

**Câu 1.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn:  $xy + yz + zx = 1$ . Rút gọn biểu thức:

$$P = x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{1+z^2}}$$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (m-1)x - 2m + 1$ .

a) Tìm tọa độ điểm cố định mà  $(d)$  luôn đi qua.

b) Tìm  $m$  để  $(d)$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

**Câu 3.** Đa thức  $f(x)$  với các hệ số là số nguyên thỏa mãn

$$(x - 2023)f(x+1) = (2024 - x)f(x) \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Chứng minh rằng } f(0) = 2025n, n \in \mathbb{Z}$$

**Câu 4.** Cho phương trình  $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y = 2y^2 + 2x \\ y\sqrt{x-y+1} + x = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Câu 5.** Giải hệ phương trình

**Câu 6.** Nhân ngày Tết Trung thu một rạp chiếu phim phục vụ khán giả một bộ phim hoạt hình với quy định về giá bán vé như sau:

+ Loại I (dành cho trẻ từ 6 đến 13 tuổi): 50.000đ một vé.

+ Loại II (dành cho người trên 13 tuổi): 100.000đ một vé.

Lãnh đạo rạp chiếu phim tính được rằng: Để không phải bù lỗ số tiền bán vé thu được phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hết thời gian bán vé, nhân viên báo cáo với lãnh đạo tổng số vé bán được là 500 vé. Lãnh đạo rạp chiếu phim khẳng định ngay là không phải bù lỗ. Em hãy giải thích khẳng định đó? Số tiền lãi rạp thu được tối thiểu là bao nhiêu, biết rằng mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm.

**Câu 7.** Cho ba điểm  $A, O, B$  thẳng hàng ( $O$  nằm giữa  $A$  và  $B$ ). Kẻ 2 tia  $Ax, By$  cùng vuông góc và cùng phía với  $AB$ . Dụng góc vuông  $uOv$ , tia  $Ou$  cắt  $Ax$  tại  $C$ , tia  $Ov$  cắt  $By$  tại  $D$ . Cho  $OA = a, OB = b, OC = 2a$ . Tính theo  $a, b$  diện tích hình thang  $ABDC$ .

**Câu 8.** Cho tam giác đều  $ABC, E$  là điểm thuộc cạnh  $AC$  và không trùng với  $A, K$  là trung điểm của  $AE$ . Đường thẳng đi qua  $E$  và vuông góc với  $AB$  tại  $F$  cắt đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $BC$  tại  $D$ .

a) Chứng minh  $BCKF$  là hình thang cân.

b) Tìm vị trí của  $E$  sao cho đoạn  $KD$  ngắn nhất.

**Câu 9.** Trong một hình vuông cạnh  $1^m$  có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng  $\frac{1}{7}m$ .

**Câu 10.** Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $k$  sao cho bất đẳng thức  $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq k$  đúng với mọi giá trị của  $x$ .

-----Hết-----

**Câu 1.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn:  $xy + yz + zx = 1$ . Rút gọn biểu thức:

$$P = x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{1+z^2}}$$

**Lời giải**

Từ  $xy + yz + zx = 1$  ta có:  $1+x^2 = xy + yz + zx + x^2 = x(x+y) + z(x+y) = (x+y)(x+z)$

Tương tự:

$$1+y^2 = xy + yz + zx + y^2 = y(x+y) + z(x+y) = (x+y)(y+z)$$

$$1+z^2 = xy + yz + zx + z^2 = z(x+z) + y(x+z) = (x+z)(y+z)$$

Suy ra

$$x \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x \cdot \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z) = xy + xz$$

Chứng minh tương tự ta được

$$y \cdot \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y(x+z) = xy + yz$$

$$z \cdot \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{1+z^2}} = z(y+x) = yz + xz$$

Do đó  $P = 2(xy + yz + zx) = 2$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (m-1)x - 2m + 1$ .

a) Tìm tọa độ điểm cố định mà  $(d)$  luôn đi qua.

b) Tìm  $m$  để  $(d)$  tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

**Lời giải**

**a) Tìm tọa độ điểm cố định mà  $(d)$  luôn đi qua.**

Giả sử  $(d)$  đi qua điểm cố định  $A(x_0; y_0)$ .

