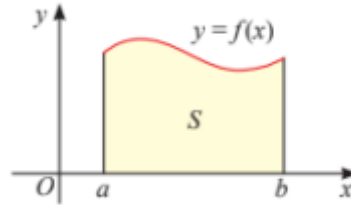


BÀI 2

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$

Chú ý:

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

Vậy
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

- Quy ước:
$$\int_a^a f(x) dx; \int_b^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

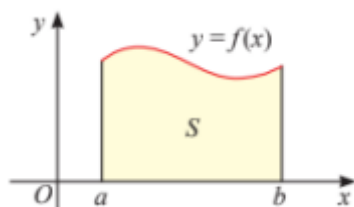
- Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào

biến x hay t , nghĩa là
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

• Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm: $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di

chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức:

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- **Tính chất 1:** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

- **Tính chất 2:** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- **Tính chất 3:** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

CHỦ ĐỀ 1

TÍNH TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

DẠNG 1

TÍNH TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM SƠ CẤP

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp	
Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
Nguyên hàm của hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
Nguyên hàm của hàm số mũ	$\int e^x dx = e^x + C$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

$$I = \int_0^2 (2x+1)dx$$

Câu 1. Tính tích phân

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

$$\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$$

Câu 2. Tích phân bằng

- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Câu 3. Tính tích phân

- A. $I = \frac{1}{e}$ B. $I = \frac{1}{e} + 1$ C. $I = 1$ D. $I = e$

$$\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c,$$

Câu 4. Biết với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 7$. B. $S = 5$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx$$

Câu 5. Tích phân bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$ B. $e^3 - e$ C. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$ D. $e^4 - e$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{a} + b \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

Câu 6. Biết . Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

- A. $P = -3$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = 3$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$$

Câu 7. Giá trị của bằng

- A. $I = 2(e+3)$ B. $I = \frac{1}{2}(e+3)$ C. $I = e - 3$ D. $I = 2(e - 3)$

$$\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 + a.e + b \ln 2 \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

Câu 8. Biết . Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

- A. $P = -3$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = -2$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Câu 9. Biết . Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a.b}$ là

- A. $P = e^4 - 1$ B. $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ C. $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$ D. $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$

D. $\frac{\pi}{2}$.

D. $P=70$

D. $P = -6$

D. $P = -6$

D. $P = 49$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

C. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

D. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên I và $a, b, c \in I$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

B. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

C. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

D. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Câu 18. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$

B. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dx$

D. $\int_a^b (f(x)g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$

Câu 19. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_{-2024}^{2024} dx = 4048$

B. $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_a^b f_2(x)dx$

C. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$.

Câu 20. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k(F(b) - F(a))$

B. $\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a; x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(2x+3) dx = F(2x+3) \Big|_a^b$

D.

Câu 21. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = e - 3$

B. $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{2} + 1$

C. $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 - e - \ln 2$

D. $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = e^4 - 1$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 22. Với a, b là các tham số thực. Tính tích phân $I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$.

Trả lời:

Câu 23. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

A. $(-1; 2)$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(0; 4)$

D. $(-3; 1)$

Trả lời:

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

Trả lời:

Câu 25. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x} \right)^2 dx$.

Trả lời:

Câu 26. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx$.

Trả lời:

$$I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$$

Câu 27. Tính

Trả lời:

$$I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$$

Câu 28. Tính

Trả lời:

$$I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$$

Câu 29. Tính

Trả lời:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$$

Câu 30. Tính

Trả lời:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

Câu 31. Tính

Trả lời:

$$\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

Câu 32. Biết . Tính giá trị của $P = a + b + c$.

Trả lời:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

Câu 33. Biết . Tính $a + b$.

Trả lời:

$$I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$$

Câu 34. Tính

Trả lời:

$$I = \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$$

Câu 35. Tính

Trả lời:

$$I = \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$$

Câu 36. Tính

Trả lời:

$$I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

Câu 37. Tính

Trả lời:

DẠNG 2

TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

$$I = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Tính tích phân: ?

Phương pháp

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích

$$I = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

phân đã học để tính

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Câu 38. Giá trị của bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^2 |x - 2| dx$$

Câu 39. Tính tích phân

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

$$I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$$

Câu 40. Tính tích phân

A. $I = -\frac{1}{2}$.

B. $I = 5$.

C. $I = \frac{1}{2}$.

D. $I = \frac{5}{2}$.

Câu 41. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

A. $I = -2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 5$.

D. $I = -4$.

Câu 42. Cho tích phân

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$$

với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính

$P = a + b$.

A. $P = \frac{40}{3}$

B. $P = \frac{80}{3}$

C. $P = \frac{17}{3}$

D. $P = \frac{98}{3}$

Câu 43. Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

A. $I = 38$.

B. $I = 44$.

C. $I = 48$.

D. $I = 40$.

Câu 44. Cho tích phân

$$I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$$

với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $P = 15$

B. $P = 10$

C. $P = 5$

D. $P = 18$

Câu 45. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$$

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2 \ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 46. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^2 (|x| - |x-1|) dx$$

A. $I = 0$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -3$.

Câu 47. Cho a là số thực dương, tính tích phân

$$I = \int_{-1}^a |x| dx \text{ theo } a.$$

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Câu 48. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn

$$\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$$

. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_1^1 |x|^3 dx = \left| \int_1^1 x^3 dx \right|$.

B. $\int_1^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_1^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_2^3 |e^x (x+1)| dx = \int_2^3 e^x (x+1) dx$

D. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$

$$I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$$

Câu 50. Tính tích phân

A. $I = \frac{5}{2}$

B. $I = -\frac{1}{2}$

C. $I = -2$

D. $I = \frac{1}{2}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

Câu 51. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_{-1}^2 |x^2 - 2x + 3| dx$$

Câu 52. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$$

Câu 53. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$$

Câu 54. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$$

Câu 55. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$$

Câu 56. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

Câu 57. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Câu 58. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$$

Câu 59. Tính tích phân

Trả lời:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$$

Câu 60. Tính tích phân

Trả lời: