SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO

KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023

Môn: Toán

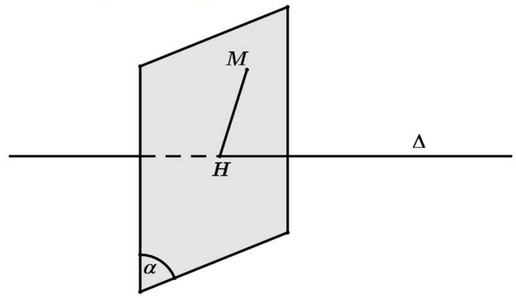
TÊN CHUYÊN ĐỀ: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Người soạn: Trần Thị Hoa
Đơn vị công tác: Tổ Toán - Trường THPT Hàn Thuyên

I.Hệ thông kiến thức liên quan

A.Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.



Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong $mp\left(M,\Delta\right)$ gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

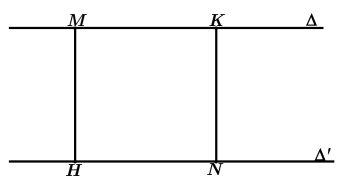
$d\left(M,\Delta\right)=MH$

Nhận xét: $OH \le OM, \forall M \in \Delta$

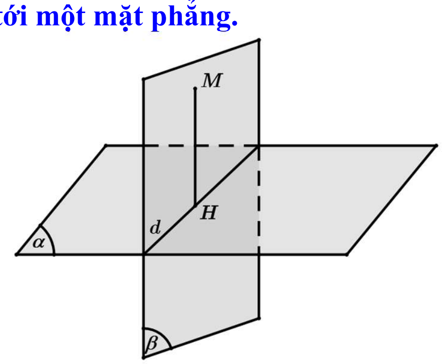
2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta')=0$.
- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta')=d(M,\Delta')=d(N,\Delta)$



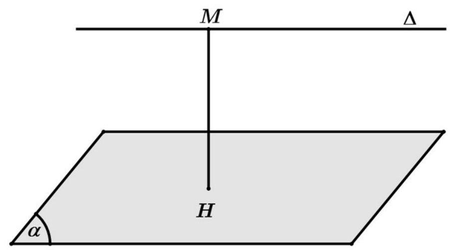
3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.



Cho mặt phẳng (α) và một điểm M, gọi H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

$d\left(M,(\alpha)\right)=MH$

4. Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng.

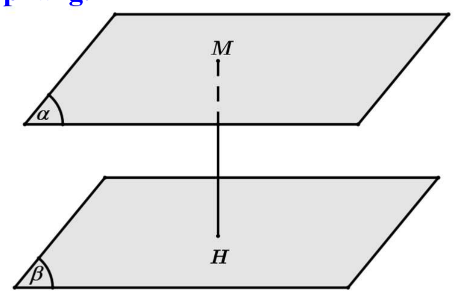


Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).

$d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha)), M \in \Delta$.

- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha)) = 0$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

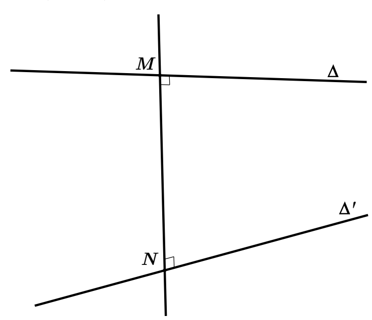


Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta)) = d(N,(\alpha))$ $, M \in (\alpha), N \in (\beta)$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

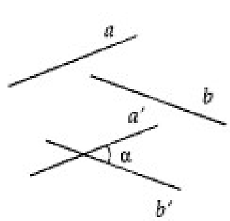
Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.



B. Góc trong không gian

1. Góc giữa hai đường thẳng.

a.Định nghĩa:



Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b là góc nhỏ nhất trong bốn góc mà a và b cắt nhau tạo nên.

Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Chú ý: góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn (hoặc vuông).

b. Phương pháp

Phương pháp 1: Sử dụng định lý hàm số cosin hoặc tỉ số lượng giác.

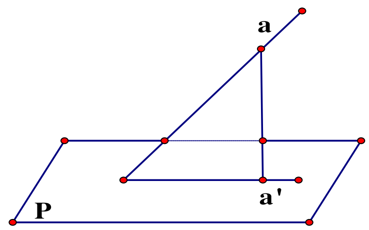
Phương pháp 2: Sử dụng tích vô hướng: nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vecto chỉ phương (hoặc vecto pháp tuyến) của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}.$$

2.Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì góc giữa đường thẳng a và (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa đường thẳng a và (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P).



3.Góc giữa hai mặt phẳng

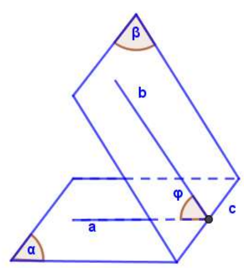
a. Định nghĩa

- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

b. phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

❖ **Phương pháp 1:** Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$. Tính góc $\left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 2:**

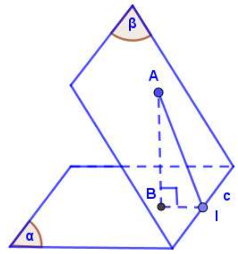


➢ Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).

➢ Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.

Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma) = a$, $(\beta)\cap(\gamma) = b$. Suy ra $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 3:** (trường hợp đặc biệt)



➢ Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $\left(A\in(\alpha),B\in(\beta)\right)$ mà $AB\perp(\beta)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại H. Khi đó $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\widehat{AHB}$.

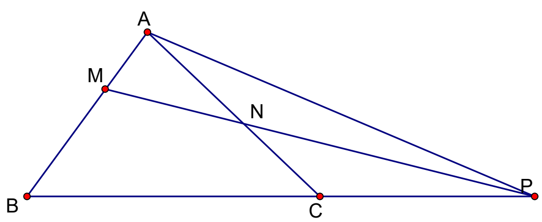
C. Thể tích khối đa diện

1.Thể tích khối chóp: $V=\dfrac{1}{3}h.S_d$ trong đó *h* là chiều cao và S_d là diện tích đáy

2.Thể tích khối lăng trụ: $V=h.S_d$ trong đó *h* là chiều cao và S_d là diện tích đáy

3.Các trường hợp đặc biệt

Định lý Menelaus: Cho tam giác ABC đường thẳng (d) cắt các cạnh AB,BC,CA lần lượt tại M,N,P ta có $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{PB}{PC}.\dfrac{NC}{NA}=1$



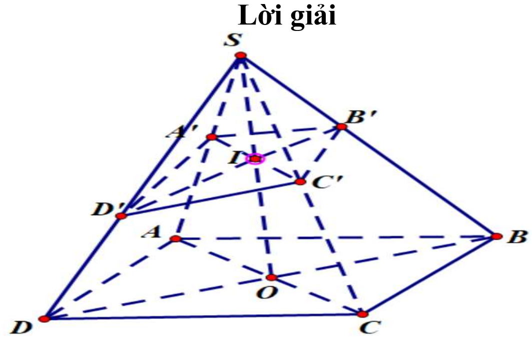
Bài toán 1. Cho hình chóp S.ABC. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A’, B’, C’. Khi đó: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

Bài toán 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD của hình chóp lần lượt tại các điểm A',B',C',D'. Đặt $\dfrac{SA'}{SA}=x;\ \dfrac{SB'}{SB}=y;\ \dfrac{SC'}{SC}=z;\ \dfrac{SD'}{SD}=t$. Khi đó

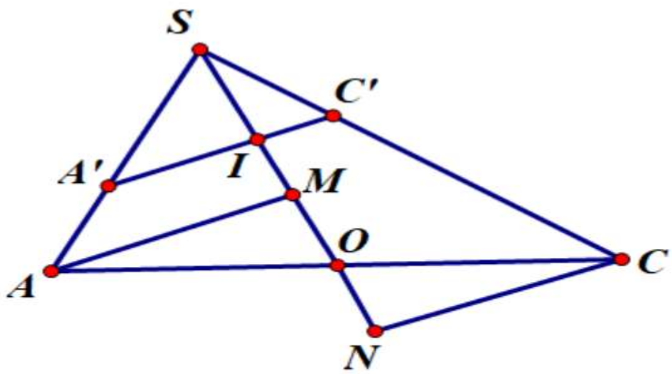
1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{t}$.

2) $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{xyzt}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}\right)$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD ; $I = A^{/}C^{/} \cap SO$. Suy ra $B^{/}, I, D^{/}$ thẳng hàng.



Kẻ $AM // A^{/}C^{/}; CN // A^{/}C^{/}$. Ta có:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{SA}{SA^{/}}+\frac{SC}{SC^{/}}=\frac{SM}{SI}+\frac{SN}{SI}=\frac{SM+SN}{SI}=\frac{2SO}{SI}$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=\frac{2SO}{SI}$, Suy ra điều phải chứng minh.

