|  |  |
| --- | --- |
| **ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  **TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2023** |

**MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)**

**Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)**

**Câu I. (3,5 điểm):**

**1)** Giải phương trình

**2)** Giải hệ phương trình:

**Câu II. (2,5 điểm):**

**1)** Giả sử n là số nguyên sao cho 3–1011 chia hết cho 1008. Chứng minh rằng n - 1 chia hết cho 48.

**2)** Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 1 Chứng minh rằng

**Câu III. (3 điểm):**

Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O) và o' nằm ngoài (O) Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O). Đường thẳng AP cắt (O) tại C khác A.

**1)** Chứng minh rằng hai tam giác OBP và O'BC đồng dạng.

**2)** Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và O'C. Chứng minh rằng

**3)** Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc O'C. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

**Câu IV. (1 điểm):**

Giả sử A là tập hợp con của tập hợp gồm 30 số tự nhiên đầu tiên {0,1,2,3,...,29} sao cho với k nguyên bất kỳ, a ,b A bất kỳ (có thể a = b ) thì a + b + 30k không là tích của hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng số phần tử của tập hợp A nhỏ hơn hoặc bằng 10.

----------------------------HẾT----------------------------

**II: PHẦN LỜI GIẢI**

**Câu I: (3,5 điểm):**

**1.** Điều kiện xác định:

**Cách 1.** Xét thì vì nên suy ra

Tương tự nếu thì

Do đó, ta phải có x = 2 và nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định.

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình

**Cách 2.** Phương trình đã cho có thể viết lại thành

Giả sử hai vế cùng dấu, bình phương hai vế và rút gọn, ta được:

Bình phương một lần nữa, khai triển và rút gọn, ta được

Vì vô nghiệm nên x = 2 và nghiệm này thoả mãn.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 2

**2.** Biến đổi phương trình thứ hai thành:

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta suy ra

Mà ta thấy nên chia cả hai vế phương trình trên cho x + 6y ta được

Biến đổi phương trình trên ta được

nên suy ra 2x + y - 1 = 0 hoặc x + y - 1 = 0

(x + 6 - 12x)(3x + 2 - 4x) = 12

• 2x + y - 1 = 0 thì ta có y = 1 - 2x Thay vào phương trình thứ nhất ta được Giải phương trình ta thu được các nghiệm (x, y) = (0, 1),

• Nếu.x x + y - 1 = 0 thì ta có y = 1 - x Thay vào phương trình thứ nhất ta được

Giải phương trình ta thu được các nghiệm (x, y) = (0, 1),

Vậy, hệ đã cho có ba nghiệm (x, y) = (0, 1), ,

**Bài 2: (2,5 điểm):**

**1.** Ta có các biến đổi sau 1008 | khi và chỉ khi 1008 | tương đương với

336|

Vì 336 chia hết cho 16 mà lẻ nên n - 1 chia hết cho 16.

Ngoài ra vì 336 chia hết cho 3 mà tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3 nên n - 1 chia hết cho 3.

Vì (3, 16) = 1 nên n − 1 chia hết cho 3.16 = 48 Phép chứng minh hoàn tất.

**2.** Ta cần chứng minh

(1)

