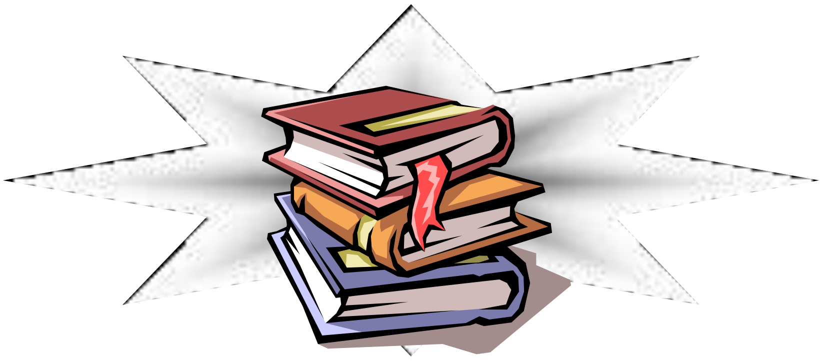
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình sưu tầm tổng hợp



CHUYÊN ĐỀ
CÁC BÀI TOÁN SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Thanh Hóa, ngày 9 tháng 3 năm 2020

CHUYÊN ĐỀ: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHINH PHƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2$ $(k \in Z)$)

2. Một số tính chất cần nhớ

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n $\in$ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 (n $\in$ N).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ (n $\in$ Z) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2.

14. Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a = mp^2 ; b = mq^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2 \ (k \in Z)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$. Vậy A là số chính phương.

Bài toán 2. Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)$ với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng 4B + 1 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta thấy biểu thức B là tổng của một biểu thức chúng ta nghĩ đến việc phải thu gọn biểu thức B trước.

Ta có:

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)\left[(n+3)-(n-1)\right] = \frac{1}{4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\right]$$

Áp dụng:

$$1.2.3 = \frac{1}{4}(1.2.3.4 - 0.1.2.3)$$

$2.3.4=\frac{1}{4}\left(2.3.4.5-1.2.3.4\right)$

$3.4.5=\frac{1}{4}\left(3.4.5.6-2.3.4.5\right)$

....

$k\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{1}{4}\left[k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)-\left(k-1\right)k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\right]$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$B=1.2.3+2.3.4+...+k\left(k+1\right)\left(k+2\right)=\frac{1}{4}k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)$$

$\Rightarrow 4B+1=k\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)+1$

Theo ví dụ 1 ta có: $4B+1=\left(k^2+3k+1\right)^2$

Vì $k\in\mathbb{N}$ nên $k^2+3k+1\in\mathbb{N}$. Vậy $4B+1$ là số chính phương.

Bài toán 3. Chứng minh rằng: $C=\underbrace{11...1}_{2n}+\underbrace{44...4}_{n}+1$ với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}+\underbrace{44...4}_{n}+1$

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$

$$C=a.10^n+a+4a+1=a\left(9a+1\right)+5a+1$$

$$\Rightarrow C=9a^2+6a+1=\left(3a+1\right)^2$$

$$\Rightarrow C=\underbrace{33...3}_{n-1}4^2.$$

Vậy C là một số chính phương.

Nhận xét:

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11...1}_{n}=a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

Bài toán 4. Cho $a=\underbrace{11...1}_{2016}$, $b=\underbrace{10...05}_{2015}$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có: $b = \underbrace{10...0}_{2015}5 = \underbrace{10...0}_{2016} - 1 + 6 = \underbrace{9...9}_{2016} + 6 = 9a + 6$.

$\Rightarrow$ ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a² + 6a + 1 = (3a + 1)²

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{2016} = \dfrac{10^{2016}-1}{9}$, $b = 10^{2016} + 5$.

$$\Rightarrow ab + 1 = \frac{10^{2016}-1}{9}.\left(10^{2016}+5\right) + 1 = \frac{\left(10^{2016}\right)^2 + 4.10^{2016} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2016}+2}{3}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \frac{\left(10^{2016}+2\right)}{3}.$$

Mà $\left(10^{2016}+2\right) \vdots 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Bài toán 5. Cho số tự nhiên *a* gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên *b* gồm 30 chữ số 2. Chứng minh *a* - *b* là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{60} = \dfrac{10^{60}-1}{9}$, $b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\dfrac{10^{30}-1}{9}$.

$$\Rightarrow a - b = \frac{10^{60}-1}{9} - \frac{2(10^{30}-1)}{9} = \frac{10^{60} - 2.10^{30} + 1}{9} = \left[\frac{10^{30}-1}{3}\right]^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Cách 2:

$b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\underbrace{11...1}_{30}$, $a = \underbrace{11...1}_{60} = \underbrace{11...1}_{30}.\underbrace{00...0}_{30} + \underbrace{11...1}_{30} = \underbrace{11...1}_{30}.10^{30} + \underbrace{11...1}_{30}$.

Đặt $c = \underbrace{11...1}_{30}$. $\Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{99...9}_{30} + 1 = 10^{30}$.

Khi đó: $a = c.\left(9c+1\right) + c = 9c^2 + 2c$. $b = 2c$.

$$\Rightarrow a - b = 9c^2 + 2c - 2c = \left(3c\right)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2.$$

Bài toán tổng quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên a gồm $2k$ chữ số 1 và số tự nhiên b gồm k chữ số 2. Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

Bài toán 6. Cho $n\in\mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có: $\dfrac{n^2-1}{3}=a(a+1)$.

Từ đó có $n^2=3a^2+3a+1 \Rightarrow 4n^2-1=12a^2+12a+3$

$\Rightarrow (2n-1)(2n+1)=3(2a+1)^2$.