2)Ta có $V_{S.A^{/}B^{/}C_{/}D^{/}}=V_{S.A^{/}B^{/}C^{/}}+V_{S.A^{/}D^{/}C^{/}}$ $\frac{V_{SA^{/}B^{/}C^{/}}}{V_{SABC}}=x.z.y \Rightarrow V_{SA^{/}B^{/}C^{/}}=\frac{1}{2}xzy.V_{S.ABCD}$.

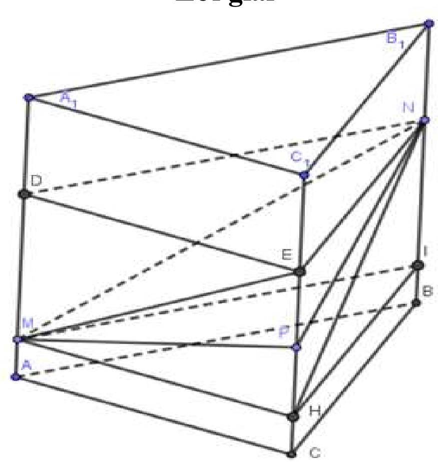
Chứng minh tương tự ta có $V_{SA^{/}D^{/}C^{/}}=\frac{1}{2}xzt.V_{S.ABCD}$ Suy ra $V_{S.A^{/}B^{/}C_{/}D^{/}}=\frac{1}{2}xz(y+t)$ (1)

Tương tự ta có $V_{S.A^{/}B^{/}C_{/}D^{/}}=\frac{1}{2}yt(x+z)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $V_{S.A^{/}B^{/}C_{/}D^{/}}=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{x+z}{xz}+\frac{y+t}{yt}\right)=\frac{xyzt}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$.

Bài toán 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Trên AA_1, BB_1, CC_1 lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AA_1}=a$, $\frac{BN}{BB_1}=b$, $\frac{CP}{CC_1}=c$. Khi đó: $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}}=\frac{a+b+c}{3}$

Lời giải



Không mất tính tổng quát ta giả sử $a < c < b$.

Khi đó mặt phẳng qua N song song với (ABC) cắt AA_1, CC_1 lần lượt tại D, E.

Mặt phẳng qua M song song với (ABC) cắt BB_1, CC_1 lần lượt tại I, H

Ta có $V_{ABC.MNP}=V_{ABC.DEN}-V_{N.DEPM}$

$V_{N.DEPM}=\frac{1}{3}d\left(N;\left(DEPM\right)\right).S_{DEPM}$

$=\frac{1}{3}d\left(N;\left(DEPM\right)\right).\frac{1}{2}\left(DM+PE\right).d\left(DM;PE\right)=\frac{1}{3}d\left(N;\left(DEPM\right)\right).\frac{1}{2}\left(1+\frac{PE}{DM}\right).DM.d\left(DM;PE\right)$

$=\frac{1}{3}d\left(N;\left(DEPM\right)\right).\frac{1}{2}\left(1+\frac{PE}{DM}\right).S_{DEHM}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{PE}{DM}\right)V_{N.DEHM}$

$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(1+\frac{PE}{DM}\right)V_{DEN.MIH}=\frac{1}{3}.\left(1+\frac{PE}{DM}\right).\frac{DM}{AA_1}V_{ABC.A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}.\left(\frac{DM}{AA_1}+\frac{PE}{AA_1}\right).V_{ABC.A_1B_1C_1}$.

$V_{ABC.DEN}=\frac{BN}{BB_1}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

Do đó : $V_{ABC.MNP}=\frac{BN}{BB_1}V_{ABC.A_1B_1C_1}-\frac{1}{3}.\left(\frac{DM}{AA_1}+\frac{PE}{AA_1}\right).V_{ABC.A_1B_1C_1}$

$\Leftrightarrow \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}}=\frac{BN}{BB_1}-\frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB_1}-\frac{AM}{AA_1}+\frac{BN}{BB_1}-\frac{CP}{CC_1}\right)\Leftrightarrow \frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}}=\frac{a+b+c}{3}$.

Bài toán 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trên các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 lấy các điểm M,N,P sao cho $AM=aAA_1$, $BN=bBB_1$, $CP=cCC_1$. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ cắt DD_1 tại Q. Ta có tỉ số thể tích: $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}=\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$.

Lời giải

Dựa vào giả thiết đề cho ta có $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BN}=b\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CP}=c\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DD_1}$ và giả sử $\overrightarrow{DQ}=d\overrightarrow{DD_1}$.

Gọi O và I lần lượt là trung điểm AC và MP, khi đó MP là đường trung bình chung của hình thang $AMPC$, $BNQD$. Do đó ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{OI}$.

Suy ra

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DQ}\Leftrightarrow a.\overrightarrow{AA_1}+c.\overrightarrow{CC_1}=b.\overrightarrow{BB_1}+d.\overrightarrow{DD_1}$.

$\Leftrightarrow \left[\left(a+c\right)-\left(b+d\right)\right]\overrightarrow{AA_1}=\vec{0}\Leftrightarrow a+c=b+d$.

Tiếp theo, ta có $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}=\frac{a+2\left(b+d\right)+c}{6}\Leftrightarrow \frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}=\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$.

II. Các dạng bài tập thường gặp

Dạng I: Tính thể tích khối chóp

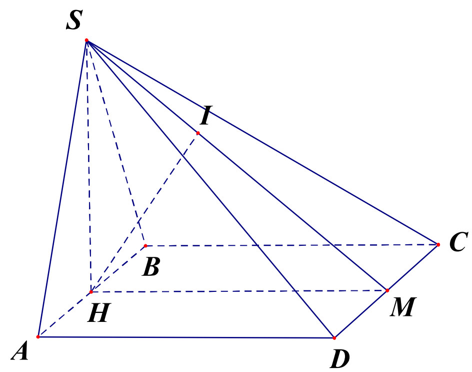
1. Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên $\left(SBC\right),\left(SAD\right)$ cùng tạo với đáy góc $60°$, mặt bên $\left(SAB\right)$ vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Chọn A



Hạ $SH \perp AB, H \in AB$, do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp BC$

Có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp BC$

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Có $\left.\begin{matrix} SB \perp BC, BC \perp AB \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle((ABCD),(SBC)) = \angle SBH$

(Do $\angle SAH < 90^\circ$)

Chứng minh tương tự $\angle((ABCD),(SAD)) = \angle SAH$

Từ giả thiết suy ra: $\angle SAH = \angle SBH = 60^\circ$ mà $H \in AB$ suy ra tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB.

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow HM \perp CD$

Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$

$\Rightarrow (SHM) \perp (SCD)$. Hạ $HI \perp SM$ thì $HI \perp (SCD) \Rightarrow HI = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

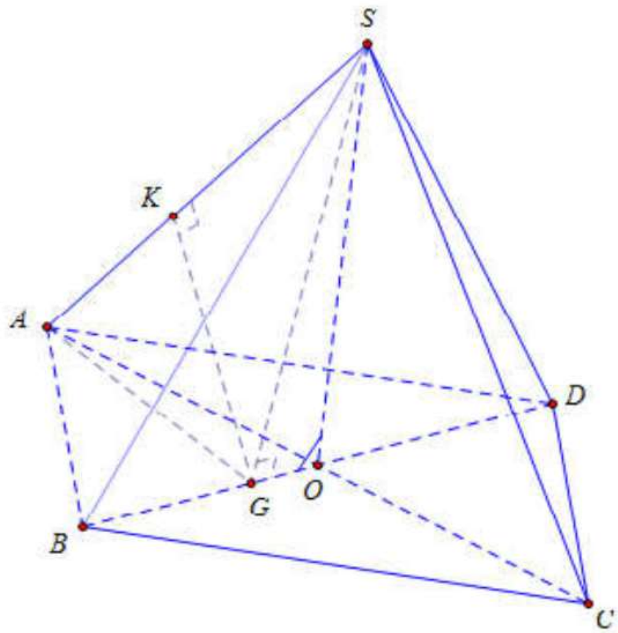
Có $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HM^2} \Rightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Rightarrow AB = 1$ (Do $AB = BC = HM$)

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH.S_{(ABC)} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp đều *S.ABC* có góc giữa mặt bên và mặt đáy (*ABC*) bằng 60°. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng *SA* và *BC* bằng $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. Tính theo *a* thể tích *V* của khối chóp *S.ABC*

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Giải:



Gọi O là trung điểm AC, x là cạnh của tam giác đều, G là trọng tâm tam giác AB**C.**

+) Ta có $SO \perp AC$; $BO \perp AC$; nên góc giữa *(SAC)* và *(ABC)* là $\widehat{SOB} = 60^o$.

Vì SABC là chóp đều nên $SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp GO$.

Xét tam giác vuông SAG có

$$SG = OG.\tan 60^o = \frac{x\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{x}{2}$$

+) Từ A kẻ $AD // BC$ suy ra:

$$d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)$$

Mặt khác ta có $d(G, (SAD)) = \frac{2}{3} d(B, (SAD))$

Vì $\widehat{BAD} = 120^o, \widehat{BAG} = 30^o; \widehat{GAD} = 90^o$ hay $AG \perp AD$ (1)

Lại có $SG \perp AD \Rightarrow AD \perp (AGS)$.