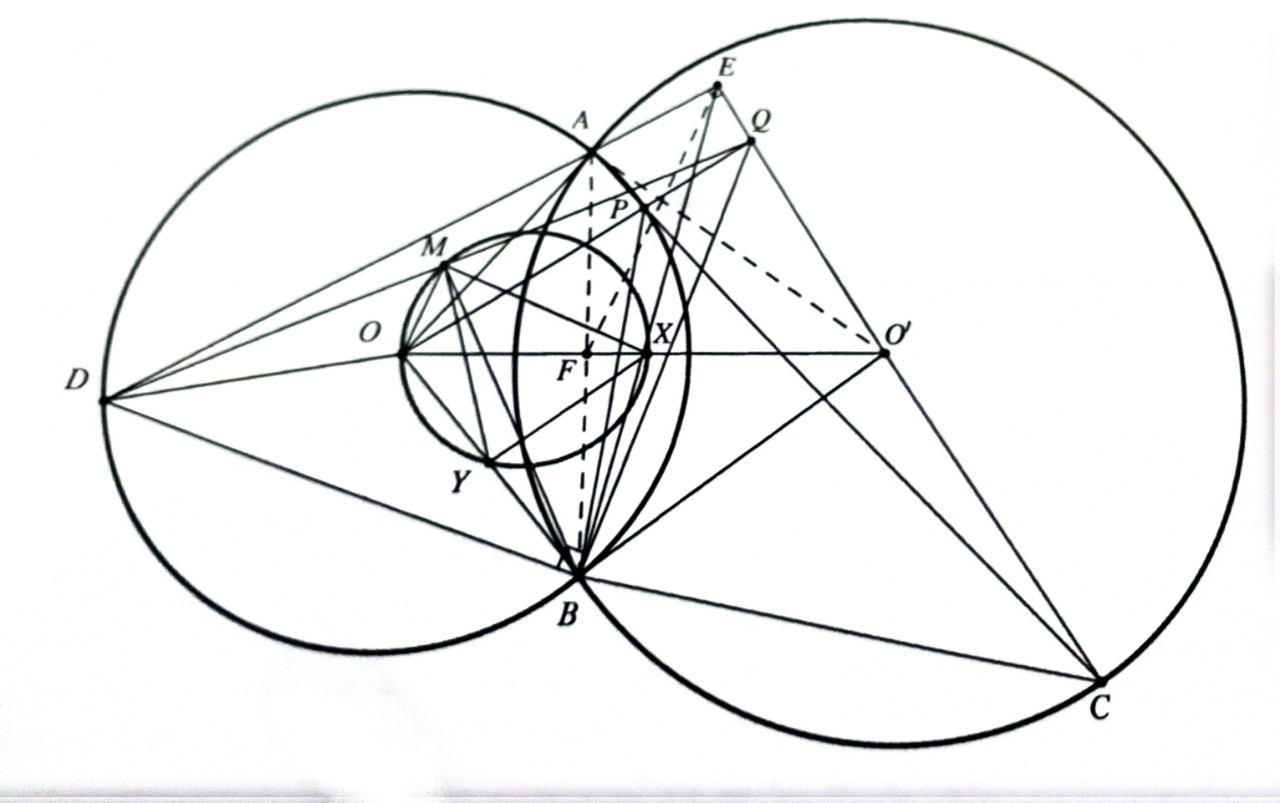
Ta biến đổi tương đương bất đẳng thức (1) như sau.

(1)

(2)

Theo bất đẳng thức AM – GM giả thiết ta có kéo theo . Suy ra bất đẳng thức (2) đúng và bài toán được chứng minh.

**Bài 3 : (3,0 điểm):**

****

**1.** Ta có Kết hợp với ta thu được

**2.** Vì nên ta được . Từ đó kéo theo tứ giác BCQP nội tiếp. Do đó, . Hơn nữa, vì cân tại O nên ta được . Như vậy,

**3.** Gọi M là trung điểm của DQ. Đặt AD = E . Vì các tứ giác BCQP và ADBP nội tiếp nên ta được . vì thế tứ giác BDEQ nội tiếp đường tròn đường kính DQ (với tâm đường tròn là M). Do đó, ta được

Mặt khác, ta cũng có

Như vậy, ta được (g.g) . Gọi F,X,Y lần lượt là trung điểm của AB, OO', OB. Khi đó, MY và EF là các đường trung tuyến tương ứng của OBM và ABE, vì thế ta được Kết hợp với việc tứ giác AEO' F nội tiếp ( Vì 90°), XY là đường trung bình của OBO’ và sử dụng tính đối xứng, ta được

Như vậy, tứ giác OMXY nội tiếp. Mặt khác, vì, O,B, O’ là các điểm cố định nên X,Y cũng là các điểm cố định. Do vậy, điểm M luôn chạy trên đường tròn (OXY) cố định.

**Bài 4 : (1,0 điểm):**

**Cách 1.** Trước hết ta loại các số mà bản thân nó không thể xuất hiện trong A, bao gồm:

* Các số có dạng 0 ,1,3,6,10,15,24,28;
* Các số có dạng : 16,18,25;
* Các số có dạng : 13.

Đối với các số còn lại, ta ghép cặp chúng như sau:

(2, 4), (5, 7), (8, 12), (9, 11), (19, 23), (20, 22), (24, 26), (27, 29), 14, 17

(gồm 8 cặp số và 2 số lẻ không trong cặp nào). Ta thấy các số không cùng một cặp không thể cùng thuộc A, cho nên A chỉ chứa đúng một số trong mỗi cặp. Do đó A chỉ có tối đa 10 phần tử.

**Cách 2.** Với hai số nguyên liên tiếp a, a + 1 ta có a (a + 1) 0,2,6,12,20,26 (mod 30). Với a A xét b = a và k = 0 ta có 2a không đồng dư với 0, 2, 6, 12, 20, 26 (mod 30) nên a không đồng dư với 0, 1, 3, 6, 10, 13, 15, 16, 18, 21,25,28 (mod 30). Suy ra

A B = {2.4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29}

và nếu phân hoạch B thành 10 tập

{2, 4}, {5, 7},{8, 12}, {11, 9}, {14, 22},{17, 19}, {20}, {23, 2}, {24, 26}, {29}

thì mỗi tập con này chứa nhiều nhất một phần tử của A. Do đó, A chứa tối đa 10 phần tử. Thực ra ta có thể chứng minh được số phần tử của A nhiều nhất bằng 10, chỉ cần chọn

A = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29} .