

Sở giáo dục và Đào tạo Thanh hóa

TRƯỜNG THPT Hàm Rồng

-----□□□□-----

Sông kiển kinh nghiệm

**NGHIÊN CỨU MỆT SẼ SAI LẠM KHI GIẢI TOÁN
VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ**

Giáo viên: Lê Thị Thủy

Chức vụ: Giáo viên

SKKN (thuộc lĩnh vực môn): Toán

Thanh hóa - 2016

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU.....	2
1.1 Lý do chọn đề tài:.....	2
1.2 Mục đích nghiên cứu:.....	2
1.3 Đối tượng nghiên cứu:.....	3
1.4 Phương pháp nghiên cứu:.....	3
2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.....	4
2.1. Sai lầm do không nắm vững các khái niệm, các công thức, tính chất, vị trí tương đối giữa các hình.....	4
2.2 Sai lầm không xét hết các trường hợp của bài toán.....	8
2.3 Sai lầm không thử lại kết quả.....	11
2.4. Sai lầm khi định dạng các hình do nắm tính chất hình không vững.....	12
2.5 Sai lầm khi sử dụng lời giải không chính xác.....	13
3. KẾT LUẬN.....	16
3.1 Kết quả thực nghiệm.....	16
3.1.1 Kết quả kiểm tra.....	16
3.1.2 Kết quả chung.....	16
3.2 Bài học kinh nghiệm.....	16
3.3 Kết luận.....	16
3.3.1 Ưu điểm.....	16
3.3.2 Nhược điểm:.....	17
3.3.3 Hướng phát triển.....	17
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	18

1. MỞ ĐẦU

1.1 Lý do chọn đề tài:

Trong giai đoạn hiện nay, mục tiêu đào tạo của nhà trường phổ thông Việt Nam đã được cụ thể hoá trong các văn kiện của Đảng, đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ VIII Đảng Cộng Sản Việt Nam và kết luận của hội nghị trung ương khoá IX, mục tiêu này gắn với chính sách chung về giáo dục và đào tạo “ Giáo dục và đào tạo gắn liền với sự phát triển kinh tế, phát triển khoa học kĩ thuật xây dựng nền văn hoá mới và con người mới...” “Chính sách giáo dục mới hướng vào bồi dưỡng nhân lực, nâng cao dân trí, bồi dưỡng nhân tài, hình thành đội ngũ lao động có trí thức, có tay nghề...”

Chương trình hình học lớp 10, học sinh được học về vectơ, các phép toán về vectơ dùng làm phương tiện trung gian để chuyển những khái niệm hình học cùng những mối quan hệ giữa những đối tượng hình học sang những khái niệm đại số và quan hệ đại số. Với ý nghĩa như vậy, có thể coi phương pháp vectơ và tọa độ là phương pháp toán học cơ bản được kết hợp cùng phương pháp tổng hợp để giải toán hình học trong mặt phẳng và trong không gian.

Trong số các công trình nghiên cứu về sai lầm của các học sinh trong giải toán thì số công trình đề cập tới các sai lầm của học sinh trong giải toán vectơ và tọa độ còn tương đối ít.

Với các lí do nêu trên, đề tài được chọn là: ***”Nghiên cứu một số sai lầm khi giải Toán vectơ và tọa độ”***

1.2 Mục đích nghiên cứu:

- Giúp học sinh khắc phục được một số sai lầm khi giải toán vectơ và tọa độ.

Có thể nói, trong sách giáo khoa chỉnh lý hiện hành, vectơ và tọa độ là phương pháp chủ đạo trong giải toán hình học, mức độ yêu cầu của tư duy rất cao, vì nhiều bài toán không cần đến hình vẽ, và có bài cũng không thể vẽ tường minh được. Đây cũng là một khó khăn đối với học sinh.