Kẻ $GK \perp SA \Rightarrow GK \perp AD \Rightarrow GK \perp (SAD) \Rightarrow GK = d(G, (SAD))$

Xét tam giác vuông *SGA* ta có:

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GS^2} = \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{7}{x^2} \Rightarrow GK = \frac{x\sqrt{7}}{7}$$

Suy ra: $\frac{x\sqrt{7}}{7} = \frac{2}{3}.\frac{3a\sqrt{7}}{14} \Rightarrow x = a$

Vậy $SG = \frac{a}{2}; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối chóp *S.ABC* là: $V = \frac{1}{3} SG.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

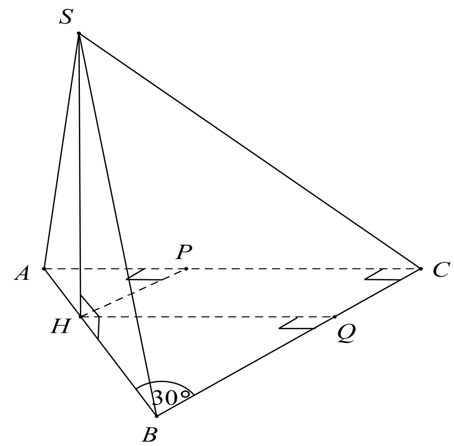
Chọn đáp án **D.**

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại C có $AC = a, \widehat{ABC} = 30°$. Mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc bằng nhau và bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a là:

A. $V=\dfrac{a^3}{2(1+\sqrt{5})}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2(1+\sqrt{3})}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2(1+\sqrt{2})}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



+ Theo đề $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB. Dựng $SH\perp AB \Rightarrow SH\perp(SAB)$.

+ ΔABC vuông nên $\tan 30^\circ=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (1) .

+ Dựng $HP\perp AC, HQ\perp BC \Rightarrow \widehat{SPH}=\widehat{SQH}=\widehat{((SAC),(ABC))}=\widehat{((SBC),(ABC))}=60^0$.

$\Rightarrow \Delta SPH=\Delta SQH \Rightarrow HP=HQ$.

$\Rightarrow HPCQ$ là hình vuông. Đặt $HQ=x, 0<x<a\sqrt{3}$ $\Rightarrow QB=a\sqrt{3}-x$.

ΔHQB vuông nên $\tan 60^\circ=\dfrac{QB}{HQ}\Rightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}-x\Rightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=HQ$.

ΔSHQ vuông nên $\tan 60^\circ=\dfrac{SH}{HQ}\Rightarrow SH=\dfrac{3a}{\sqrt{3}+1}$ (2) .

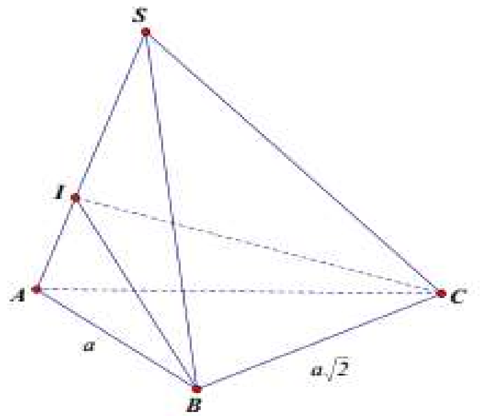
Từ (1) và (2): $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

Ví dụ 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$; $\widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^o$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60°. Thể tích của khối đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau chung cạnh huyền SA .
Kẻ BI vuông góc với SA suy ra CI cũng vuông góc với SA và $IB = IC$.
$SA \perp IC,\ SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC)$ tại I .

$V_{S.ABC} = V_{A.IBC} + V_{S.IBC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta IBC}$

$((SAB),(SAC)) = (IB,IC) = 60^o \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{BIC} = 60\\ \widehat{BIC} = 120^o\end{array}\right.$

Ta có $IC = IB < AB = a$ mà $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác IBC không thể đều suy ra $\widehat{BIC} = 120^o$.
Trong tam giác IBC đặt $IB = IC = x$ $(x > 0)$ có:

$BC^2 = IB^2 + IC^2 - 2IB.IC.\cos 120^o \Leftrightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Trong tam giác ABI vuông tại I có: $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác SAB vuông tại B đường cao BI có: $SA = \frac{AB^2}{IA} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}$

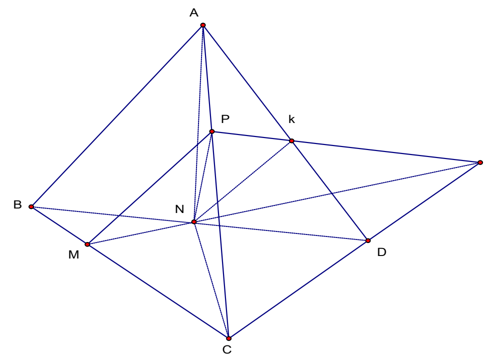
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta IBC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}IB.IC.\sin 120^o = \frac{a^3}{6}$

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M , N , P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $AC = 3AP$, $BD = 2BN$. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi mp(MNP).

A. $\frac{7}{13}$.　　**B.** $\frac{7}{15}$.　　**C.** $\frac{8}{15}$.　　**D.** $\frac{8}{13}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi $I = MN \cap DC,\ \ K = AD \cap PI$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD và 3 điểm M, N, I ta có

$$\frac{IC}{ID}.\frac{ND}{NB}.\frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow \frac{IC}{ID}.1.\frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{IC}{ID} = 3$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACD và 3 điểm P, K, I ta có

$$\frac{KD}{KA}.\frac{PA}{PC}.\frac{IC}{ID} = 1 \Leftrightarrow \frac{KD}{KA}.\frac{1}{2}.3 = 1 \Leftrightarrow \frac{KD}{KA} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{CPMN}}{V_{CABN}} = \frac{CP}{CA}.\frac{CM}{CB}.\frac{CN}{CN} = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}.1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{CPMN} = \frac{1}{2}V_{CABN} = \frac{1}{4}V_{ABCD} \quad (3)$$

$$\frac{V_{APKN}}{V_{ACDN}} = \frac{AP}{AC}.\frac{AK}{AD}.\frac{AN}{AN} = \frac{1}{3}.\frac{3}{5}.1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{NCPKD}}{V_{ACDN}} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{NCPKD} = \frac{4}{5}V_{ACDN} = \frac{4}{5}\frac{1}{2}V_{ABCD} = \frac{2}{5}V_{ABCD} \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow V_{CMPKDN} = V_{CPMN} + V_{NCPKD} = \frac{13}{20}V_{ABCD}$$

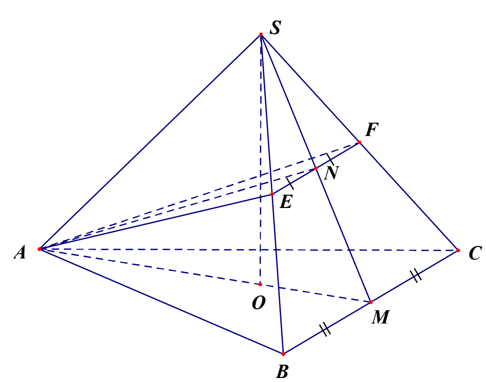
$$\Rightarrow \frac{V_{ABMNKP}}{V_{CMNDK}} = \frac{7}{13}$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và EF.
Ta có S, M, N thẳng hàng và $SM \perp BC$ tại M, $SM \perp EF$ tại N.
Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(AEF)\cap(SBC)=EF\\ SM\subset(SBC)\\ SM\perp EF\end{array}\right\}\Rightarrow SM\perp(AEF)\Rightarrow MN\perp AN\Rightarrow \Delta ANM \text{ vuông tại } N.$$

Từ đó suy ra $\Delta ANM \backsim \Delta SOM \Rightarrow \dfrac{AN}{SO}=\dfrac{AM}{SM}=\dfrac{NM}{OM}\Rightarrow NM.SM=AM.OM$.

Mà ta có N là trung điểm của SM (vì E, F lần lượt là trung điểm của SB, SC) $\Rightarrow NM=\dfrac{1}{2}SM$;

ΔABC đều cạnh a và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\dfrac{1}{2}SM^2=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow SM=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{12}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$; $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

2. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3, BC=4, AC=5$. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC}=6\sqrt{3}$. **B.** $V_{S.ABC}=12\sqrt{3}$. **C.** $V_{S.ABC}=2\sqrt{3}$. **D.** $V_{S.ABC}=4\sqrt{3}$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^0, 45^0, 60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30°. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích chóp $S.ABH$ lớn nhất là

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA}=k, 0<k<1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **B.** $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $k=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành và có thể tích *V*. Gọi *E* là điểm trên cạnh *SC* sao cho *EC* = 2*ES*. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng *AE* và song song với đường thẳng *BD*, (α) cắt hai cạnh *SB*, *SD* lần lượt tại hai điểm *M*, *N*. Tính theo *V* thể tích khối chóp *S.AMEN*.