Khi đó:

$$y_0 = (m-1)x_0 - 2m + 1 \quad ("m)$$

$$\hat{U} \quad m(x_0 - 2) = x_0 + y_0 - 1 \quad ("m)$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy  $(d)$  đi qua điểm cố định  $A(2; -1)$ .

**b) Tìm  $m$  để tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.**

Nếu  $m = 1$  thì  $(d)$  là đường thẳng  $y = -1$  và không tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Suy ra  $m \neq 1$  không thỏa mãn.

Với  $m \neq 1$ ;  $(d)$  cắt trục hoành tại điểm  $M$  và cắt trục tung tại điểm  $N(0; 1 - 2m)$

$$(d): y = (m - 1)x - 2m + 1$$

Ta có:  $OM = \left| \frac{2m - 1}{m - 1} \right|$ ;  $ON = |-2m + 1|$  và diện tích tam giác  $OMN$  là:

$$S_{OMN} = OM \cdot ON = \left| \frac{2m - 1}{m - 1} \right| \cdot |-2m + 1| = \frac{(2m - 1)^2}{|m - 1|}$$

. Ta có phương trình

$$\frac{(2m - 1)^2}{2|m - 1|} = 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = |2m - 2| \quad (1) \quad | \quad |$$

+) Nếu  $m > 1$ : (1)  $\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 2m - 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 3 = 0$  (Vô nghiệm)

+) Nếu  $m < 1$ : (1)  $\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 2 - 2m \Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} & (\text{Thỏa mãn điều kiện } m < 1). \\ m = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} & (\text{Không thỏa mãn điều kiện } m < 1). \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm của  $m$  là  $m = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

### Câu 3.

Đa thức  $f(x)$  với các hệ số là số nguyên thỏa mãn  $(x - 2023)f(x + 1) = (2024 - x)f(x)$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng  $f(0) = 2025n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Với  $x = 2023$  ta có:  $0 \cdot f(2024) = 1 \cdot f(2025) \Rightarrow f(2025) = 0 \Rightarrow f(x) : (x - 2023)$

Với  $x = 2024$  ta có:  $f(2025) = 0 \cdot f(2024) \Rightarrow f(2025) = 0 \Rightarrow f(x) : (x - 2025)$

Suy ra  $f(x)$  có dạng:  $f(x) = (x - 2023)(x - 2025) \cdot g(x)$  với  $g(x)$  là đa thức với hệ số nguyên.

Ta có:  $f(0) = 2023 \cdot 2025 \cdot g(0)$ .

Do  $g(x)$  là đa thức với hệ số nguyên nên  $g(0) \in \mathbb{Z}$

Vậy  $f(0) = 2025 \cdot n \quad (n \in \mathbb{Z})$

**Câu 4.** Cho phương trình  $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

**Lời giải**

$$(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 2x + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có:

Yêu cầu đề bài thỏa mãn nếu (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

$$m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2} \end{cases}$$

(1) Có nghiệm khi

(2) Có nghiệm khi  $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Suy ra: Để (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt thì  $m < -2\sqrt{2}$

**Câu 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y = 2y^2 + 2x \\ y\sqrt{x-y+1} + x = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Lời giải**

ĐK:  $x - y + 1 > 0$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y + 2 \end{cases}$$

+) Nếu  $x = y$ . Ta có  $x\sqrt{x-x+1} + x = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$  (Thỏa mãn)

$$y\sqrt{-2y+2-y+1} - 2y + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

+) Nếu  $x = -2y + 2$  Ta có

$$S = \left\{ (2; 0); \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right); (1; 1) \right\}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

**Câu 6.** Nhân ngày Tết Trung thu một rạp chiếu phim phục vụ khán giả một bộ phim hoạt hình với quy định về giá bán vé như sau:

+ Loại I (dành cho trẻ từ 6 đến 13 tuổi): 50.000đ một vé.

+ Loại II (dành cho người trên 13 tuổi): 100.000đ một vé.

Lãnh đạo rạp chiếu phim tính được rằng: Để không phải bù lỗ số tiền bán vé thu được phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hết thời gian bán vé, nhân viên báo cáo với lãnh đạo tổng số vé bán được là 500 vé. Lãnh đạo rạp chiếu phim khẳng định ngay là không phải bù lỗ. Em hãy giải thích khẳng định đó? Số tiền lãi rạp thu được tối thiểu là bao nhiêu, biết rằng mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm.

**Lời giải**

Gọi  $x, y$  tương ứng là số vé loại I, loại II đã bán được ( $x, y \in \mathbb{N}$ )

Tổng số tiền bán vé thu được là:  $50000x + 100000y$  (đồng)

Giả sử rạp chiếu phim phải bù lỗ, nghĩa là  $50000x + 100000y < 20000000$

Hay:  $x + 2y < 400$  (1)

Mặt khác:  $x + y = 500$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $500 - y + 2y < 400 \Leftrightarrow y < -100$  (Vô lí, do  $y \in \mathbb{N}^*$ )

) Vậy rạp chiếu phim không phải bù lỗ.

Do mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm nên  $x \leq y$  (3)

Từ (2) và (3) suy ra:  $y \geq 250$

Tổng số tiền bán vé thu được là:

$$\begin{aligned} T &= 50000x + 100000y = 50000(x + y) + 50000y \\ &= 50000 \cdot 500 + 50000y \geq 50000 \cdot 500 + 50000 \cdot 250 = 37500000 \end{aligned}$$

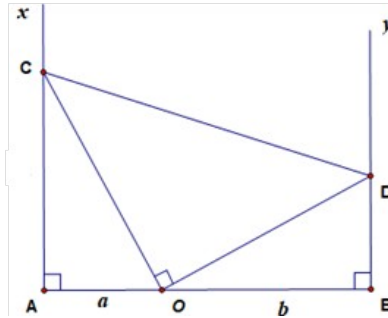
Hay  $T_{\min} = 37500000 \Leftrightarrow x = y = 250$

Vậy số tiền lãi tối thiểu mà rạp chiếu phim thu được là:

$$37500000 - 20000000 = 17500000 (\text{đ}).$$

**Câu 7.** Cho ba điểm  $A, O, B$  thẳng hàng ( $O$  nằm giữa  $A$  và  $B$ ). Kẻ 2 tia  $Ax, By$  cùng vuông góc và cùng phía với  $AB$ . Dựng góc vuông  $uOv$ , tia  $Ou$  cắt  $Ax$  tại  $C$ , tia  $Ov$  cắt  $By$  tại  $D$ . Cho  $OA = a, OB = b, OC = 2a$ . Tính theo  $a, b$  diện tích hình thang  $ABDC$ .

**Lời giải**



Trong  $\triangle AOC$  vuông, ta có:

$$\cos AOC = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$$

$$\angle COD = 90^\circ \Rightarrow \angle BOD = 30^\circ$$

Trong tam giác vuông  $BOD$  có:

$$\tan BOD = \frac{BD}{OB} \Rightarrow BD = OB \cdot \tan BOD = b \cdot \tan 30^\circ = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Hình thang } ABDC \text{ có } AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = a\sqrt{3}; BD = \frac{b}{\sqrt{3}}; AB = a + b$$

$$\text{Diện tích cần tìm là } \frac{AC + BD}{2} \cdot AB = \frac{a\sqrt{3} + \frac{b}{\sqrt{3}}}{2} (a + b) = \frac{\sqrt{3}(3a + b)}{6} (a + b)$$

**Câu 8.** Cho tam giác đều  $ABC, E$  là điểm thuộc cạnh  $AC$  và không trùng với  $A, K$  là trung điểm của  $AE$ . Đường thẳng đi qua  $E$  và vuông góc với  $AB$  tại  $F$  cắt đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $BC$  tại  $D$ .

- Chứng minh  $BCKF$  là hình thang cân.
- Tìm vị trí của  $E$  sao cho đoạn  $KD$  ngắn nhất.

**Lời giải**

**a) Chứng minh  $BCKF$  là hình thang cân**

Trong  $\triangle AFE$  có:

$$\angle F = 90^\circ \Rightarrow \angle AEF = 30^\circ; KF = KE \text{ (do } \angle FAE = 60^\circ)$$

$\triangle AFK$  là tam giác đều (do  $\angle AFK = \angle FAK = 60^\circ$ )

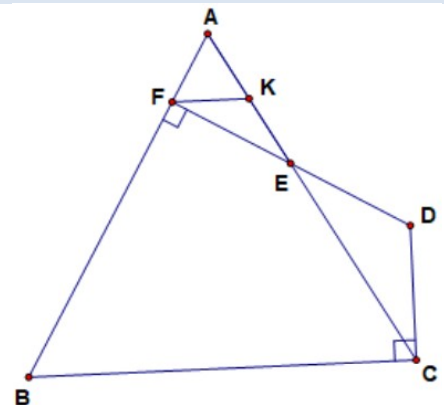
$$\Rightarrow AF = AK$$

Ta có  $BF = AB - AF; CK = AC - AK$  Do

$$AB = AC; AF = AK \Rightarrow BF = CK \quad (1)$$

Do  $\angle AFK = 60^\circ = \angle ABC \Rightarrow FK \parallel BC$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $BCKF$  là hình thang cân (Đpcm)



**b) Tìm vị trí E sao cho AD ngắn nhất**

Xét  $DDEC$  có  $DEC = KEF = 30^\circ$ ,

$DCE = DCB - ECB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  suy ra

$DDEC$  là tam giác cân tại D  $\Rightarrow DE = DC$

Dựng hình bình hành  $ADEI$  ta có:  $IAB = 90^\circ$  (do  $EI \parallel AD$ )

và  $AI = ED = DC$

Xét  $\triangle AIB; \triangle CDB$  có  $AB = CD$  (do  $\triangle ABC$ )

$AI = DC$  (Chứng minh trên)

Suy ra  $\triangle AIB = \triangle CDB$   $\Rightarrow \begin{cases} BI = DC \\ IBA = DBC \end{cases}$

Ta có  $\begin{cases} IBD = IBA + ABD \\ ABC = ABD + DBC \end{cases} \Rightarrow IBD = ACB = 60^\circ$

$\triangle IBD$  cân đỉnh B và  $\angle IBD = 60^\circ$  nên  $\triangle IBD$  là tam giác đều

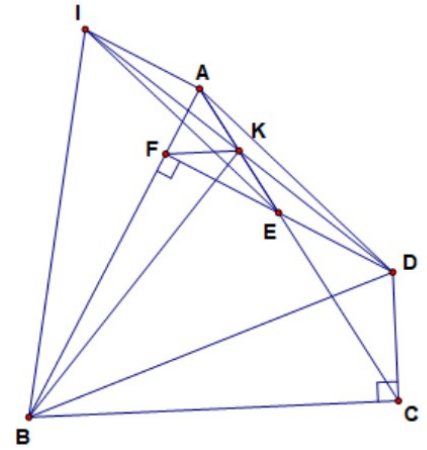
(3)

$ADEI$  là hình bình hành và K là trung điểm của AE nên K

là trung điểm của ID (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $KD = \frac{1}{2}DI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BC$

Vậy  $KD$  ngắn nhất khi  $C \perp D$  hay  $E \perp A$ ,



**Câu 9.** Trong một hình vuông cạnh  $1m$  có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng  $\frac{1}{7}m$ .

**Lời giải**

Chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ có kích thước bằng nhau với kích thước  $\frac{1}{5}m$ . Vì có 51 điểm và được xếp vào 25 hình vuông nên theo nguyên lý Dirichle phải có một hình vuông nhỏ chứa 3 điểm.

Giả sử hình ABCD chứa 3 điểm đó. Để tính được  $AC = \frac{\sqrt{2}}{5}m$

Bán kính hình tròn tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD bằng  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$

Vậy ba điểm nói trên phải nằm trong đường tròn tâm O, bán kính bằng  $\frac{1}{7}m$

**Câu 10.** Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $k$  sao cho bất đẳng thức  $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq k$  đúng với mọi giá trị của  $x$ .

**Lời giải**

Đặt  $P = (x+1)(x+2)^2(x+3) \Rightarrow P = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4)$

Đặt  $y = x^2 + 4x + 3$

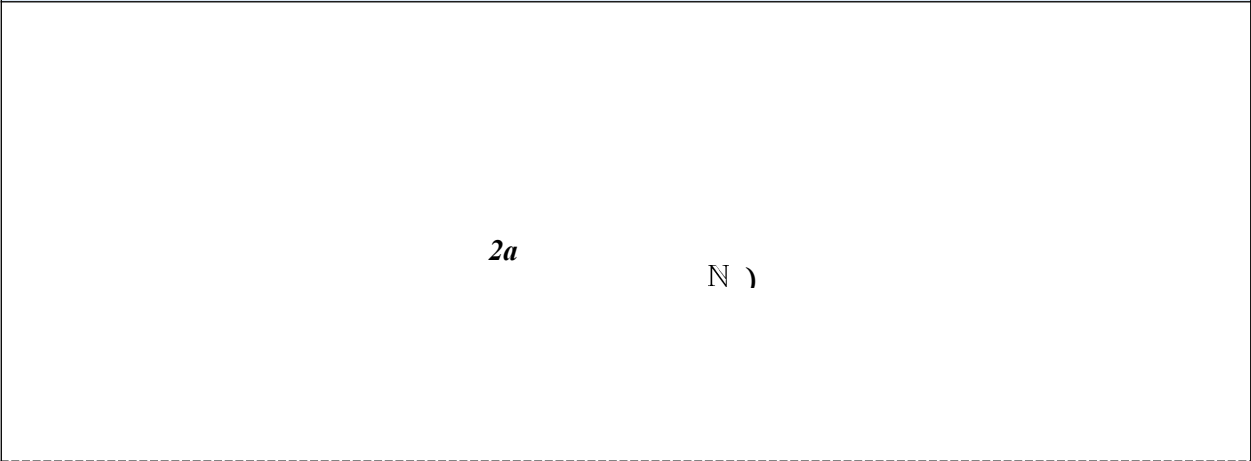
Ta có

$$P = y^2 + y = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}. \quad P = -\frac{1}{4} \text{ Khi } y = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

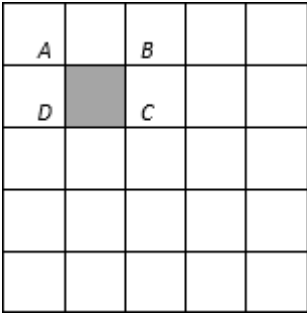
Ta có  $P_{\min} = -\frac{1}{4}$ . Để  $P \geq k$  với mọi  $x$  thì  $k \leq -\frac{1}{4}$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của  $k$  cần tìm là  $k = -1$

7	<p>Cho ba điểm <math>A, O, B</math> thẳng hàng (<math>O</math> nằm giữa <math>A</math> và <math>B</math>). Kẻ 2 tia <math>Ax, By</math> cùng vuông góc và cùng phía với <math>AB</math>. Dựng góc vuông <math>uOv</math>, tia <math>Ou</math> cắt <math>Ax</math> tại <math>C</math>, tia <math>Ov</math> cắt <math>By</math> tại <math>D</math>. Cho <math>OA = a; OB = b; OC = 2a</math>. Tính theo <math>a, b</math> diện tích hình thang <math>ABDC</math>.</p>	2,0
		
	<p>Trong tam giác vuông <math>AOC</math> có:</p> $\cos AOC = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AOC = 60^\circ.$	0,5
	<p>Do <math>COD = 90^\circ \Rightarrow BOD = 30^\circ</math></p>	0,25



	<p>Trong tam giác vuông <math>BOD</math> có:</p> $\tan BOD = \frac{BD}{OB} \Rightarrow BD = OB \cdot \tan BOD = b \cdot \tan 30^\circ = \frac{b}{\sqrt{3}}$	0,5
	<p>Hình thang <math>ABDC</math> có: <math>\sqrt{AC} = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{3}}</math>; <math>BD = \frac{b}{\sqrt{3}}</math>; <math>AB = a + b</math>;</p>	0,25
	<p>Diện tích cần tìm là: <math>\frac{AC + BD}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}}{2} (a + b) = \frac{3(3a + b)}{6} (a + b)</math></p>	0,5
8	<p><b>Cho tam giác đều <math>ABC</math>, <math>E</math> là điểm thuộc cạnh <math>AC</math> và không trùng với <math>A</math>, <math>K</math> là trung điểm của <math>AE</math>. Đường thẳng đi qua <math>E</math> và vuông góc với <math>AB</math> tại <math>F</math> cắt đường thẳng đi qua <math>C</math> và vuông góc với <math>BC</math> tại <math>D</math>.</b></p> <p><b>a) Chứng minh <math>BCKF</math> là hình thang cân.</b></p> <p><b>b) Tìm vị trí của <math>E</math> sao cho đoạn <math>KD</math> ngắn nhất.</b></p>	4,0
	<p><b>a) Chứng minh <math>BCKF</math> là hình thang cân.</b></p> <p>Trong tam giác vuông <math>AFE</math> có: <math>\angle AEF = 30^\circ</math>; <math>KF = KE</math> (do <math>\angle FAE = 60^\circ</math>)</p>	0,25
	<p>Tam giác <math>KEF</math> là tam giác cân <math>\Rightarrow \angle KEF = \angle AEF = \angle KFE = 30^\circ \Rightarrow \angle AFK = 90^\circ - \angle KFE = 60^\circ</math></p>	0,5
	<p>Tam giác <math>AFK</math> là tam giác đều (do <math>\angle AFK = \angle FAK = 60^\circ</math>) <math>\Rightarrow AF = AK</math></p>	0,25
	<p>Ta có: <math>BF = AB - AF</math>; <math>CK = AC - AK</math>. Do <math>AB = AC</math>; <math>AF = AK</math> nên <math>BF = CK</math> (1)</p>	0,5
	<p>Do <math>\angle AFK = 60^\circ = \angle ABC</math> nên <math>FK \parallel BC</math> (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) suy ra <math>BCKF</math> là hình thang cân (ĐPCM)</p>	0,25
	<p><b>b) Tìm vị trí của <math>E</math> sao cho đoạn <math>KD</math> ngắn nhất.</b></p>	