Hệ thống lý thuyết về vector và toạ độ trong chương trình cũng khá đầy đủ để giải quyết hầu hết các dạng toán cơ bản. Tuy vậy, hệ thống bài tập còn chưa đầy đủ. Cũng có thể do thời gian phân phối cho môn học, do yêu cầu giảm tải của chương trình. Nhưng đây cũng chính là một mâu thuẫn trong thực hành kỹ năng và phương pháp cho học sinh. Vì trong các kỳ thi Đại học, Cao đẳng gần đây, bài tập về phần hình học cũng không phải dễ lắm, dạng bài tập cũng có điều mới lạ so với dạng bài tập sách giáo khoa.

1.3 Đối tượng nghiên cứu:

Đối tượng nghiên cứu trong đề tài là học sinh khối 10 và 12 qua các năm giảng dạy từ trước đến nay.

Về các đường bậc hai như đường tròn và cônic, các khái niệm và tính chất khá phức tạp khi giải toán, học sinh dễ sa vào con đường phức tạp hoá bài toán nếu nhìn nhận theo góc độ thông thường, cần phải kết hợp linh hoạt được tính chất của hình học phẳng đã học ở bậc THCS thì bài toán mới gọn nhẹ.

Cũng vì các lý do trên, nên học sinh thường gặp các sai lầm trong khi giải toán bằng phương pháp vector và toạ độ. Chỉ rõ cho các em được những sai lầm này cũng là một cách để các em nắm lý thuyết vững hơn và hạn chế các sai lầm trong giải toán; góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn toán ở trường phổ thông.

1.4 Phương pháp nghiên cứu:

Phương pháp nghiên cứu là xây dựng cơ sở lý thuyết, thống kê đưa ra các bài toán tổng quát.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

NHỮNG SAI LẦM GẶP CỦA HỌC SINH SAU KHI GIẢI TOÁN VECTO VÀ TỌA ĐỘ

2.1. Sai lầm do không nắm vững các khái niệm, các công thức, tính chất, vị trí tương đối giữa các hình.

Ví dụ 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng sau:

$$(d): 3x+y+3=0 \text{ và } (d'): -x-2y+1=0.$$

Giải: Đường thẳng (d) có chỉ phương $u_d=(1,-3)$

Đường thẳng (d') có chỉ phương $u_{d'}=(-2,1)$

$$\text{Góc giữa } u_d \text{ và } u_{d'} \text{ là } \cos(u_d, u_{d'}) = \frac{-u_d \cdot u_{d'}}{|u_d| \cdot |u_{d'}|} = \frac{1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (d, d') = 135^\circ.$$

Nhận xét: Sai lầm ở chỗ là đã đồng nhất góc giữa hai vector chỉ phương với góc giữa hai đường thẳng. Hơn nữa chưa nắm vững khái niệm góc giữa hai đường thẳng là không tù.

Lời giải đúng: Làm tương tự trên với công thức:

$$\cos(d, d') = |\cos(u_d, u_{d'})| = \frac{|-u_d \cdot u_{d'}|}{|u_d| \cdot |u_{d'}|} = \frac{|1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1|}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d, d') = 45^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC , biết $A=(1,1)$, $B=(-1,-1/2)$, $C=(4,-3)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

$$\text{Giải: Ta có phương trình AB: } \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}-1} \Leftrightarrow 3x-4y+1=0$$

$$\text{Phương trình AC: } \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{-3-1} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0$$

$$\text{Phương trình hai đường phân giác góc A là: } \frac{3x-4y+1}{\sqrt{9+16}} = \pm \frac{4x+3y-7}{\sqrt{16+9}}$$

Vì phân giác trong góc A, nên chọn dấu âm, do đó phương trình phân giác trong góc A là: $7x-y-6=0$.

Nhận xét: Cách giải trên được đáp số đúng, nhưng suy luận phân giác trong góc A, nên lấy dấu âm là chưa chính xác.

Cách giải đúng:

Cách 1: Ta có phương trình AB : $3x - 4y + 1 = 0$

AC : $4x + 3y - 7 = 0$

Phương trình các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A có phương trình:

$$\frac{3x - 4y + 1}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{4x + 3y - 7}{\sqrt{16 + 9}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 8 = 0 & (d1) \\ 7x - y - 6 = 0 & (d2) \end{cases}$$

Thay tọa độ của B, C lần lượt vào vế trái của (d1) thì ta được:

$$-1 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = -\frac{25}{2} < 0, \quad 4 + 7(-3) - 8 = -25 < 0$$

Ta có B, C nằm cùng phía đối với d1 $\Rightarrow$ d1 là phân giác ngoài $\Rightarrow$ d2 là phân giác trong.

Vậy phương trình phân giác trong góc A là: $7x - y - 6 = 0$.

Cách 2: Gọi D=(x,y) là chân phân giác trong góc A thì ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

(vì là phân giác trong nên hai vectơ này ngược chiều, nếu là phân giác ngoài thì 2 vectơ này cùng chiều)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = -\frac{1}{2}(4 - x) \\ -\frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2}(-3 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } D = (2/3, -4/3).$$

Phương trình phân giác trong góc A là AD: $\frac{x - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{y - 1}{-\frac{4}{3} - 1} \Leftrightarrow 7x - y - 6 = 0$.

Cách xác định chân đường phân giác trong này còn rất hữu hiệu trong không gian, vì viết phương trình phân giác trong không gian khá phức tạp.

Ví dụ 3 : Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương

$$\text{trình là : } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1} \text{ và } \begin{cases} x=2-3t \\ y=3+2t \\ z=2+5t \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng d biết d đi qua $M(2; 1; 1)$, vuông góc với d_1 , cắt d_2 .

Giải: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(2; 1; 1)$ và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (P)$ có phương trình là : $3(x-2)+2(y-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-9=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; 1; 1)$ và chứa d_2 . (P) có phương trình là :

$8x-3y+6z-19=0$. Ta có $d=(P) \cap (Q)$ nên d có phương trình là :

$$\begin{cases} 3x+2y+z-9=0 \\ 8x-3y+6z-19=0 \end{cases}$$

Nhận xét: Lời giải trên chưa chứng tỏ được điều kiện d cắt d_2 . Thực tế không tồn tại đường thẳng thỏa mãn bài ra vì d song song với d_2 . Lời giải trên là đầy đủ nếu đề bài có ngụ ý tồn tại duy nhất đường thẳng d , tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chưa chứng tỏ chắc chắn rằng d tồn tại và d cắt d_2 , có thể $d // d_2$ trong mp (Q) hoặc $(P) \cap (Q)$.

Lời giải đúng:

Cách 1: Sau khi tìm được (P) và (Q) như trên, xét đường thẳng d có phương

$$\text{trình } \begin{cases} 3x+2y+z-9=0 \\ 8x-3y+6z-19=0 \end{cases}, \text{ đường thẳng này có véc tơ chỉ phương } \vec{u} = 5(-3; 2; 5) = 5\vec{v},$$

trong đó $\vec{v}(-3; 2; 5)$ là véc tơ chỉ phương của d_2 , mặt khác điểm $N(2; 3; 2) \in d_2$

nhưng $N \notin d$, vậy $d // d_2$ nên bài toán vô nghiệm.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(2; 1; 1)$ và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (P)$ có phương trình là : $3(x-2)+2(y-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-9=0$.

$$\text{Gọi } N = d_2 \cap (P), \text{ để tìm tọa độ của } N, \text{ ta giải hệ } \begin{cases} 3x+2y+z-9=0 \\ x=2-3t \\ y=3+2t \\ z=2+5t \end{cases} \Rightarrow 0.t = -3 \Rightarrow \text{hệ vô}$$

nghiệm $\Rightarrow d_2 // (P)$

$\Rightarrow$ bài toán vô nghiệm

Ví dụ 4: (Đề thi đại học khối D-2002): Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng

$$(P) : 2x-y+2=0 \text{ và đường thẳng } d_m : \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m-1=0 \\ mx + (2m+1)z + 4m+2=0 \end{cases}$$

(m là tham số). Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Giải: Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2; -1; 0)$. Đường thẳng d_m có véc tơ chỉ phương $\vec{u}((1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-m))$. Suy ra $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3(2m+1)$.

$$d_m \text{ song song } (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Nhận xét: Đáp số tuy đúng nhưng lời giải trên chưa chính xác, việc lập luận d_m song song (P) $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ là sai, đây chỉ là điều kiện cần.

$$\text{Lời giải đúng: } d_m \text{ song song } (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \exists A \in d_m, A \notin (P) \end{cases}$$

Điều kiện $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. Mặt khác khi $m = -\frac{1}{2}$ thì d_m có phương trình $\begin{cases} y-1=0 \\ x=0 \end{cases}$, mọi điểm $A(0; 1; a)$ của đường thẳng này đều không nằm trong (P) nên điều kiện $\exists A \in d_m, A \notin (P)$ được thỏa mãn.. Đáp số $m = -\frac{1}{2}$

Ví dụ 5 : Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 lần lượt

$$\text{có phương trình là : } \frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{1}; \quad \frac{x-6}{1} = \frac{y-10}{-1} = \frac{z+8}{2}.$$

Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1, d_2 .

Giải: d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(2; -4; 0)$

d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{v}(1; -1; 2)$ và đi qua điểm $B(6; 10; -8)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với $d_2 \Leftrightarrow$ (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{v}(1; -1; 2)$ và đi qua điểm $A(2; -4; 0)$ nên có phương trình là

$$(x-2)-(y+4)+2z=0 \Leftrightarrow x-y+2z-6=0$$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d_2 và vuông góc với $d_1 \Leftrightarrow$ (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{u}(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $B(6; 10; -8)$ nên có phương trình là

$$-(x-6)+2(y-10)+(z+8)=0 \Leftrightarrow x-2y-z+6=0$$

Gọi d là đường vuông góc chung của d_1, d_2 , ta có $d = (P) \cap (Q)$ nên d có phương trình là :

$$\begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ x - 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Lời giải trên hoàn toàn sai lầm khi cho rằng: (P) là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với $d_2 \Leftrightarrow (P)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{v}(1; -1; 2)$ và đi qua điểm A, (Q) là mặt phẳng chứa d_2 và vuông góc với $d_1 \Leftrightarrow (Q)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{u}(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm B. Điều này chỉ đúng khi $d_1 \perp d_2$, thực tế mp (P) vuông góc với d_2 và d_1 cắt (P) tại A, mp (Q) vuông góc với d_1 và d_2 cắt (Q) tại B.

Lời giải đúng:

Gọi d là đường vuông góc chung của d_1, d_2 ; $M = d_1 \cap d$; $N = d_2 \cap d$. Vì $M \in d_1$, $N \in d_2$ nên $M(2-t_1; 2t_1-4; t_1)$, $N(t_2+6; 10-t_2; 2t_2-8)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6t_1 - t_2 + 16 = 0 \\ t_1 + 6t_2 - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(0; 0; 2), N(10; 6; 0) \Rightarrow d \text{ có phương trình là } \begin{cases} x = 5t \\ y = 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

2.2 Sai lầm không xét hết các trường hợp của bài toán

Ví dụ 6: Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua điểm $A=(0,3)$ và tạo với đường thẳng (d): $x-y=0$ một góc 45° .

Giải: Giả sử (Δ) có hệ số góc k, qua $A=(0,3)$ nên có dạng: $y=kx+3$

$$\Leftrightarrow kx - y + 3 = 0.$$

(Δ) có vectơ chỉ phương $u_\Delta = (1, k)$, (d) có chỉ phương $u_d = (1, 1)$.

Vì góc giữa hai đường thẳng là 45° nên ta có $\cos(d, \Delta) = |\cos(u_d, u_\Delta)|$

$$\Leftrightarrow \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_\Delta|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|1 - k|}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình } (\Delta): y - 3 = 0.$$

Nhận xét: Ta dễ thấy thiếu trường hợp (Δ): $x = 0$. Vậy sai lầm ở đâu?

Đã xét chưa hết các trường hợp của đường thẳng (Δ), trường hợp (Δ) không có hệ số góc và qua $A=(0,3)$ là $x=0$ thoả mãn bài toán.

Nhưng nếu xét hai trường hợp của (Δ) như vậy trong trường hợp tổng quát là phức tạp, vì việc kiểm tra góc giữa hai đường thẳng không đơn giản như trường hợp trên. Ta có thể giải bài toán tổng quát hơn như sau:

Giả sử (Δ) có vectơ chỉ phương $u_{\Delta}=(m,n)$, với $m^2+n^2 \neq 0$. Ta có:

$$\cos(d,\Delta)=|\cos(u_d, u_{\Delta})| \Leftrightarrow \frac{|u_d \cdot u_{\Delta}|}{|u_d| \cdot |u_{\Delta}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+n^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m \cdot n = 0$$

- Chọn $m=1, n=0$ có $(\Delta): y-3=0$

- Chọn $m=0, n=1$ có $(\Delta): x=0$

Ví dụ 7: Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ qua điểm $A=(5,0)$.

Giải: Đường tròn (C) có dạng chính tắc: $(x-2)^2+(y-1)^2=9 \Rightarrow$ Tâm $I=(2,1)$, $R=3$.

Giả sử tiếp tuyến (Δ) có hệ số góc k , qua $A=(5,0)$ nên có dạng: $y=k(x-5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow kx-y-5k=0$. Để tiếp xúc (C) thì: $d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|k \cdot 2 - 1 - 5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow |3k + 1| = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

$\Leftrightarrow k=4/3 \Rightarrow$ Phương trình $(\Delta): 4x-3y-20=0$.

Nhận xét: Cũng tương tự bài trên, không xét hết các dạng của (Δ) .

Lời giải đúng:

Cách 1: Ta thấy $IA^2=10>9=R^2 \Rightarrow A$ ngoài (C), nên có 2 tiếp tuyến qua A đến (C).

Làm như trên được $(\Delta_1): 4x-3y-20=0$, do nhận xét trên tiếp tuyến thứ hai qua A không có hệ số góc là $(\Delta_2): x=5$.

Cách 2: Tổng quát

- Trường hợp (Δ) có dạng $x=x_0 \Leftrightarrow x-x_0=0$, qua A: $x-5=0$

Để tiếp xúc (C) thì $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow |5-2|=3$, đúng $\Rightarrow x-5=$ là tiếp tuyến

- Trường hợp (Δ) có hệ số góc k làm như trên.

Ví dụ 8: Cho hai điểm $A=(0,0)$ và $B=(1,2)$, đường thẳng (d): $x-y+2=0$. Tìm điểm C trên (d) sao cho ΔABC vuông.

Giải: Nhiều học sinh khi giải bài toán này đã không xét hết các trường hợp. Chẳng hạn chỉ xét vuông tại C.

(d) có dạng tham số là: $x=t, y=t+2$. Điểm $C \in (d)$ nên $C=(t,t+2)$.

Để tam giác vuông tại C thì: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (0-t)(1-t) + (0-t-2)(2-t-2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1/2$$

$\Rightarrow$ Có hai điểm C thỏa mãn là: $C=(0,2)$ và $C=(-1/2, 3/2)$.

Nhận xét: Thiếu các trường hợp vuông tại A và B

Lời giải đúng: Xét các trường hợp:

- Tam giác vuông ở C: Làm như trên.

- Tam giác vuông ở A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (1-0)(t-0) + (2-0)(t+2-0) = 0 \Leftrightarrow t = -4/3$
 $\Rightarrow C = (-4/3, 2/3)$.

- Tam giác vuông tại B: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (0-1)(t-1) + (0-2)(t+2-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1/3$
 $\Rightarrow C = (1/3, 5/3)$.

Ví dụ 9: Cho hai điểm $A=(4;5)$ và $B=(-2;-7)$, đường thẳng (d): $3x-y-4=0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho ΔMAB cân.

Giải: Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm. $M \in (d) \Rightarrow 3x-y-4=0 \Rightarrow y=3x-4 \Rightarrow M(x; 3x-4)$.
 ΔMAB cân tại M khi $MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2 \Leftrightarrow (4-x)^2 + (9-3x)^2 = (-2-x)^2 + (-3-3x)^2 \Leftrightarrow 84x=84 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow M(1;-1)$

Nhận xét: lời giải trên vừa thiếu, vừa sai.

Bài toán yêu cầu tìm $M \in (d)$ để ΔMAB cân. Phải xét ba trường hợp ΔMAB cân lần lượt tại đỉnh M, A, B. Ngay trong trường hợp ΔMAB cân tại đỉnh M thì $MA=MB$ mới chỉ là điều kiện, chứ chưa đủ. Thấy ngay điểm M (1;1) chính là trung điểm của AB nên không thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $P(3;0)$ và hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình là: $2x-y-2=0$; $x+y+3=0$. Gọi d là đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt ở A và B. Viết phương trình đường thẳng d biết $PA=PB$.

Giải: Giả sử $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, do $A \in d_1, B \in d_2$ nên $y_1=2x_1-2, y_2=x_2-2$. Vì $PA=PB$ và A, B, C thẳng hàng nên P là trung điểm của AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ (2x_1 - 2) + (x_2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{3} \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Suy ra $A(\frac{11}{3}; \frac{16}{3})$, $B(\frac{7}{3}; -\frac{16}{3})$, từ đó có phương trình đường thẳng cần tìm là $y=8(x-3)$.

Nhận xét : Lời giải trên đã bỏ sót nghiệm, thực ra còn có đường thẳng nữa có phương trình là $4x-5y-12=0$. Nguyên nhân sót nghiệm là ở điều kiện : $PA=PB$ và A, B, C thẳng hàng suy ra được P là trung điểm của AB hoặc $A \equiv B$. Trường hợp $A \equiv B$ ta có đường thẳng $4x-5y-12=0$.

2.3 Sai lầm không thử lại kết quả

Ví dụ 11: Trong không gian với hệ tọa độ oxy, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z-16=0$ đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$ và đường thẳng d_2

$\left\{ \begin{array}{l} x-1=0 \\ y+1=0 \end{array} \right.$. Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Giải:

+) (S) có tâm $I(2; 2; -1)$ bán kính $R=5$;

+) d_1 có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-1; 4; 1)$ và d_2 có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 2; 2)$

+) có $\left[\begin{array}{c} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{array} \right] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 3(2; 1; -2)$

+) (P) song song với d_1, d_2 nên nhận $\frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{array} \right] = (2; 1; -2)$ làm vector pháp tuyến.

+) Do đó phương trình (P) có dạng: $2x+y-2z+D=0$

+) Theo giả thiết ta có $d_{(I, P)} = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2(-1) + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |D + 8| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = -17 \end{cases}$$

+) Với $D=1 \Rightarrow (P_1): 2x+y-2z+1=0$

+) Với $D=-17 \Rightarrow (P_2): 2x+y-2z-17=0$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x+y-2z+1=0$ và $2x+y-2z-17=0$

* Sai lầm ở đâu:

Đáp số sai, chỉ tồn tại một mặt phẳng cần tìm. Mặt phẳng (P_1) không song song với đường thẳng d_1 nên bị loại, còn (P_1) song song với cả 2 đường thẳng d_1 và d_2 nên là mặt phẳng cần tìm.

- Nguyên nhân sai vì không thử lại để xem mặt phẳng tìm được có song song với hai đường thẳng đã cho không.

*) Thử lại như thế nào:

Ta có (P) hoặc song song hoặc chứa d_1, d_2 nên để kiểm tra ta chỉ cần lấy 1 điểm thuộc mỗi đường thẳng và thay vào phương trình mặt phẳng (P) thì (P) chứa đường thẳng tương ứng, ngược lại là song song.

Cụ thể, ta có $M_1(1;-1;1) \in d_1$ và $M_2(3;0;-1) \in d_2$

Thử lại:

+) $M_1 \in (P_1) \Rightarrow d_1 \subset (P_1)$ nên (P_1) không thỏa mãn.

+) $M_2 \notin (P_2) \Rightarrow d_1 // (P_2); M_2 \notin (P_2) \Rightarrow d_2 // (P_2)$ nên (P_2) thỏa mãn.

2.4. Sai lầm khi định dạng các hình do nắm tính chất hình không vững

Ví dụ 12: Cho 3 điểm $A=(1,3), B=(-1,1), C=(4,6)$.

Tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành?

Giải: Giả sử $D=(x,y)$.

Để ABCD là hình bình hành ta cần có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 - (-1) \\ y - 3 = 6 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}. \text{ Vậy } D=(6,8).$$

Nhận xét: Nhìn về cách giải có vẻ như không sai lầm chỗ nào! Nhưng đây cũng chính là chỗ học sinh dễ sai nhất, đặc biệt là trong hình không gian sau này.

Ta đã biết tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $AD // BC$ và $AD = BC$. Như vậy đẳng thức vector trên chưa loại được trường hợp $AD \equiv BC$.

Lời giải đúng: Chỉ cần kiểm tra thêm 3 trong 4 điểm không thẳng hàng cho bài toán tổng quát (toạ độ chứa tham số)

Còn đối với bài trên, dễ thấy: $\overrightarrow{AB} = (-2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 5)$ là 2 vector cùng phương và chung điểm A nên A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow$ Không tồn tại D để ABCD là hình bình hành.

Ví dụ 13: Trong không gian Oxyz cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là A(2 ; 3 ; -1), B(0 ; -2 ; 5) , C(1 ; 4 ; 2) . Xét các điểm D có toạ độ D(m ; 1-m ; 1-5m), tìm giá trị m để A, B, C, D lập thành một tứ giác.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-2; -5; 6); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 3); \overrightarrow{AD} = (m-2; -2-3m; 2-5m) \\ \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= (-21; 0; -7). \text{ Khi đó } ABCD \text{ lập thành một tứ giác} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \text{ đồng phẳng} \\ \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \Leftrightarrow -21(m-2) - 7(2-5m) = 0 \\ \Leftrightarrow 3m-6+2-5m &= 0 \Leftrightarrow 2m=4 \Leftrightarrow m=2\end{aligned}$$

Vậy với $m=2$ thì D(-2; 7; 11) thoả mãn điều kiện A, B, C, D lập thành một tứ giác. Nhận xét: Lời giải kết luận $m=2$ A, B, C, D lập thành một tứ giác là hoàn toàn sai lầm. Việc lập luận A, B, C, D lập thành một tứ giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng là không chính xác, đây chỉ là điều kiện cần. Vì nếu A, B, C hoặc A, D, C thẳng hàng thì các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vẫn đồng phẳng nhưng 4 điểm A, B, C, D không lập thành một tứ giác

Có thể giải lại bài toán như sau:

Ta có A, B, C, D lập thành một tứ giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng và trong 4 điểm A, B, C, D không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vì vậy không có giá trị nào thoả mãn bài ra.

2.5 Sai lầm khi sử dụng lời giải không chính xác

Ví dụ 14: Trong không gian với hệ toạ độ oxyz cho mặt phẳng (P): $x+y+z+2=0$

và đường thẳng d: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Tìm toạ độ giao điểm M của d và (P).

Giải:

Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Suy ra M(1;-3;0) là điểm cần tìm.

* Sai ở đâu?

Sai ở chỗ lời giải viết rằng “tọa độ điểm M là nghiệm của hệ (*) thì các phương trình thứ (2), (3), (4) chưa thỏa mãn, cụ thể là:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3 + 0 = -2 \neq 0 \\ 1 - (-3) + 2 \cdot 0 = 4 \neq 1 \\ 1 + 2(-3) - 0 = -5 \neq 3 \end{cases}$$

Do đó không thể nói tọa độ của M là nghiệm của hệ (*) được.