A. $\dfrac{1}{6}V$. **B.** $\dfrac{1}{9}V$. **C.** $\dfrac{1}{27}V$. **D.** $\dfrac{2}{3}V$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC, các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) cùng tạo với đáy góc $60°$. Biết $AB = 3$, $BC = 4, CD = 5$, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AO. Biết $((SAC);(SBC)) = 60^\circ$. Khi đó thể tích của $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 9. Để làm một hình chóp tứ giác đều từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho bốn đỉnh M, N, P, Q trùng nhau(hình vẽ).
Biết rằng, các góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân là 150^0. Tính thể tích V của khối chóp đều tạo thành.

A. $V = \dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{24}$. **B.** $V = \dfrac{2}{3}$. **C.** $V = \dfrac{52+30\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{1}{3}$

Câu 10. Một đống đất được vun thành hình một khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng 2m, cạnh đáy nhỏ bằng 1m và chiều cao bằng 2m. Khối lượng (thể tích) đống đất có giá trị gần nhất với con số

A. 4,55m^3. **B.** 4,65m^3. **C.** 4,7 m^3. **D.** 4,75m^3.

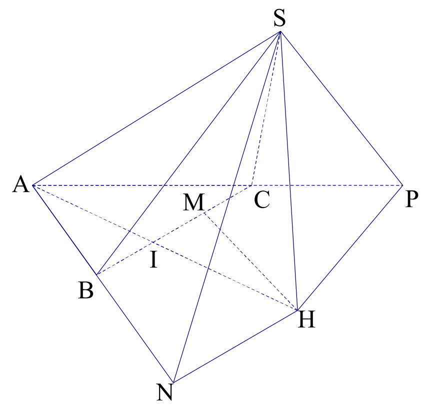
3. Hướng dẫn giải

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3, BC = 4, AC = 5$. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy (ABC) một góc 60° và hình chiếu H của S lên (ABC) nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$. **B.** $V_{S.ABC} = 12\sqrt{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = 2\sqrt{3}$. **D.** $V_{S.ABC} = 4\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi M, N, P là hình chiếu của H lên CB, BA, AC.
Ta có $\Delta SHM = \Delta SHN = \Delta SHP \Rightarrow HM = HN = HP$.
Theo bài ra ta có H là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABC.
Ta có ΔABC vuông tại $B \Rightarrow BMHN$ là hình vuông.
Gọi $I = AH \cap BC$.
$\frac{BI}{IC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BI = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{2}$.
Ta có $\frac{BI}{AB} = \frac{NH}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow B$ là trung điểm của $AN \Rightarrow HN = AB = 3$.
$\Rightarrow SH = HN.\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$.
$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 6 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = 6\sqrt{3}$.

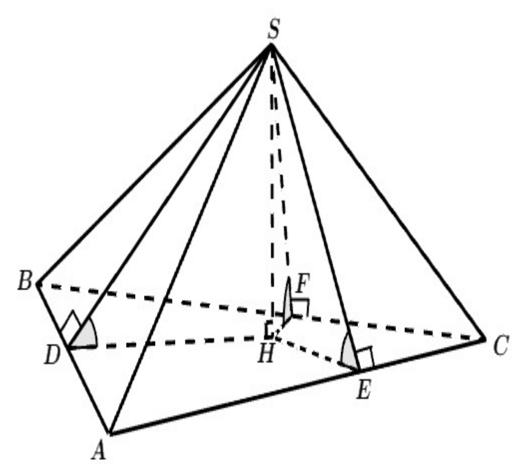
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^0, 45^0, 60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC). Kẻ $HD \perp AB\,(D \in AB)$, $HE \perp AC\,(E \in AC)$, $HF \perp BC\,(E \in BC)$. Khi đó ta có $HD = \frac{SH}{\tan 30^0} = SH\sqrt{3}$, $HE = \frac{SH}{\tan 45^0} = SH$, $HF = \frac{SH}{\tan 60^0} = \frac{SH}{\sqrt{3}}$. Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ suy ra

$$\frac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow SH = \frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.$$



Vậy $V = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Chọn đáp án D.

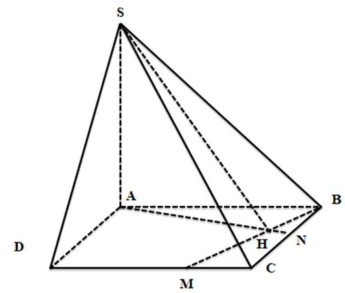
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD

và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích chóp $S.ABH$ lớn nhất là

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Lấy điểm $N\in BC$ sao cho $BN=CM=x,\ 0<x\le a$. Gọi $H=AN\cap BM$

Xét ΔABN và ΔBCM ta có: $BN=CM$, $\widehat{ABN}=\widehat{BCM}=90^\circ$ và $AB=BC$

$\Rightarrow \Delta ABN=\Delta BCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAN}=\widehat{CBM}$

Mà $\widehat{BAN}+\widehat{BNA}=90^\circ$ nên $\widehat{CBM}+\widehat{BNA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BHN}=90^\circ$ hay $AH\perp BM$

Ta có: $\begin{cases} BM\perp AH \\ BM\perp SA\end{cases} \Rightarrow BM\perp (SAH)\Rightarrow SH\perp BM$

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của S lên BM là H.

Do ΔBHN đồng dạng với ΔBCM nên $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BN}{BM}\Rightarrow \dfrac{BH}{a}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\Rightarrow BH=\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Tam giác ABH vuông tại H nên $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2x^2}{x^2+a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^4}{x^2+a^2}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$S_{\Delta ABH}=\dfrac{1}{2}AH.BH=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{a^3}{2}.\dfrac{x}{x^2+a^2}$

$V_{S.ABH}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABH}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{a^3}{2}.\dfrac{x}{x^2+a^2}\le\dfrac{a^4\sqrt{2}}{12a}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

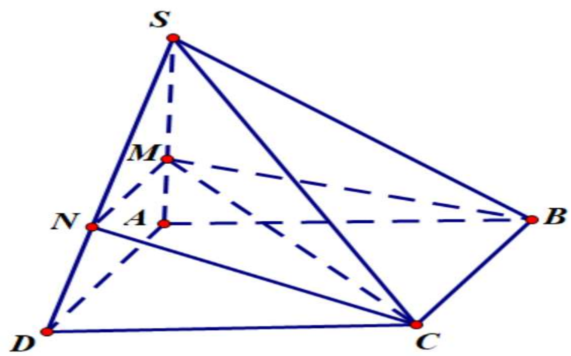
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA}=k, 0<k<1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **B.** $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $k=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Phân tích: Bài toán trên chính là bài toán về tỉ số thể tích, vì vậy trước hết phải xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (BMC).



Do (BMC) chứa BC song song với AD nên (BMC) **cắt** (SAD) theo giao tuyến song song AD.

Để tính $V_{S.BCNM}$ nếu xác định đường cao thì phức tạp vì vậy sẽ chia thành hai khối và sử dụng bài toán tỉ số thể tích.

Kẻ $MN//AD; N \in SD$ khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (BMC) là hình thang $BCNM$ **.**

Suy ra (BMC) chia khối chóp thành hai khối đa diện $SBCNM$ **và** $DABCNM$ **.**

Đặt $V_1 = V_{S.BCNM}$; $V_2 = V_{DABCNM}$; $V = V_{S.ABCD}$.

Để $V_1 = V_2$ thì $V_1 = \frac{1}{2}V$.

Ta có $\frac{V_{SNMC}}{V_{SADC}} = \frac{SN}{SD}.\frac{SM}{SA} = k^2 \Rightarrow V_{SNMC} = \frac{1}{2}k^2.V$.

Ta có $\frac{V_{SMCB}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{SMCB} = \frac{1}{2}k.V$.

Vậy $V_1 = \frac{1}{2}(k^2+k).V$.

Khi đó $V_1 = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow k^2 + k = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

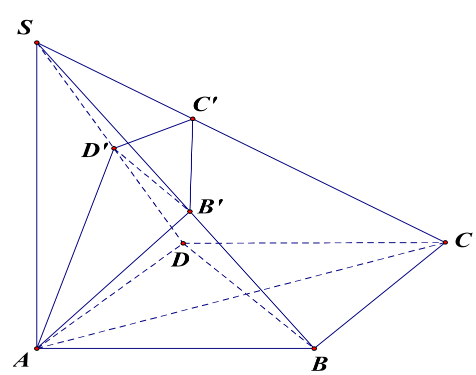
Do $0 < k < 1$ nên $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{2a^2}{3a^2}=\dfrac{2}{3}$ nên suy ra $B'D'//BD$ mà $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$.

Do đó $B'D'\perp SC$ (1)

Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'$ và $AB'\perp SB$ suy ra $AB'\perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(AB'C'D')\perp SC$ nên ta có $AC'\perp SC$

$\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{2a^2}{4a^2}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}}=\dfrac{2V_{SAB'C'}}{2V_{SABC}}=\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Mà $V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}a^2.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

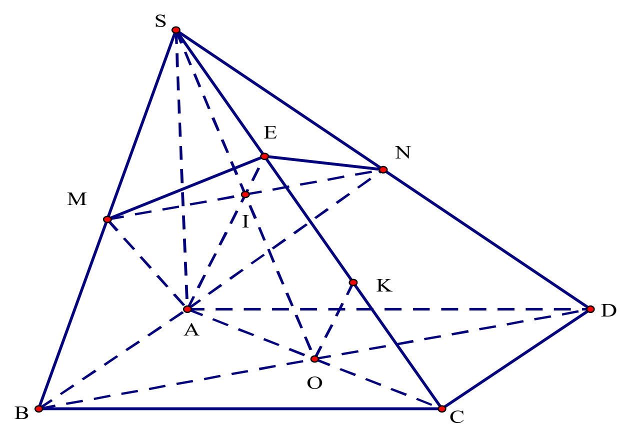
Vậy $V_{SAB'C'D'}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành và có thể tích *V*. Gọi *E* là điểm trên cạnh *SC* sao cho *EC* = 2*ES*. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng *AE* và song song với đường thẳng *BD*, (α) cắt hai cạnh *SB*, *SD* lần lượt tại hai điểm *M*, *N*. Tính theo *V* thể tích khối chóp *S.AMEN*.

A. $\dfrac{1}{6}V$. **B.** $\dfrac{1}{9}V$. **C.** $\dfrac{1}{27}V$. **D.** $\dfrac{2}{3}V$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi $O=AC\cap BD$ và $I=SO\cap AE$. Do (α) đi qua AE và song song với BD nên (α) cắt (SBD) theo một giao tuyến đi qua I và song song với BD.

Trong (SAC) từ O kẻ một đường thẳng song song với AE giả sử cắt SC tại K, do O là trung điểm của AC nên K là trung điểm của EC suy ra SE = EK = KC

Xét tam giác SAC ta có $\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{SE}{SK}=\dfrac{1}{2}$

Xét tam giác SBD ta có $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{1}{2}$

Do đó $\dfrac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow V_{S.AME}=\dfrac{1}{12}V$

Tương tự, ta có $V_{S.ANE}=\dfrac{1}{12}V$. Vậy $V_{S.AMEN}=V_{S.AME}+V_{S.ANE}=\dfrac{1}{12}V+\dfrac{1}{12}V=\dfrac{1}{6}V$.

Phương pháp giải:

Dùng định lí Thalet và phương pháp tỉ số thể tích để tính thể tích khối chóp cần tìm theo V

Chú ý

+) Nếu ba điểm E, A, I thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có:

$\frac{SE}{EC}.\frac{CA}{AO}.\frac{OI}{IS}=1\Rightarrow\frac{OI}{SI}=1\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{1}{2}$.

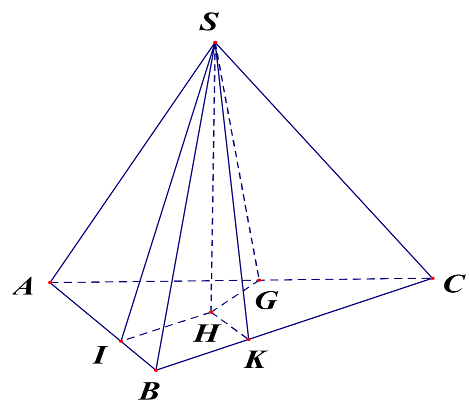
Như vậy có thể tính được tỷ số $\frac{SI}{SO}=\frac{1}{2}$ ngay mà không cần dùng định lý Ta lét

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC, các mặt bên (SAB), $(SBC),(SCA)$ cùng tạo với đáy góc $60°$. Biết $AB=3$, $BC=4,CD=5$, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Hạ $SH\perp(ABC),H\in(ABC)$

$HI\perp AB,I\in AB$; $HK\perp BC,K\in BC$, $HG\perp CA,G\in CA$

$$\left.\begin{array}{l}SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp AB\\ IH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SI\perp AB$$

Có $\left.\begin{array}{l}SI\perp AB,IH\perp AB\\ (SAB)\cap(ABC)=AB\end{array}\right\}\Rightarrow\angle((ABC),(SAB))=\angle HIS$ (Do $\angle HIS<90°$)

Chứng minh tương tự $\angle((ABC),(SBC))=\angle HKS$

$\angle((ABC),(SAC))=\angle SGH$

Từ giả thiết suy ra: $\angle HIS=\angle SKH=\angle SGH=60°$

$\Rightarrow SH=HI\sqrt{3}=HK\sqrt{3}=HG\sqrt{3}$

Mà H nằm trong tam giác ABC nên H và HI lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Có $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC là tam giác vuông tại B.

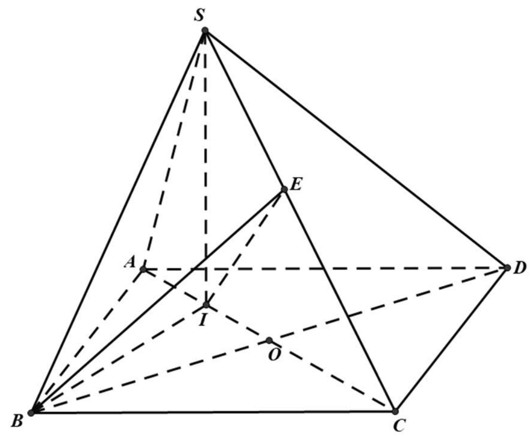
$HI=\frac{2S_{(ABC)}}{AB+BC+CA}=\frac{4.3}{3+4+5}=1\Rightarrow SH=\sqrt{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{(ABC)}=\frac{1}{3}.\sqrt{3}.\frac{3.4}{2}=2\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm AO. Biết $((SAC);(SBC))=60^{\circ}$. Khi đó thể tích của $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải



Gọi I trung điểm AO, suy ra $SI \perp (ABCD)$.

$AC = 2a; BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vẽ $BE \perp SC \Rightarrow IE \perp SC$.

Vậy $((SAC);(SBC)) = (BE;IE) = 60^\circ$.

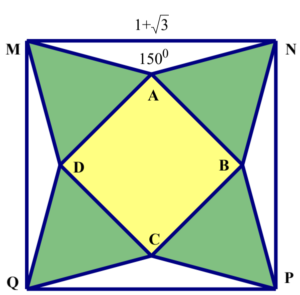
Xét ΔBIE vuông tại I: $IE = BI.\cot 60 = \dfrac{a}{2}$.

Xét ΔSIC vuông tại I: $\dfrac{1}{IE^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IC^2} \Rightarrow SI = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 9. Để làm một hình chóp tứ giác đều từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho bốn đỉnh M, N, P, Q trùng nhau(hình vẽ).
Biết rằng, các góc ở đỉnh của mỗi tam giác cân là 150^0. Tính thể tích V của khối chóp đều tạo thành.

A. $V = \dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{24}$. **B.** $V = \dfrac{2}{3}$. **C.** $V = \dfrac{52+30\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{1}{3}$



Hướng dẫn giải

Đáp án: B

+ $\widehat{AMN} = \widehat{DMQ} = 15^0 \Rightarrow \widehat{AMD} = 60^0 \Rightarrow \Delta MAD$ đều.

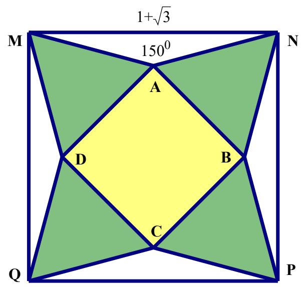
Vì vậy hình chóp tứ giác đều tạo thành có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng MA.

