + ... + a_{21}$

Hay $a_1 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + ... + a_{21} - a_{11}$ (1)

Mặt khác với $x; y \in Z$ và nếu $y > x$ thì $y \geq x + 1$ nên $a_{12} - a_2 \geq 10,\ a_{13} - a_3 \geq 10, ..., a_{21} - a_{11} \geq 10$ (2)

Nên từ (1) suy ra $a_1 > 10 + 10 + ... + 10 = 100$, mà a_1 nhỏ nhất và $101 \in A$ nên $a_1 = 101$

Ta có $101 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + ... + a_{21} - a_{11} \geq 100 \Rightarrow a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + ... + a_{21} - a_{11} = 100$.

Kết hợp với (2) ta được $a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = ... = a_{21} - a_{11} = 10$ (3)

$\Rightarrow 10 = a_{12} - a_2 = (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + ... + (a_3 - a_2) \geq 10$

$\Rightarrow a_{12} - a_{11} = a_{11} - a_{10} = ... = a_3 - a_2 = 1$ (4)

Ta có $a_1 = 101$ mà $102 \in A \Rightarrow a_2 = 102$

Kết hợp với (3) và (4) suy $A = \{101; 102; 103; ...; 121\}$.

MỤC LỤC

Đề số	Đề thi	Trang
	TỔNG HỢP ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH – THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2015 – 2016	
1	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2015 – 2016*	
2	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Thanh Hóa năm học 2015 – 2016*	
3	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Đăk Lăk năm học 2015 – 2016*	
4	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Vĩnh Long năm học 2015 – 2016*	
5	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hà Nội năm học 2015 – 2016*	
6	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Đà Nẵng năm học 2015 – 2016*	
7	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh An Giang năm học 2015 – 2016*	
8	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hồ Chí Minh năm học 2015 – 2016*	
9	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Phú Thọ năm học 2015 – 2016*	
10	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Nam Định năm học 2015 – 2016*	
11	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Bình năm học 2015 – 2016*	
12	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bắc Giang năm học 2015 – 2016*	
13	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bắc Ninh năm học 2015 – 2016*	
14	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bình Định năm học 2015 – 2016*	
15	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hải Phòng năm học 2015 – 2016*	
16	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Hưng Yên năm học 2015 – 2016*	
17	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Nghệ An năm học 2015 – 2016*	
18	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Hà Nam năm học 2015 – 2016*	
19	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bình Phước năm học 2015 – 2016*	
20	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2015 – 2016*	
21	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Phú Yên năm học 2015 – 2016*	
22	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Lai Châu năm học 2015 – 2016*	
	TỔNG HỢP ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH – THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016 – 2017	
1	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Hải Dương năm học 2016 – 2017*	
2	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bắc Ninh năm học 2016 – 2017*	

3	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Đồng Nai năm học 2016 – 2017*	
4	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Nghệ An năm học 2016 – 2017*	
5	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Hưng Yên năm học 2016 – 2017*	
6	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Phú Thọ năm học 2016 – 2017*	
7	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hồ Chí Minh 2016 – 2017*	
8	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hà Nội 2016 – 2017*	
9	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Ninh 2016 – 2017*	
10	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Bình 2016 – 2017*	
11	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bình Thuận 2016 – 2017*	
12	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Đăk Lăk 2016 – 2017*	
13	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Thanh Hóa 2016 – 2017*	
14	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bình Định 2016 – 2017*	
15	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Nam 2016 – 2017*	
16	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Quảng Trị 2016 – 2017*	
17	*Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 thành phố Hải Phòng 2016 – 2017*	
18		
19		
20		