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases}2n-1=3p^2\\2n+1=q^2\end{cases}$.

Khi đó $q^2=3p^2+2$ (Vô lí). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2n-1=p^2\\2n+1=3q^2\end{cases}$.

Từ đó p là số lẻ nên $p=2k+1$.

Từ đó $2n=(2k+1)^2+1 \Rightarrow n=k^2+(k+1)^2$ (đpcm).

Bài toán 7. Cho k là một số nguyên dương và $a=3k^2+3k+1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên duong b và b là một tổng gồm ba số chính phương thì b^n là một tổng của bà số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2a=6k^2+6k+2=\ 2k+1\ ^2+\ k+1\ ^2+k^2$

và $a^2=9k^4+18k^3+15k^2+6k+1=\ k^2+k\ ^2+\ 2k^2+3k+1\ ^2+\ 2k^2+k\ ^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.

b) Vì $b\,\vdots\,a$ nên đặt $b=ca$.

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2.a^2 = c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n = 2p+1$ ta được:
$b^{2p+1} = \left(b^p\right)^2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$ và cho $n = 2p+2$ ta được $b^n = \left(b^p\right)^2 b^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

🗁 **Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
2) Chứng minh $k^2 < n < (k+1)^2$ với k là số nguyên.
3) Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8
4) Chứng minh n có dạng 4k + 2; 4k + 3
5) Chứng minh n có dạng 3k + 2
6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không ? tại sao?

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có : 2018 = 3m + 2 nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng 3k + 2 với k là số tự nhiên. Mặt khác một số chính phương trình không có dạng 3k + 2 suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài toán 2. Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó n $\in$ N và n > 1 không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) + \left(n^2 + 2n + 1\right)$$

$$= \left(n^2 + n\right)^2 + \left(n+1\right)^2 > \left(n^2 + n\right)^2 \; \forall n > 1$$

$$\Rightarrow A > \left(n^2 + n\right)^2 \; \forall n > 1$$

Mặt khác:

$$\left(n^2+n+1\right)^2 = n^4+2n^3+2n^2+n^2+2n+1$$

$$= \left(n^4+2n^3+2n^2+2n+1\right)+n^2 = A+n^2 > A \quad \forall n>1$$

$$\Rightarrow A < \left(n^2+n+1\right)^2$$

Do đó $\left(n^2+n\right)^2 < A < \left(n^2+n+1\right)^2$

Ta có $(n^2 + n)$ và $(n^2 + n + 1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

Bài toán 3. Cho $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Ta có $A=1+2+\left(2^2+2^3+2^4+2^5\right)+...+\left(2^{30}+2^{31}+2^{32}+2^{33}\right)$

$$=3+2^2.\left(1+2+2^2+2^3\right)+...+2^{30}.\left(1+2+2^2+2^3\right)$$

$$=3+2.30+...+2^{29}.30=3+\left(2+...+2^{29}\right).3.10.$$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$2012^{4n} \vdots 4$; $2014^{4n} \vdots 4$, $\forall n \in N^*$.

$2013^{4n} = 2013^{4n}-1+1=\left(2013^{4n}-1\right)+1$ chia cho 4 dư 1.

$2015^{4n} = 2015^{4n}-\left(-1\right)^{4n}+1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A \vdots 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2, mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 5. Cho $2 \le n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right)$

$$= n^2\left[n^2\left(n^2 - 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left[n^2\left(n - 1\right)\left(n + 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left(n + 1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $2 \le n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = \left(n + 1\right)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2\left(n - 1\right) < n^2$. Do đó $\left(n - 1\right)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Bài toán 6. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $a = 2m + 1,\ b = 2n + 1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left(2m + 1\right)^2 + \left(2n + 1\right)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

🗁 **Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.

- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.

- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên n sao cho n(n + 3) là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Để A = n(n + 3) là số chính phương thì n(n + 3) = k² với k là số tự nhiên, do đó:

$$\begin{aligned} & n^2+3n=k^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4n^2+12n=4k^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4n^2+12n+9=4k^2+9 \\ \Leftrightarrow\ & 2n+3\ ^2-\ 2k\ ^2=9 \\ \Leftrightarrow\ & 2n+2k+3\ \ 2n-2k+3\ =9 \end{aligned}$$

Ta có $2n+2k+3 \geq 2n-2k+3$

Và 9 = 9.1 = 3.3 = (-1).(-9) = (-3).(-3)

Trường hợp 1 : $\begin{cases} 2n+2k+3=9 \\ 2n-2k+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+k=3 \\ n-k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow A=4$

Trường hợp 2 : $\begin{cases} 2n+2k+3=3 \\ 2n-2k+3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+k=0 \\ n-k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow A=0$

Trường hợp 3 : $\begin{cases} 2n+2k+3=-1 \\ 2n-2k+3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+k=-2 \\ n-k=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-4 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow A=4$

Trường hợp 4 : $\begin{cases} 2n+2k+3=-3 \\ 2n-2k+3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+k=-3 \\ n-k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-3 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow A=0$

Vậy khi n = -4 ; -3 ; 0 ; 1 thì ta có A là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n+1955=a^2$; $n+2014=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Khi đó $b^2-a^2=59 \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=59 \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=29 \\ b=30 \end{cases}$.

Dễ dàng suy ra $n=-1114$.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

$a)\quad A = n^2 - n + 2$ $\qquad\qquad b)\quad B = n^5 - n + 2$

Hướng dẫn giải

a) Với n = 1 thì A = n^2 – n + 2 = 2 không là số chính phương

Với n = 2 thì A = n^2 – n + 2 = 4 là số chính phương

Với n > 2 thì A = n^2 – n + 2 không là số chính phương vì

$n-1^{\,2} = n^2 - \ 2n-1 \ < n^2 - \ n-2 \ < n^2$

Vậy n = 2 thì A là số chính phương.

b) Ta có: $n^5 - n = \ n^2 - 1 \ n \ n^2 + 1$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5.

Với $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Do đó $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $B = n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy không có giá trị nào của n thỏa để B là số chính phương.

Bài toán 4. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$, $2n+1$, $5n+1$ đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Nếu $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ thì $n+1 = 3k+2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k+2$ thì $2n+1 = 6k+5$, cho cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$.

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n+1$ lẻ. Do $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \vdots 8$.

n chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n \vdots 24$. Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2$, $2n+1 = 49 = 7^2$, $5n+1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của n phải tìm là 24.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n ≥ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì 1! = 1 = 1^2 là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2 là số chính phương

Với n ≥ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3.

Bài toán 6. Tìm số nguyên dương n sao cho $A=(n+3)(4n^2+14n+7)$ là số một chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4n^2+14n+7=(n+3)(4n+2)+1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và n + 3 phải là số chính phương.

Do $n\in Z^+$ nên ta có $(2n+3)^2\le 4n^2+14n+7<(2n+4)^2$.

$\Rightarrow 4n^2+14n+7=(2n+3)^2\Rightarrow n=1$. Khi đó n + 3 = 4 là số chính phương.

Thử lại, với $n=1$, ta có $A=10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài toán 7. Tìm $3\le a\in\mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}\Leftrightarrow \overline{a(a-1)}^2=\overline{(a-2)aa(a-1)}$. (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do a là chữ số nên $a\le 9$. Kết hợp với $3\le a\in\mathbb{N}$ nên $a\in\{5;6;7\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2=5776$.

Bài toán 8. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n+9 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^n+9=m^2,\ m\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(m-3)(m+3)=2^n$.

Vì $m-3<m+3$ nên $\begin{cases}m-3=2^a\\m+3=2^b\end{cases}$, với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Ta có $2^b-2^a=6\Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a}-1\right)=6$.

Vì $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\vdots 2$ mà $2^a\left(2^{b-a}-1\right)\not\vdots 4$ nên $a=1$. Điều này dẫn đến $m=5$ và $n=4$.

🗁 **Dạng 4: Tìm số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương A = k², với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab}-\overline{cd}=1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100\left(1+\overline{cd}\right)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100,\ n\in Z$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd}=n^2-100=(n-10)(n+10)$.

Vì $n<100$ và 101 là số nguyên tố nên $n+10=101$.

$\Rightarrow n=91$.

Thử lại: $\overline{abcd}=91^2=8281$ có $82-81=1$.

Vậy $\overline{abcd}=8281$.

Bài toán 2. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Hướng dẫn giải

Gọi $A=\overline{abcd}=k^2$.

Theo đề bài ta có:

Ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$.

(với $k, m \in N^*$ và $31 < k < m < 100$, $a, b, c, d = \overline{1,9}$).

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow$ (m - k)(m + k) = 1111 (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

Vậy A = 2025, B = 3136.

Bài toán 3. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a; b; c; d là các số tự nhiên

và $1 \le a \le 9$; $0 \le b, c, d \le 9$.

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow$ d $\in \{0,1,4,5,6,9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5.

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \le k < 100$, $k \in N$.

Do k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45 (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và số viết bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^2(a+b)$. Suy ra a+b là số chính phương.

Khi đó $\overline{ab}$ là một lập phương và a + b là một số chính phương.

Vì $10 \le \overline{ab} \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là 27.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a;b;c$ là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là 1 số chính phương.

Bài 2: Tìm số nguyên dương n sao cho $\dfrac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương .

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa 2012-2013)

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A=n^4+n^3+n^2$ có giá trị là số chính phương.

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An 2010-2011)

Bài 4: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì biểu thức

A= $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ có giá trị là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

a) $A = 224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9$ b) $B = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$

Bài 6: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số liên tiếp không thể là số chính phương.

Bài 7: Cho dãy số $49; 4489; 444889; 44448889; ...$

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Bài 9: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

Bài 11: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho n + 1 và 2n + 1 đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Bài 12: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 13 : Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Bài 14: Cho số nguyên dương n và các số A = $\underbrace{444....4}_{2n}$ (A gồm 2n chữ số 4); B = $\underbrace{888.....8}_{n}$ (B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng A + 2B + 4 là số chính phương.

(Đề vào chuyên toán Hà Nam năm 2013-2014)

Bài 15: Giả sử $N = 1.3.5.7....2007$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N-1,\ 2N,$ và $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

Bài 16: Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $\left(S_1 = 2, S_2 = 2+3, S_3 = 2+3+5, ...\right)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương .

(Đề vào chuyên toán sư phạm Hà Nội năm 2013-2014)

Bài 17: Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

(Đề vào chuyên Hưng Yên năm 2013-2014)

Bài 18: Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là 1 số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 19: Cho các số nguyên a, b, c ≠ 0 thoả mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Bài 20: Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc năm 2018-2019)

Bài 21: Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chính phương, chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

(Đề thi HSG lớp 9 quận Ngô Quyền năm 2018-2019)

Bài 22: *(Đề thi HSG lớp 9 huyện Cẩm Giang năm 2018-2019)*

Cho $S = 4 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}$. Chứng tỏ S không phải là số chính phương.

Bài 23: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 TP Bắc Giang năm 2017-2018)

Bài 24: Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kim Thành năm 2012-2013)

Bài 25: Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n + 3^n + 4^n$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 26: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2014$ là một số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 Trường Thanh Văn năm 2017-2018)

Bài 27: Tìm các số nguyên x sao cho x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam năm 2018-2019)

Bài 28: Tìm số tự nhiên *A* biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A+51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của *A* là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Đan Phượng năm 2018-2019)

Bài 29: Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2+n+503$.

Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2+n+503=m^2$.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 30: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thăng Bình năm 2018-2019)

Bài 31: Tìm số tự nhiên n sao cho: n + 24 và n – 65 là hai số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh năm 2018-2019)

Bài 32: Chứng minh rằng: $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Tiền Hải năm 2017-2018)

Bài 33: Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho: n^4+n^3+1 là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1$ và $5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)$ đều là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Bài 35: Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Thuận năm 2019-2020)

Bài 36: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)

Bài 37: Cho a, b, c là các số nguyên dương nguyên nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $a+b$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Thái Nguyên năm 2016-2017)

Bài 38: Chứng minh rằng nếu a và b là các số tự nhiên lẻ thì a^2+b^2 không phải là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hòa Bình năm 2016-2017)

Bài 39: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2+3^n là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quốc Học Huế năm 2017-2018)

Bài 40: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Định năm 2017-2018)

Bài 41: Tìm các số nguyên m sao cho m^2+12 là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm 2017-2018)

Bài 42: Tìm tất cả các cặp (x; y) nguyên dương sao cho x^2+8y và y^2+8x là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Toán Hải Dương năm 2017-2018)

Bài 43: Cho biểu thức $A=\left(m+n\right)^2+3m+n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì n^3+1 chia hết cho m.

(Đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2017-2018)

Bài 44: Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A=n^4+4n^{p-1}$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2017-2018)

Bài 45: Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $m+n+1$ là một ước nguyên tố của $2\left(m^2+n^2\right)-1$. Chứng minh rằng $m.n$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 46: Tìm các giá trị nguyên của x để $M=x^4+\left(x+1\right)^3-2x^2-2x$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Bài 47: Cho số tự nhiên $n\ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Đại học Vinh Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 48: Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Bài 49: Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2018-2019)

Bài 50: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

Bài 51: Cho $A=m^2n^2-4m-2n$ với m,n là các số nguyên dương. Khi $n=2$ tìm m để A là số chính phương. Khi $n\ge 5$ chứng minh rằng A không thể là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2018-2019)

Bài 52: Chứng minh nếu $a;b$ là các số nguyên thỏa mãn hệ thức $2a^2+a=3b^2+b$ thì $a-b$ và 2a+2b+1 là những số chính phương.

Bài 53: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2+2x+20$ có giá trị là một số chính phương.

Bài 54. Tìm các số nguyên x sao cho $A=x(x-1)(x-7)(x-8)$ là một số chính phương.

Bài 55. Cho $A=\underbrace{11...1}_{2n}-\underbrace{88...8}_{n}+1$. Chứng minh A là một số chính phương.

Bài 56. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để 2^x+5^y là số chính phương.

Bài 57. Tìm $n \in N$ để $2^8+2^{11}+2^n$ là số chính phương .

Bài 58. Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Bài 59. Cho các số: $\begin{cases} A=\underbrace{11.....11}_{2m} \\ B=\underbrace{11.....11}_{m+1} \\ C=\underbrace{66.....66}_{m} \end{cases}$; Chứng minh rằng: $A+B+C+8$ là một số chính phương.

Bài 60. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội năm 1992)

Bài 61. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho có các số nguyên $a,\ b$ thỏa mãn $n^2=a+b$ và $n^3=a^2+b^2$.

(Romanian MO 2004)

Bài 62. Hãy tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ biết rằng $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$

Bài 63. Có tồn tại hay không 2013 số nguyên dương $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2013}$ sao cho các số

$a_1^2+a_2^2,\ a_1^2+a_2^2+a_3^2,\ a_1^2+a_2^2+...+a_{2013}^2$ đều là số chính phương?

Bài 64. Thay các dấu * bằng các chữ số sao cho số sau đây là một số tự nhiên.

$$A=\sqrt[6]{4****}$$

Bài 65. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n=\left(10^n+10^{n-1}+...+10+1\right)\left(10^{n+1}+5\right)+1$. Chứng minh rằng A_n là số chính phương.

Bài 66. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Bài 67. Có hay không các số x, y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương ?

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP.HCM năm 1994)

Bài 68. Có tồn tại hay không một số tự nhiên n sao cho số $k=\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ là một số hữu tỉ.

Bài 69. Cho dãy số , $a_2=144$, $a_3=1444$, $a_n=1\underbrace{444...44}_{n\ chu\ so\ 4}$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho a_n là số chính phương.

Bài 70. Chứng minh rằng có vô số bộ ba 3 số tự nhiên (a,b,c) sao cho a,b,c nguyên tố cùng nhau và số $n=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ là một số chính phương.

Bài 71. Tìm các số nguyên m và n để cho đa thức $p(x)=x^4+mx^3+29x^2+nx+4, x\in\mathbb{Z}$ là một số chính phương.

Bài 72.

1. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất, $a\neq 0$ sao cho a chia hết cho 6 và 1000a là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên b nhỏ nhất sao cho số $(b-1)$ không chia hết cho 9, b chia hết cho tích của bốn số nguyên tố liên tiếp và 2002.b là số chính phương.

Bài 73. Cho a và b là 2 số tự nhiên, a^2-b^2 có thể là một số chính phương không?

Bài 74. Tìm số tự nhiên $k=\overline{ab}$ có hai chữ số sao cho $k+ab=(a+b)^2$

Bài 75. Tìm tất cả các số nguyên n để $A=2017^2\ \ n^4+n^3+n^2$ là số chính phương

(Tạp chí Toán & học tuổi trẻ số 468)

Bài 76. Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-37}{n+43}$ là bình phương của một số hữu tỷ dương tùy ý.

(HSG Nam Định 2015 -2016)

Bài 77. Tìm số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\overline{abc}=n^2-1$ và $\overline{cba}=(n-2)^2$ với $n\in\mathbb{Z}, n>2$.

(HSG Sóc Trăng 2015 - 2016)

Bài 78. Tìm số tự nhiên n sao cho $n+12$ và $n-11$ đều là số chính phương.

(HSG Sóc Trăng 2016 - 2017)

Bài 79. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-14n-256$ là một số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2014 - 2015)

Bài 80. Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết n + 4 và 2n đều là các số chính phương.

(HSG Trà Vinh 2016 - 2017)

Bài 81. Cho n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A=1010n^2+2010(n+p)+10^{10^{195}}$ có thể viết dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.

(HSG Lâm Đồng 2016 - 2017).

Bài 82. Tìm nghiệm nguyên dương x để 3^x+171 là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Bài 83. Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho 5^x+12^x là một số chính phương.

(HSG Bắc Giang 2015 - 2016)

Bài 84. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho A là một số chính phương với $A=4n^4+22n^3+37n^2+12n-12$.

(Chuyên Yên Bái 2016 - 2017).

Bài 85. Tìm các số nguyên k để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

(Chuyên Hải Dương 2015 - 2016).

Bài 86. Tìm số tự nhiên n (n > 1) bé nhất sao cho $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}$ là số chính phương.

(Tạp chí toán học tuổi trẻ số 362).

Bài 87: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương.

Bài 88: Lấy một số tự nhiên có 2 chữ số chia cho số có 2 chữ số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của 2 chữ số tạo thành số đó. Tìm số tự nhiên ấy.

Bài 89. Viết các số 1, 2, 3, …, 2007 thành dãy theo thứ tự tùy ý được số A. Hỏi số $A+2008^{2007}+2009$ có phải là số chính phương hay không? Vì sao?

(Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 377)

Bài 90. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $x^5+y^5=2x^2y^2$. Chứng minh $1-xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 91. Cho m,n là hai số nguyên dương lẻ sao cho n^2-1 chia hết cho $[m^2+1-n^2]$. Chứng minh rằng $[m^2+1-n^2]$ là số chính phương.

Bài 92. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tuỳ ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Bài 93. Chứng minh rằng $n^5+1999n+2017$ $(n\in N)$ không phải là số chính phương.

(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2017 – 2018)

Bài 94. Giả sử n là số nguyên dương thoả mãn điều kiện n^2+n+3 là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2+6n+2017$ không phải số chính phương.

(Chuyên Tỉnh Quảng Ngãi 2017-2018)

Bài 95. Cho x,y là các số nguyên thoả mãn $2x^2+x=3y^2+y$.

Chứng minh $x-y; 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

(HSG Tỉnh Thanh Hoá 2015-2016)

Bài 96. Cho biểu thức $A=2(1^2+2^2+...+2017^2)$. Hỏi A có là bình phương của một số nguyên hay không?

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 97. Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2016a^2+a=2017b^2+b$ (1).

Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 98. Cho x,y,z là các số nguyên tố cùng nhau và thoả mãn $(x-z)(y-z)=z^2$. Chứng minh rằng tích 2017^2xyz là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 99: Xác định số điện thoại của THCS thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

(HSG Bình Dương 2016 – 2017)

Bài 100: Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho $C = 2019^n + 2020$ là số chính phương.

(HSG Quảng Bình 2018 – 2019)

Bài 101: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 102: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n.(n-1).(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 103: Cho số nguyên tố p $(p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2018 – 2019)

Bài 104: Từ 625 số tự nhiên liên tiếp 1; 2; 3; …; 625 chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

(HSG Hưng Yên 2017 – 2018)

Bài 105: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.

(HSG Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 106: Tìm các số có 2 chữ số $\overline{ab}$ $(a \neq b)$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương

(HSG Hưng Yên 2015 – 2016)

Bài 107: Cho $a = \underbrace{111...1}_{2017\text{ cs }1}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016\text{ cs }0}5$. Chứng minh rằng số $M = ab + 1$ là số chính phương.

(HSG Đăk Lăk 2015 – 2016)

Bài 108: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1 + \frac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)} \text{ là một số chính phương}$$

(Trích đề chuyên toán Đại học sư phạm Hà Nội 2014 – 2015)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG II. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1:

Ta có: $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+1=(a+b)(b+c)$; $c^2+1=(b+c)(c+a)$

Do đó: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2:

Đặt n(2n – 1) = 26q² (1)

Do VP chẵn và (2n – 1) lẻ nên n chẵn hay n = 2k

Do đó: (1) suy ra k(4k – 1) = 13q² (2)

Nhận thấy (k, 4k – 1) = 1 nên:

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}k=u^2\\4k-1=13v^2\end{cases}\text{v}\begin{cases}k=13u^2\\4k-1=v^2\end{cases}$$

Xét trường hợp 1 ta có:

$$\begin{cases}k=u^2\\4k-1=13v^2\end{cases}\Rightarrow 4k=13v^2+1=12v^2+v^2+1\Rightarrow v^2+1\vdots 4\Rightarrow v^2\equiv 3\ (\text{mod}\ 4)\ (\text{vo ly})$$

Xét trường hợp 2 ta có:

$$\begin{cases}k=13u^2\\4k-1=v^2\end{cases}\Rightarrow 4k=v^2+1(\text{vo ly})$$

Vậy không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 3:

Ta có A = $n^4+n^3+n^2=n^2(n^2+n+1)$

Với n = 0 thì A = 0 (thỏa mãn)

Với n ≠ 0 thì A là số chính phương khi và chỉ khi n^2+n+1 là số chính phương.

Khi đó $n^2+n+1=k^2\ (k\in\mathbb{N})$. $\Rightarrow 4(n^2+n+1)=4k^2\Rightarrow(2n+1)^2-4k^2=-3$

$\Rightarrow(2n+1-2k)(2n+1+2k)=-3$

Vì $2n+1+2k\ge 2n+1-2k,\ \forall n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}$ nên

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2n+1-2k=-3\\2n+1+2k=1\end{cases}\\\begin{cases}2n+1-2k=-1\\2n+1+2k=3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}2n+1-2k=-3\\2n+1+2k=1\end{cases}\Rightarrow n=-1\quad(\text{thỏa mãn})$$

$$\begin{cases}2n+1-2k=-1\\2n+1+2k=3\end{cases}\Rightarrow n=0\quad(\text{loại})$$

Vậy $n=0;n=-1$

Bài 4:

Ta có A = $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$$= (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$$

Đặt $x^2+5xy+5y^2=t \quad (t\in Z)$ thì

$$A=(t-y^2)(t+y^2)+y^4=t^2-y^4+y^4=t^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$$

Vì x, y, z $\in$ Z nên $x^2\in Z,\ \ 5xy\in Z,\ \ 5y^2\in Z\ \Rightarrow x^2+5xy+5y^2\in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 5:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9\\&=224.10^{2n}+99...9.10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+\ 10^{n-2}-1\ .10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+10^{2n}-10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=225.10^{2n}-90.10^{n}+9\\&=\ {15.10^{n}-3}^{\ 2}\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

b) Ta có :

$$\begin{aligned}B&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6\\&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}+1\\&=\underbrace{11...1}_{n}.10^{n}+5.\underbrace{11...1}_{n}+1\\&=\frac{10^{n}-1}{9}.10^{n}+5.\frac{10^{n}-1}{9}+1\\&=\frac{10^{2n}-10^{n}+5.10^{n}-5+9}{9}\\&=\frac{10^{2n}+4.10^{n}+4}{9}\\&=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^{2}\end{aligned}$$

Do đó B là số chính phương.

Bài 6:

Giả sử: $n-2; n-1; n; n+1; n+2$ với $2\le n\in\mathbb{N}$ là 5 số tự nhiên liên tiếp

Ta có: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$

Vì n^2 không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $(n^2+2)\not\vdots\, 5 \Rightarrow 5(n^2+2)$ không là số chính phương.

Vậy tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không phải số chính phương.

Bài 7:

Ta có $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9=\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88..8}_{n}+1=\underbrace{44...4}_{n}.10^n+8.\underbrace{11...1}_{n}+1$

$=4.\dfrac{10^n-1}{9}.10^n+8.\dfrac{10^n-1}{9}+1$

$=\dfrac{4.10^{2n}-4.10^n+8.10^n-8+9}{9}=\dfrac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}$

$=\left(\dfrac{2.10^n+1}{3}\right)$

Ta thấy $2.10^n+1=200...01$ (có $n-1$ chữ số 0) có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

Suy ra $\left(\dfrac{2.10^n+1}{3}\right)\in\mathbb{Z}$ hay các số có dạng $44...488...89$ là số chính phương.

Bài 8:

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên

Nên $p\,\vdots\,2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1=m^2\,(m\in\mathbb{N})$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2k+1\,(k\in\mathbb{N})$.

Ta có: $m^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k(k+1)\,\vdots\,4$ mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p+1$ là số chính phương.

b) $p=2\cdot3\cdot5\cdots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$

Nên $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 9:

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in N$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow$ 2 số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) \vdots 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 10:

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n, n+1, n+2 \left(n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right)$.

Ta có: $\left(n-2\right)^2 + \left(n-1\right)^2 + n^2 + \left(n+1\right)^2 + \left(n+2\right)^2 = 5.\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8

Do đó n^2+2 không thể chia hết cho 5

Suy ra: $5.\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương

Hãy nói cách khác: A không là số chính phương

Bài 11:

Vì $n + 1$ và $2n + 1$ là các số chính phương nên đặt $n + 1 = k^2$, $2n + 1 = m^2$ ($k, m \in N$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a + 1 \Rightarrow m^2 = 4a(a + 1) + 1$

Mà $n = \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{4a(a+1)}{2} = 2a(a+1)$

$\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ $n + 1$ lẻ $\Rightarrow$ k lẻ $\Rightarrow$ đặt $k = 2b + 1$ (với $b \in N$) $\Rightarrow k^2 = 4b(b+1) + 1$

$\Rightarrow n = 4b(b+1) \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Ta có: $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod 3$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod 3$

$m^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow m^2 - k^2 \vdots 3$ hay $(2n + 1) - (n + 1) \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Mà $(8; 3) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ n $\vdots$ 24

Bài 12:

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb}$ = n² với a, b $\in$ N, 1 $\le$ a $\le$ 9; 0 $\le$ b $\le$ 9

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b}$ = 11.(100a + b) = 11.(99a + a + b) (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb}$ $\vdots$ 11 $\Rightarrow$ a + b $\vdots$ 11

Mà 1 $\le$ a $\le$ 9; 0 $\le$ b $\le$ 9 nên 1 $\le$ a + b $\le$ 18 $\Rightarrow$ a + b = 11

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó 9a + 1 là số chính phương

Bằng phép thử với a = 1; 2;…; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thoả mãn $\Rightarrow$ b = 4

Số cần tìm là: 7744

Bài 13:

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n - 1 ; 2n + 1 ; 2n + 3 (n $\in$ N)

Ta có : A = $(2n – 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n +3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa}$ = 1111 . a với a lẻ và 1 $\le$ a $\le$ 9

$\Rightarrow$ 12n(n + 1) = 11(101a – 1)

$\Rightarrow$ 101a – 1 $\vdots$ 3 $\Rightarrow$ 2a – 1 $\vdots$ 3

Vì 1 $\le$ a $\le$ 9 nên 1 $\le$ 2a – 1 $\le$17 và 2a – 1 lẻ nên 2a – 1 $\in \{3;9;15\}$

$\Rightarrow$ a $\in \{2;5;8\}$

Vì a lẻ $\Rightarrow$ a = 5 $\Rightarrow$ n = 21

3 số cần tìm là: 41; 43; 45

Bài 14:

Ta có $A=\underbrace{444.....4}_{2n}=\underbrace{444......4}_{n}\underbrace{000...0}_{n}+\underbrace{444.....4}_{n}=\underbrace{444....4}_{n}.\left(10^n-1\right)+\underbrace{888....8}_{n}$

$$=4.\underbrace{111....1}_{n}.\underbrace{999....9}_{n}+B=4.\underbrace{111....1}_{n}.9.\underbrace{111....1}_{n}+B=\left(6.\underbrace{111....1}_{n}\right)^2+B$$

$$=\left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n}\right)^2+B=\left(\frac{3}{4}B\right)^2+B$$

Khi đó

$$A+2B+4=\left(\frac{3}{4}B\right)^2+B+2B+4=\left(\frac{3}{4}B\right)^2+2.\frac{3}{4}B.2+4=\left(\frac{3}{4}B+2\right)^2$$

$$=\left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n}+2\right)^2=\left(3.\underbrace{222....2}_{n}+2\right)^2=\left(\underbrace{666....6}_{n-1}8\right)^2$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 15:

a. $2N-1=2.1.3.5.7...2007-1$

Có $2N \vdots 3 \Rightarrow 2N-1$ không chia hết cho 3 và $2N-1=3k+2\left(k\in\mathbb{N}\right)$

Suy ra $2N-1$ không là số chính phương.

b. $2N=2.1.3.5.7...2007$

Vì N lẻ nên N không chia hết cho 2 và $2N \vdots 2$.

Nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$2N$ chẵn nên $2N$ không là số chính phương.

c. $2N+1=2.1.3.5.7....2007+1$

$2N+1$ lẻ nên $2N+1$ không chia hết cho 4.

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N+1$ không chia cho 4 dư 1.

Do đó: $2N+1$ không là số chính phương.

Bài 16:

Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ n. Giả sử tồn tại số tự nhiên m mà

$S_{m-1}=a^2;S_m=b^2\left(a,b\in N^*\right)$

Vì $S_1=2;S_2=10;S_4=17\Rightarrow m>4$

Ta có: $p_m=S-S_{m-1}=b^2-a^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$. Vì p_m là số nguyên tố và b + a > 1.

Nên $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=p_m \end{cases}$. Suy ra: $p_m=2b-1=2\sqrt{S_m}-1\Rightarrow S_m=\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2$ (1)

Do $m>4$ nên $S_m\le\left(1+3+5+...+p_{m-1}+p_m\right)+2-1-9=\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2$

mâu thuẫn với (1)

Nên trong dãy số S_1, S_2,…… không tồn tại hai số hạng liên tiếp là số chính phương.

Bài 17:

Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là: 1; p; p^2; p^3; p^4

Đặt $S = 1+ p + p^2 + p^3 + p^4$

Giả sử $S = n^2 \Rightarrow 4n^2=4p^4+4p^3+4p^2+4p+4\ (1)\ \left(n\in\mathbb{Z}\right)$

Ta có: $4p^4+4p^3+p^2<\left(2n\right)^2<4p^4+p^2+4+4p^3+8p^2+4p$

$\Leftrightarrow\left(2p^2+p\right)^2<\left(2n\right)^2<\left(2p^2+p+2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4n^2=\left(2p^2+p+1\right)^2\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $p^2-2p-3=0\Leftrightarrow p=3$

Thử lại với p = 3 thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là: p = 3.

Bài 18:

Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2\left(k \in N\right) \Leftrightarrow \left(n-7\right)^2 - k^2 = 305$

$\Leftrightarrow \left(n-k-7\right)\left(n+k-7\right) = 305 = 1.305 = 61.5$

Xét các trường hợp: do $n + k - 7 > n - k - 7$

Trường hợp 1: $n - k - 7 = 1$ và $n + k - 7 = 305 \Rightarrow n = 160$ (nhận)

Trường hợp 2: $n - k - 7 = -305$ và $n + k - 7 = -1 \Rightarrow n = -146$ (loại)

Trường hợp 3: $n - k - 7 = 5$ và $n + k - 7 = 61 \Rightarrow n = 40$ (nhận)

Trường hợp 4: $n - k - 7 = -61$ và $n + k - 7 = -5 \Rightarrow n = -26$ (loại)