Trong đó, $MA = \dfrac{MN}{2\sin 75^0} = \dfrac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

+ Dễ dàng chứng minh được rằng:

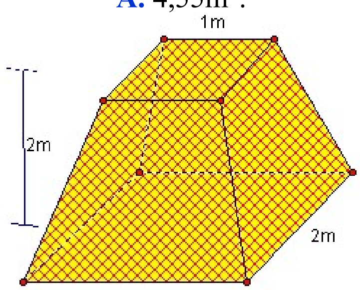
"*Một khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng* x *thì có thể tích là* $V = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{6}$"

+ Với $x = \sqrt{2}$ thì $V = \dfrac{2}{3}$



Câu 10. Một đống đất được vun thành hình một khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng 2m, cạnh đáy nhỏ bằng 1m và chiều cao bằng 2m. Khối lượng (thể tích) đống đất có giá trị gần nhất với con số

A. 4,55m^3. **B.** 4,65m^3. **C.** 4,7 m^3. **D.** 4,75m^3.



Hướng dẫn giải

Đáp án: B

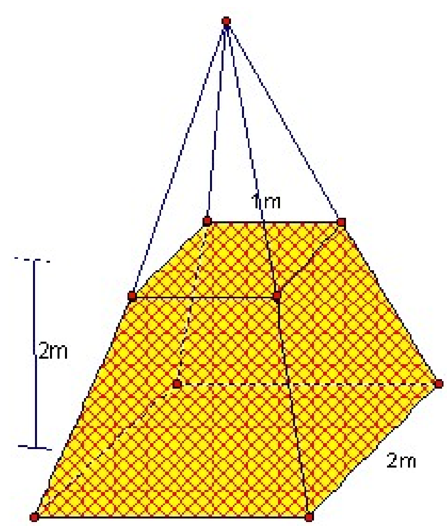
Kéo dài các cạnh bên hình chóp cụt lên phía trên ta được hình chóp lớn là hình chóp sinh ra hình chóp cụt. Hình chóp nhỏ và hình chóp lớn đồng dạng theo tỉ số k = $\dfrac{1}{2}$

(là tỉ số giữa độ dài cạnh đáy nhỏ và độ dài cạnh đáy lớn hình chóp cụt)

Thể tích chóp lớn bằng $\dfrac{1}{3}a^2.h = \dfrac{1}{3}.2^2.4 = \dfrac{16}{3}m^3$

Tỉ số giữa thể tích chóp nhỏ và thể tích chóp lớn bằng $(\dfrac{1}{2})^3 = \dfrac{1}{8}$

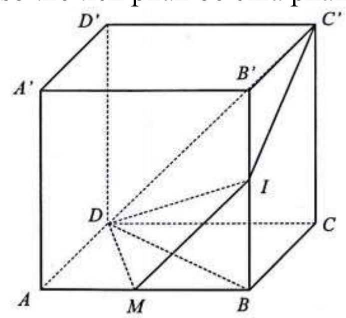
$\Rightarrow$ Thể tích chóp cụt bằng $\dfrac{7}{8}$ thể tích chóp lớn và bằng $\dfrac{14}{3}m^3$



Dạng II. Thể tích khối lăng trụ

1.Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. I là trung điểm BB'. Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng.



A. $\frac{7}{17}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Coi như khối lập phương có cạnh bằng 1.

Để giải bài toán này, ta phải xác định đúng thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC').

Lấy M là trung điểm AB thì IM là đường trung bình tam giác ABB' nên $IM//AB'//DC'$.

Suy ra bốn điểm I, M, C', D cùng thuộc một mặt phẳng $(C'ID)$.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (DIC') là tứ giác $C'DMI$.

Phần có thể tích nhỏ hơn là khối đa diện $C'IBMDC$.

Để thuận tiện tính toán ta chia khối trên thành 2 phần là tứ diện $IMBD$ và hình chóp $DIBCC'$.

$V_{IMBD} = \frac{1}{3}.IB.S_{BDM} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.IB.DA.MB = \frac{1}{6}.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

$V_{D.IBCC'} = \frac{1}{3}.DC.S_{IBCC'} = \frac{1}{3}.DC.\frac{1}{2}.(IB + CC').BC = \frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+1\right).1.\frac{1}{4}$.

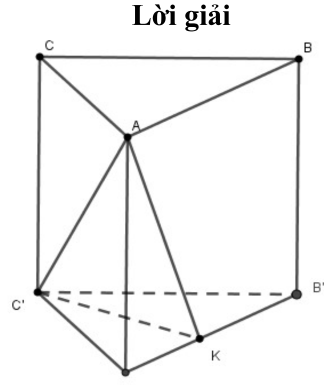
Suy ra thể tích khối có thể tích nhỏ hơn là $V_n = V_{IMBD} + V_{DIBCC'} = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$.

Thể tích phần lớn hơn là $V_l = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_n = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

Vậy tỉ lệ cần tìm là $V_n : V_l = 7 : 17$.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng, $AC = a, BC = 2a$ góc $\widehat{ACB}$ bằng 120^o. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30^o. Tính thể tích lăng trụ đã cho.

Lời giải



Kẻ $C'K \perp A'B'$. Vì lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $C'K \perp AA'$. Do đó $C'K \perp (ABB'A')$.

Góc giữa AC' và $(ABB'A')$ bằng góc $\widehat{C'AK}$ và bằng $30°$ (tam giác $C'AK$ vuông tại K nên góc $C'AK$ nhọn)
Xét tam giác ABC, áp dụng định lý cosin cho cạnh AB có:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AB.AC.\cos 120^o = 7a^2 \Rightarrow A'B'^2 = 7a^2$.

$S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CA.CB.\sin ACB = \dfrac{1}{2}a.2a.\sin 120^o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{2}C'K.A'B' = \dfrac{1}{2}C'K.a\sqrt{7}$

Do đó $\dfrac{1}{2}C'K.a\sqrt{7} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow C'K = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Xét tam giác AKC' vuông tại K nên $AK = C'K.\cot 30^o = C'K.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$

Xét tam giác $A'C'K$ vuông tại K nên

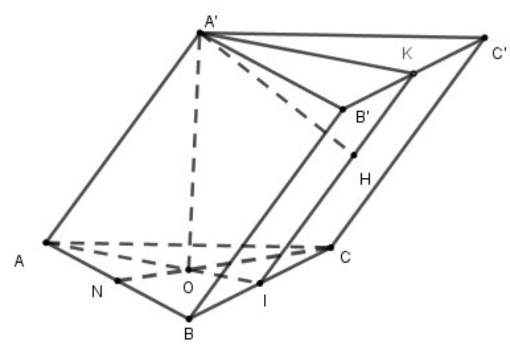
$A'K = \sqrt{A'C'^2 - KC'^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{7}} = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AK^2 - A'K^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{7}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{105}}{14}$.

Ví dụ 3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' cách đều A, B, C. Biết khoảng cách giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Lời giải



Vì đỉnh A' cách đều A, B, C nên hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà tam giác ABC đều nên hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trọng tâm O của tam giác ABC. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và BC. Từ A' kẻ $A'H \perp IK$.
Ta có $BC \perp AI, BC \perp A'O \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow A'H \perp BC$.
Lại có $A'H \perp BC, A'H \perp IK \Rightarrow A'H \perp (BCC'B')$

$\Rightarrow d_{(AA',(BCC'B'))} = d_{(A',(BCC'B'))} = A'H = \dfrac{3a}{4}$

Đặt $AA' = x > 0$.

Tam giác BAC đều cạnh a, AI là trung tuyến nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại O: $A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=\sqrt{x^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{3x^2-a^2}}{\sqrt{3}}$.

Diện tích hình bình hành $A'KIA$ là:

$$S_{A'KIA}=A'O.AI=\frac{\sqrt{3x^2-a^2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{A'KIA}=A'H.IK=\frac{3a}{4}.x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3x^2-a^2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}.x \Rightarrow x=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow A'O=a$$

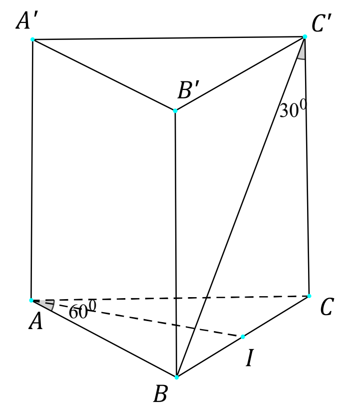
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của lăng trụ đã cho là $V=A'O.S_{ABC}=a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, góc $\widehat{BAC}$ nhọn. Góc giữa AA' và BC' là 30^0, khoảng cách giữa AA' và BC' là a. Góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là 60^0. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:



Ta có góc giữa hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ là $\widehat{BAC}=60^0$

$\Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Vì $AA'//CC'\Rightarrow\left(\widehat{AA';BC'}\right)=\left(\widehat{CC';BC'}\right)=\widehat{BC'C}=30^0$

Kẻ $AI\perp BC\Rightarrow AI\perp(BB'C'C)$

$d(AA';BC')=d(AA';(BB'C'C))=AI=a$

$$\Rightarrow BC=\frac{2a}{\sqrt{3}}, CC'=\frac{BC}{\tan 30^0}=2a\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=2a.\frac{1}{2}.a.\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

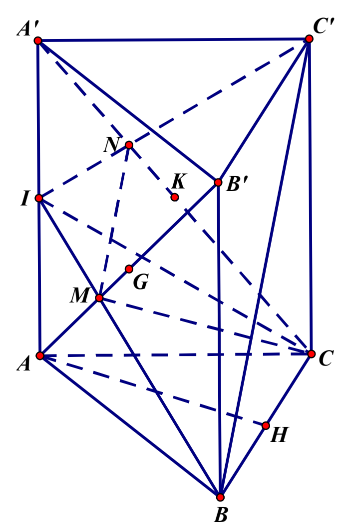
Chọn đáp án A.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC. A'B'C', có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh AB', A'C sao cho $\frac{AM}{AB'}=\frac{A'N}{A'C}=\frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối BMNC'C.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án B.



Gọi G, K lần lượt là tâm các hình chữ nhật ABB'A' và AA'C'C.

Ta có: $\frac{AM}{AB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$ (Do G trung điểm AB').

Xét tam giác ABA’ có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG}=\frac{2}{3}$. Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA’. Do đó BM đi qua trung điểm I của AA’.