BÀI TẬP

- 1) Cho ΔABC với $A(\frac{7}{4}; 3), B(1; 2), C(-4; 3)$ viết phương trình đường phân giác góc trong của góc A.
- 2) Cho ba điểm A(4;-1), B(-3;2); C(1;6). Tính góc giữa 2 đường thẳng AB, AC.
- 3) Cho ba điểm A(3;0), B(-5;4), P(10;2). Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.
- 4) Viết phương trình đường thẳng đi qua A(0;1) và tạo với đường thẳng d: $x+2y+3=0$ một góc 45° .
- 5) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x+y-2z+9=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).
- 6) Xác định góc φ tạo bởi đường thẳng d: $\begin{cases} x = \frac{7}{2} + 6t \\ y = -\frac{7}{4} + 4t \\ z = \frac{21}{4} - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng (P): $3x+y+1=0$.
- 7) Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 .
- 8) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1;1;0) và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2 đồng thời cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$.
- 9) Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): y+z+4=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) biết rằng (β) vuông góc với (α) , song song với Δ và $d(\Delta, (\beta)) = 2d(O, (\beta))$.
- 10) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S), 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 2z - 16 = 0$

$d_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}; d_2 : \begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$
 Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng 3.

3. KẾT LUẬN

3.1 Kết quả thực nghiệm

3.1.1 Kết quả kiểm tra

Lớp	Sĩ số	Điểm TB (5 đến 6,4)		Điểm khá (6,5 đến 7,9)		Điểm giỏi (từ 8 trở lên)		Đạt yêu cầu	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
10A5	47	22	44,44	12	26,67	8	17,78	40	88,89
12A6	48	23	40,0	15	33,33	6	13,33	39	86,67

3.1.2 Kết quả chung

Chuyên đề này đã được thực hiện giảng dạy khi tôi tham gia dạy khối 10, khối 12 và luyện thi đại học trong hai năm gần đây. Trong quá trình học chuyên đề này, học sinh thực sự thấy tự tin, biết vận dụng khi gặp các bài toán liên quan, tạo cho học sinh niềm đam mê, yêu thích môn toán, mở ra cho học sinh cách nhìn nhận, vận dụng, linh hoạt, sáng tạo các kiến thức đã học, tạo nền tảng cho học sinh tự học, tự nghiên cứu.

3.2 Bài học kinh nghiệm

Từ thực tế giảng dạy chuyên đề này, một kinh nghiệm được rút ra là trước hết học sinh phải nắm chắc các kiến thức cơ bản, biết vận dụng linh hoạt các kiến thức này, từ đó mới dạy các chuyên đề mở rộng, nâng cao, khắc sâu kiến thức một cách hợp lý với các đối tượng học sinh nhằm bồi dưỡng năng khiếu, rèn kỹ năng cho học sinh.

3.3 Kết luận

Sau một thời gian nghiên cứu và được sự giúp đỡ đóng góp ý kiến của đồng nghiệp đề tài hoàn thành với một số ưu nhược điểm sau:

3.3.1 Ưu điểm

- Sáng kiến đã đạt được những yêu cầu đặt ra ở phần đặt vấn đề.
- Tìm hiểu và đưa ra hệ thống bài tập tương đối đầy đủ có lời giải chi tiết.
- Phần lớn bài tập đưa ra phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh khá - giỏi THPT. Bên cạnh đó đề tài đưa ra bài tập khó dành cho học sinh giỏi.

- Giúp học sinh có những bài tập tương tự để phát triển tư duy.

3.3.2 Nhược điểm:

- Hệ thống bài tập chưa phong phú.
- Có những lời giải đưa ra vẫn còn dài chưa thật ngắn gọn.

3.3.3 Hướng phát triển

- Do thời gian thực hiện đề tài có hạn nên tôi chỉ giới hạn trong hệ thống bài tập
 - Xây dựng hệ thống bài tập phong phú và đa dạng hơn.
 - Đưa ra các lời giải ngắn gọn hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1/ Sách giáo khoa và sách bài tập hình học lớp 10 – NXB Giáo Dục
- 2/ Sách giáo khoa và sách bài tập hình học lớp 12 – NXB Giáo Dục
- 3/ Tuyển tập các đề thi TSDH từ năm 2002 đến năm 2013
- 4/ Sai lầm thường gặp khi giải toán- NXB Giáo Dục

**XÁC NHẬN CỦA THỦ
TRƯỞNG ĐƠN VỊ**

Thanh Hóa, ngày 28 tháng 03 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh nghiệm của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

Lê Thị Thủy