

Bài 10. Giới hạn hàm số

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN D. CÂU HỎI ĐÚNG-SAI**Câu 1.** Tìm được các giới hạn sau:

*a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = 9$ b) $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = 3$; *c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$ d)

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = (-2)^2 - (-2) + 3 = 9$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{6+3}} = \frac{1}{3}$

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 2-1=1$

d) Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{-2+1}{-1-1} = \frac{1}{2}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Khi đó:

a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$

*b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$

*c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$

b) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$, ta có: $f(x_n) = x_n - 2$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x_n) = -1 - 2 = -3$

c) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \geq -1$ và $x_n \rightarrow -1$, ta có: $f(x_n) = \sqrt{x_n^2 + 1}$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x_n) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$

d) Vì $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (hay $-3 \neq \sqrt{2}$) nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Câu 3. Tìm được các giới hạn sau:

*a) $\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = 2$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = -\frac{3}{4}$;

$$c) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = +\infty$$

$$*d) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \frac{5}{4}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = -5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = \frac{2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)^2}{4 \cdot (-1) + 1} = \frac{5}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-3)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-3) = -5-3 = -8$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x} = \frac{-4-1}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 4. Cho hàm số

$$a) \text{Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$$

$$*b) \text{Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$$

$$*c) \text{Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$$d) \text{Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

$$a) \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{5}$$

$$b) \text{Xét dãy số } (x_n) \text{ bất kì sao cho } x_n < 2 \text{ và } x_n \rightarrow 2, \text{ ta có: } f(x_n) = 1 - x_n^2$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_n) = 1 - 2^2 = -3$$

$$c) \text{Xét dãy số } (x_n) \text{ bất kì sao cho } x_n > 2 \text{ và } x_n \rightarrow 2, \text{ ta có } f(x_n) = \sqrt{x_n + 2}$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x_n) = \sqrt{2+2} = 2$$

$$d) \text{Vì } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ (hay } -3 \neq 2) \text{ nên không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Câu 5. Tìm được các giới hạn một bên sau:

$$*a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3 - 1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right) \right] = +\infty$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(2x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty \text{ (do } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x \cdot \frac{1}{x-3} \right) = -\infty$$

$$\text{do } \lim_{x \rightarrow 3^-} x = 3 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3 - 1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-1)(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x(x-1)}{x+1}} \right] = 3 \cdot \sqrt{\frac{0}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Câu 6. Tìm được các giới hạn sau:

$$*a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\infty;$$

$$*c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = 2$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = +\infty, \text{ do } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = +\infty,$$

$$\text{do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{3}{x}}} = \sqrt{2}$$

Câu 7. Tìm được các giới hạn sau:

$$*a) \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = 1;$$

$$*b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty;$$

$$*c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1} = -\infty$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = \sqrt{2+2} - 1 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(4x-3) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty \quad \text{vì} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-3) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{(x-2)} \right] = -\infty, \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 8. Tính được các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x-4} = \frac{13}{6}$$

$$*c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{23}{6}$$

$$*d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \frac{9}{11}$$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x-4} = -\frac{13}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 2x + 8)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 8}{x+3} = \frac{23}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 + 3x - 7)}{(x+2)(x-9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x - 7}{x-9} = \frac{9}{11}$$

Câu 9. Tìm được các giới hạn sau:

$$*a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \frac{1}{16};$$

$$*b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3} = -24$$

$$*c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{4}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \frac{1}{3}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{4x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x-4}{4x(\sqrt{4+x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(\sqrt{4+x} + 2)} = \frac{1}{4(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{16}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [-(2+x)(\sqrt{x+7}+3)] = -4.6 = -24$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+5} - 3)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{2x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5-9)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}$$

d)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7-2^3}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} = \frac{1}{12}.$$

Câu 10. Tìm được các giới hạn sau:

*a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$;

*b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$

*d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{10}{x} \right) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$$

b)

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 3x}{x \left(\frac{2}{x} - 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3x}{x \left(\frac{2}{x} - 3 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3}{\frac{2}{x} - 3} = \frac{-\sqrt{1} - 3}{-3} = \frac{4}{3}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right)} - x}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - x}{x \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3} = \frac{\sqrt[3]{8} - 1}{-\sqrt{4} + 3} = 1$$

---HẾT---