Ta có: $\frac{A'N}{A'C}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$ (Do K là trung điểm A’C).

Xét tam giác AA’C’ có A’K là trung tuyến và $\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$. Suy ra N là trọng tâm của tam giác AA’C’. Do đó C’N đi qua trung điểm I của AA’.

Từ M là trọng tâm tam giác ABA’ và N là trọng tâm của tam giác AA’C’. Suy ra:

$$\frac{IM}{IB}=\frac{IN}{IC'}=\frac{1}{3}.$$

Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích các khối chóp IMNC; IBCC’. Ta có:

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{IM}{IB}.\frac{IN}{IC'}.\frac{IC}{IC}=\frac{1}{9}$. Mà $V_1+V=V_2$. Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC.Ta được AH vuông góc với mặt phẳng (BB’C’C). AA’ song song với mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng (BB’C’C) bằng khoảng cách từ A đến (BB’C’C) và bằng AH. Ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_2=\frac{1}{3}.d\left[I;\left(BB'C'C\right)\right].S_{\Delta BCC'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. Suy ra $V=\frac{8}{9}V_2=\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

2.Bài tập áp dụng

Câu 1. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy a ; biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{2}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC=a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ và mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{3}$; $AD=\sqrt{7}$. Hai mặt bên $\left(ABB'A'\right)$ và $\left(ADD'A'\right)$ cùng tạo với đáy góc $45°$, cạnh bên của hình hộp bằng 1 (hình vẽ). Thể tích của khối hôp là:

A. $\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 5. **D.** $7\sqrt{7}$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là $BCC'B'$ hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=2a$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60^0.Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{3}a^3$

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$ là 1 cm. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $8\ cm^3$. **B.** $2\sqrt{2}\ cm^3$. **C.** $3\sqrt{3}\ cm^3$. **D.** $27\ cm^3$.

Câu 8. Cho hình hộp ABCDA’B’C’D’. Gọi M là trung điểm A’B’. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với B’D’. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F=\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{7}{17}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{17}{25}$. **D.** $\dfrac{8}{17}$.

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ đều và diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

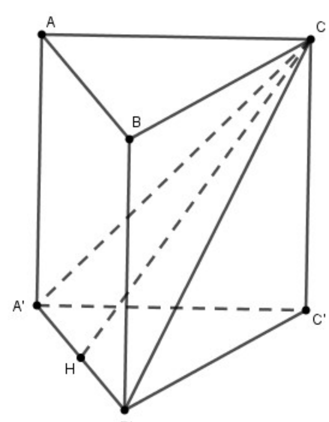
3. Hướng dẫn giải

Câu 1. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy a ; biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Ta có $AB//A'B' \Rightarrow AB//\left(A'B'C\right) \Rightarrow d_{(AB,A'C)} = d_{(AB,(A'B'C))} = d_{(B,(A'B'C))} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Đặt $AA' = x > 0$.

Tam giác $CA'B'$ cân tại C, $CA' = CB' = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Diện tích tam giác $CA'B'$ là $S_{CA'B'} = \dfrac{1}{2}.a.\sqrt{a^2 + x^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{1}{2}a.\sqrt{\dfrac{3a^2 + 4x^2}{2}} = \dfrac{1}{4}a\sqrt{3a^2 + 4x^2}$

Thể tích lăng trụ $V = x.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (1)

Lại có $V = 3V_{B.A'B'C} = 3.\dfrac{1}{3}d_{(B,(A'B'C))}.S_{A'B'C} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.\dfrac{1}{4}a.\sqrt{3a^2 + 4x^2}$.

Do đó $x.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.\dfrac{1}{4}a.\sqrt{3a^2 + 4x^2} \Leftrightarrow 5x\sqrt{3} = \sqrt{15}.\sqrt{3a^2 + 4x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$.

$V = x.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

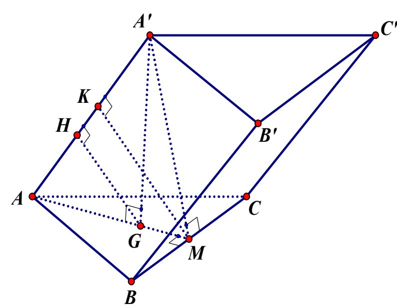
Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm B$\Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của G,M trên AA’

Vậy KM là đọan vuông góc chung củaAA’và BC, do đó $d(AA',BC) = KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\Delta AGH \sim \Delta AMH \Rightarrow \dfrac{KM}{GH} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow GH = \dfrac{2}{3}KH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$



Δ AA’G vuông tại G,HG là đường cao, $A'G = \dfrac{a}{3}$

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Chọn đáp án C.

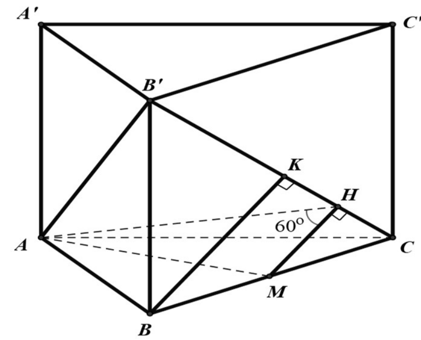
Câu 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ và mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng 60^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.



+ Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, B trên $B'C$

+ Khi đó $B'C \perp (AMH) \Rightarrow B'C \perp AH \Rightarrow \left(\widehat{(AB'C),(BB'C)}\right) = \widehat{(AH, MH)} = \widehat{AHM} = 60^\circ$.

+ Ta có $MH = \dfrac{AM}{\tan 60^\circ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HK = 2MH = a\sqrt{2}$.

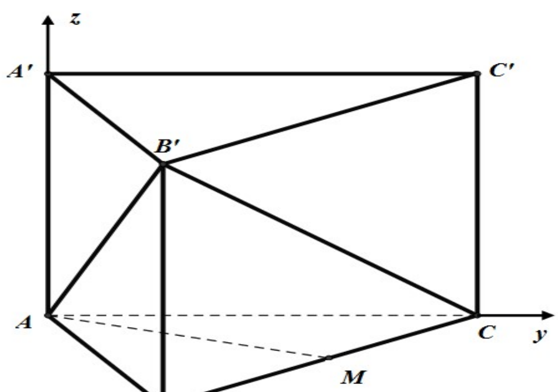
+ Mặt khác $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{B'B^2} \Rightarrow B'B = a\sqrt{3}$.

+ Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = B'B.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2.

+ Gọi chiều cao của hình lăng trụ là h.

+ Đặt hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0)$, $B\left(a\sqrt{3};0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $B'\left(a\sqrt{3};0;h\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ là trung điểm của BC.



+ Vì $AM \perp (BCC'B')$ và $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ nên $\vec{n} = (1;1;0)$ là VTPT của $(BCC'B')$.

+ Ta có $\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right] = \left(ah\sqrt{3};0;-3a^2\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = \left(h;0;-\sqrt{3}a\right)$ là VTPT của $(AB'C)$.

+ Theo giả thiết góc giữa $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \left|\cos\left(\vec{n}, \vec{n}_1\right)\right| \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|h|}{\sqrt{2}.\sqrt{h^2+3a^2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}a$

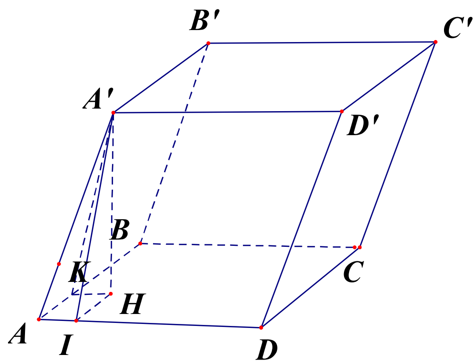
+ Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$; $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ cùng tạo với đáy góc $45°$, cạnh bên của hình hộp bằng 1 (hình vẽ). Thể tích của khối hộp là:

A. $\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 5. **D.** $7\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A



Hạ $A'H \perp (ABCD), H \in (ABCD)$; $HI \perp AD, I \in AD$; $HK \perp AB, K \in AB$

$$\left.\begin{array}{l} A'H \perp (ABCD) \Rightarrow A'H \perp AD \\ IH \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow A'I \perp AD$$

$$\left.\begin{array}{l} A'I \perp AD, IH \perp AD \\ (ADD'A') \cap (ABCD) = AD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle((ABCD),(ADD'A')) = \angle HIA' \text{ (Do } \angle HIA' < 90° \text{)}$$

Chứng minh tương tự $\angle((ABCD),(ABB'A')) = \angle HKA'$

Từ giả thiết suy ra: $\angle HIA' = \angle HKA' = 45° \Rightarrow HA' = HI = HK$

Có $ABCD$ là hình chữ nhật, $HI \perp AD, I \in AD$; $HK \perp AB, K \in AB$

Nên $AIHK$ là hình vuông suy ra $AH = HK\sqrt{2} = A'H\sqrt{2}$

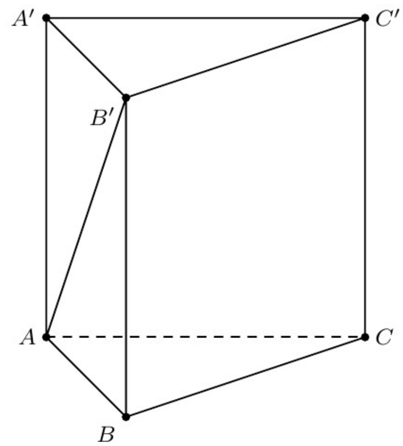
$+ A'H \perp (ABCD), H \in (ABCD) \Rightarrow AH \perp A'H \Rightarrow AA'^2 = A'H^2 + HA^2 = 3A'H^2 \to HA' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.AB.AD = \sqrt{7}$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là $BCC'B'$ hình vuông, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải



Theo giả thiết, ta có

$d\left(CC';AB'\right)=d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=CA=a$.