	Xét tam giác $DEC$ có $DEC = KEF = 30^\circ$ ; $DCE = DCB - ECB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ Suy ra $DEC$ là tam giác cân $\Rightarrow DE = DC$	0,25
	Dựng hình bình hành $ADEI$ , ta có: $IAB = 90^\circ$ (do $AI // ED$ ) và $AI = ED = DC$	0,5
	Xét hai tam giác vuông $AIB$ và $CDB$ có $AB = CB$ (do tam giác $ABC$ đều) $AI = DC$ (Chứng minh trên) Suy ra $\Delta AIB = \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} BI = BD \\ IBA = DBC \end{cases}$	0,25
	Ta có: $\begin{cases} IBD = IBA + ABD \\ ABC = ABD + DBC \end{cases} \Rightarrow IBD = ABC = 60^\circ$	0,25
	Tam giác $IBD$ cân đỉnh $B$ và $IBD = 60^\circ$ nên $IBD$ là tam giác đều (3) $ADEI$ là hình bình hành và $K$ là trung điểm của $AE$ nên $K$ là trung điểm của $ID$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $KD = \frac{1}{2} DI = \frac{1}{2} BD \geq \frac{1}{2} BC$	0,25
	Vậy $KD$ ngắn nhất khi $D$ trùng với $C$ hay $E$ trùng với $C$	0,25
9	<b>Trong một hình vuông cạnh <math>1m</math> có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng <math>\frac{1}{7}m</math>.</b>	1,0
		0,25
	Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông nhỏ bằng nhau với kích thước $\frac{1}{5}m$	
	Vì có 51 điểm và được xếp vào 25 hình vuông nên theo nguyên lý Dirichlet phải có một hình vuông nhỏ chứa 3 điểm.	0,25
	Giả sử hình vuông $ABCD$ chứa 3 điểm đó. Để tính được $\sqrt{AC} = \frac{2}{5}m$	0,25
	Bán kính đường tròn tâm $O$ ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ bằng $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{49} = \frac{1}{7}$	0,25
	Vậy ba điểm nói trên phải nằm trong hình tròn tâm $O$ , bán kính bằng $\frac{1}{7}m$	

10	<p>Tìm giá trị nguyên lớn nhất của <math>k</math> sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của <math>x</math>:</p> $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq k$	1,0
	<p>Đặt <math>P = (x+1)(x+2)^2(x+3)</math></p> $P = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 4)$	0,25
	<p>Đặt <math>y = x^2 + 4x + 3</math></p> <p>Ta có: <math>P = y^2 + y = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}; P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}</math></p>	0,25
	$-y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	0,25
	<p>Ta có: <math>P_{\min} = -\frac{1}{4}</math>. Để <math>P \geq k \forall x</math> thì <math>k \leq -\frac{1}{4}</math></p> <p>Vậy giá trị nguyên lớn nhất của <math>k</math> cần tìm là <math>k = -1</math></p>	0,25

-----HẾT-----