Do đó, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=CC'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 6. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, BC=2a. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BB'C)$ bằng 60^0.Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $a^3\sqrt{2}$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{3}a^3$

Hướng dẫn giải:

Từ A kẻ $AI\perp BC\Rightarrow I$ là trung điểm BC

$AI\perp(BCC'B')\Rightarrow AI\perp B'C$ (1)

Từ I kẻ $IM\perp B'$C (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow B'C\perp(IAM)$

Vậy góc giữa $(AB'C)$ và $(B'CB)$ là $\widehat{AMI}$ $=60^0$

Ta có $AI=\frac{1}{2}BC=a$; $IM=\frac{AI}{\tan 60^0}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

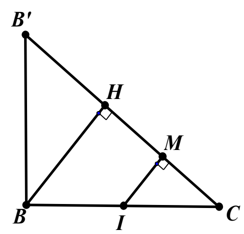
$BH=2IM=\frac{2a}{\sqrt{3}}$;

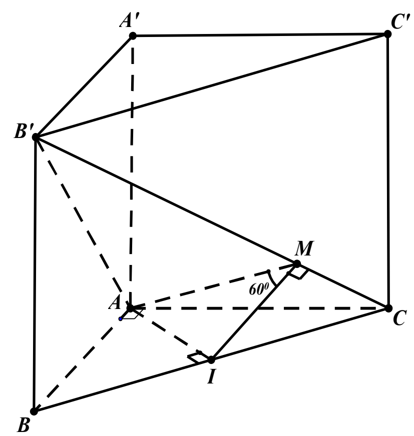
$\frac{1}{B'B^2}=\frac{1}{BH^2}-\frac{1}{BC^2}=\frac{3}{4a^2}-\frac{1}{4a^2}=\frac{1}{2a^2}$.

Suy ra $BB'=a\sqrt{2}$;

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=\frac{1}{2}a.2a=a^2$

$V_{ABC\,A'B'C'}=a\sqrt{2}.a^2=a^3\sqrt{2}$





Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa $A'C$ và $C'D'$ là 1 cm. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$là:

A. $8\ cm^3$. **B.** $2\sqrt{2}\ cm^3$. **C.** $3\sqrt{3}\ cm^3$. **D.** $27\ cm^3$.

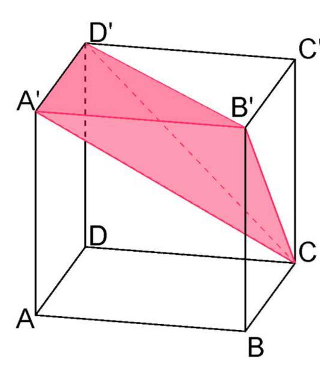
Hướng dẫn giải:

Để tìm khoảng cách giữa A’C và C’D’, ta dựng một mặt phẳng chứa A’C và song song với C’D’. Dễ thấy đó là mặt phẳng (CA’B’).

Gọi a là độ dài cạnh của khối lập phương, lúc này ta có:

$d\left(C'D',A'C\right)=d\left[C'D',\left(CA'B'\right)\right]=d\left[D',\left(CA'B'\right)\right]$

Để tính khoảng cách từ điểm D’ đến mặt phẳng (CA’B’), ta xét khối tứ diện D’CA’B’.



$V_{D'CA'B'} = \frac{1}{3}.CC'.S_{B'A'D'} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6} \ \left(cm^3\right)$

$S_{CA'B'} = \frac{1}{2}.CB'.B'A' = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \ \left(cm^2\right)$ (do tam giác CA'B' vuông tại B')

Suy ra: $d\left[D',\left(CA'B'\right)\right] = \frac{3V_{D'CA'B'}}{S_{CA'B'}} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \ \left(cm\right) \Rightarrow a = \sqrt{2}$ (cm).

Do đó $V = a^3 = 2\sqrt{2} \ cm^3$

Chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hình hộp ABCDA'B'C'D'. Gọi M là trung điểm A'B'. Mặt phẳng (P) qua BM đồng thời song song với B'D'. Biết mặt phẳng (P) chia khối hộp thành hai khối có thể tích là V_1, V_2 (Trong đó V_1 là thể tích khối chứa A). Tính tỉ số $F = \frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{7}{17}$. **B.** 1. **C.** $\frac{17}{25}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

Hướng dẫn giải:

*Gọi N là trung điể A'D'. Khi đó (P)≡BDNM).

Thấy BM∩DN∩AA'=I.

Khi đó: V_1=V(A'MNABD); V_2=V-V_1. (Với V là thể tích hình hộp)

* Ta có: $\frac{V(IA'MN)}{V(AA'B'D')} = \frac{S(AMN)}{S(A'B'D')} = \frac{1}{4}$

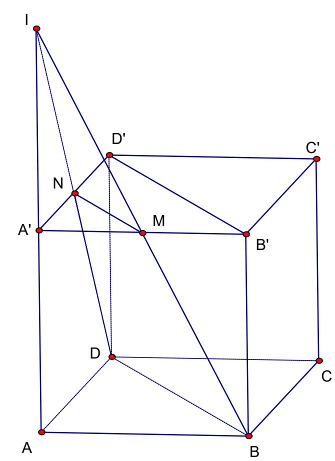
* Mà: $\frac{V(AA'B'D')}{V} = \frac{1}{6}$ nên có: $V(IA'MN) = \frac{1}{24}V$

* Lại có: $\frac{V(IA'MN)}{V(IABD)} = \frac{IA'.IM.IN}{IA.IB.ID} = \frac{1}{8}$

*Vậy: $V(IABD) = \frac{1}{3}V$

* Do đó: $V_1 = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V$ nên $V_2 = V - V_1 = \frac{17}{24}V$. Vậy:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$

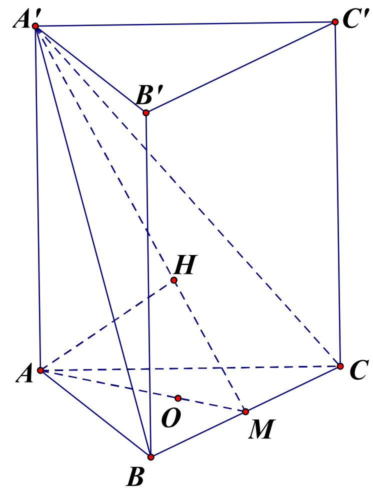


Chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng $\frac{a}{6}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'M$.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp \left(AA'M\right) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $AH \perp A'M$ $\left(2\right)$

Từ và $\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AH$.

Ta có $\dfrac{d\left(O,\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A,\left(A'BC\right)\right)} = \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = 3d\left(O,\left(A'BC\right)\right) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

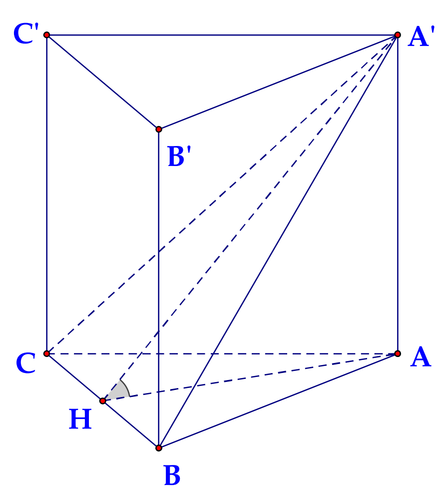
Xét tam giác vuông $A'AM$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ là $30°$, tam giác $A'BC$ đều và diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Trong (ABC) vẽ $AH \perp BC$ tại H.

Dễ thấy $BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp A'H$ nên $((A'BC),(ABC)) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA} = 30°$.

Tam giác $A'BC$ đều có $A'H$ là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến.

Ta có $AH = \dfrac{A'A}{\tan 30°} = A'A.\sqrt{3}$ và $A'H = \dfrac{A'A}{\sin 30°} = 2A'A$.

Diện tích $S_{A'BC} = BC^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BC^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow BC^2 = 4 \Rightarrow BC = 2$.

Mà $A'H = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow A'A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; AH = \dfrac{3}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = A'A.\left(\dfrac{1}{2}.AH.BC\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}.2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.