Vậy n = 40, k = 28 hoặc n = 160 , k = 152

Bài 19:

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc} \Rightarrow ab+bc+ca=1$

$\Rightarrow 1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = a(a+b)+c(a+b) = (a+b)(a+c)$

$\Rightarrow 1+b^2 = ab+bc+ca+b^2 = b(a+b)+c(a+b) = (a+b)(b+c)$

$\Rightarrow 1+c^2 = ab+bc+ca+c^2 = b(a+c)+c(a+c) = (a+c)(b+c)$

$\Rightarrow \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) = \left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(a+c\right)^2 = \left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2$ Vì a, b, c là các số nguyên $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \in Z$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

Bài 20:

- Để A là số chính phương thì $A = n^2 + n + 6 = a^2$ ($a \in N$)

- Ta có: $n^2 + n + 6 = a^2$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4a^2$

$\Leftrightarrow \left(2a\right)^2 - \left(2n+1\right)^2 = 23$

$\Leftrightarrow \left(2a+2n+1\right).\left(2a-2n-1\right) = 23$

- Vì a, n là các số tự nhiên nên (2a +2n +1) là số tự nhiên và

2a + 2n + 1 > 2a – 2n -1. Do đó

$$\begin{cases} 2a+2n+1=23 \\ 2a-2n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=24 \\ 4n=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ n=5 \end{cases}$$

- Vậy n = 5

Bài 21:

Ta có

+ d là số nguyên tố và $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d = 5$.

$+\overline{abcd}<10000=100^2\Rightarrow\overline{abcd}=\left(\overline{x5}\right)^2$; với $x\in\{1;2;3;4;...;9\}$

+ Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 $\left(\overline{x5}\right)^2\vdots 9\Rightarrow\overline{x5}\vdots 3\Rightarrow x+5\in\{6;9;12\}\Rightarrow x\in\{1;4;7\}$

Kiểm tra lại ta được hai số: 2015 và 5625.

Bài 22:

Gọi M = $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}$ $\Rightarrow$ S = 2 + M

M = 2M – M = $(2^2 + 2^3 + ... + 2^{98} + 2^{99}) - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98})$

M = $2^{99} - 2$

$\Rightarrow$ S = $2^{99} = (2^4)^{24}.2^3 = 8.16^{24}$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow$ S có chữ số tận cùng là 8

Nên S không là số chính phương.

Bài 23:

Vì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3+14x^2+9x-6=k^2$ với $k\in N$

Ta có $4x^3+14x^2+9x-6=...=(x+2)(4x^2+6x-3)$ nên ta có $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$

Đặt $(x+2,4x^2+6x-3)=d$ với $d\in N^*$

Ta có $x+2\vdots d\Rightarrow(x+2)(4x-2)\vdots d\Rightarrow 4x+6x-4\vdots d$

Ta lại có $4x^2+6x-3\vdots d\Rightarrow\left(4x^2+6x-3\right)-\left(4x^2+6x-4\right)=1\vdots d\Rightarrow d=1$

Vậy $(x+2,4x^2+6x-3)=1$

mà $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$ nên ta có

x+2 và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b\in N^*$

Vì x > 0 nên ta có $4x^2<b^2<4x^2+12x+9\Leftrightarrow(2x)^2<b^2<(2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2\Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1\Leftrightarrow x=2$

Với x = 2 ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương.

Bài 24:

Giả sử: $n^2+17=k^2$ ($k\in N$) và $k>n$ $\Rightarrow$ $(k-n)(k+n)=17\Leftrightarrow\begin{cases}k-n=1\\k+n=17\end{cases}\Rightarrow n=8$

Vậy với $n=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 25:

Đặt $A=2^n+3^n+4^n$. Nếu $n=1$ thì $A=9$ (thỏa mãn)

Xét $n>1$ hay $n\geq 2$ thì 2^n+4^n chia hết cho 4.

Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3.

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n=1$.

Bài 26:

Giả sử $n^2+2014=k^2(k^2\in N)$

$$\Leftrightarrow 2014=k^2-n^2 \Leftrightarrow 2014=(k+n)(k-n) \quad (1)$$

Suy ra (k + n) và (k – n) = 2k là số chẵn nên (k + n) và (k – n) cùng tính chẵn lẻ

Do 2014 là số chẵn nên (k + n) và (k – n) đều là số chẵn

$$\Rightarrow (k+n)(k-n)\vdots 4$$

Khi đó từ (1) suy ra ta lại có $2014\vdots 4$ (điều này vô lí)

Vậy không có số nguyên n nào để n^2+2014 là số chính phương

Bài 27:

Ta có: $x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)$

* Xét $x-2=0\Rightarrow x=2$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Xét $x^2-x-1=0$: Loại.

* Xét $x-2=x^2-x-1$ ta có: $x=1$.

* TH $x\neq 2;\ x\neq 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $(x-1;x^2-x-1)=1$.

Nên x^3-3x^2+x+2 là số chính phương khi $x-2$ và x^2-x-1 cùng là số chính phương.

Để x^2-x-1 là số chính phương thì $x^2-x-1=y^2$ với $y\in\mathbb{Z}$.

Tìm được $x=2$ (loại do $x\neq 2$) và $x=-1$. Thử lại $x=-1$ ta có x^3-3x^2+x+2 có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x=-1$ (loại).

Vậy $x=2$ hoặc $x=1$ thì x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

Bài 28:

Nếu mệnh đề b) đúng thì A + 51 có chữ số tận cùng là 2 và A – 38 có chữ số tận cùng là 3 nên cả hai số này đều không là số chính phương. Vậy mệnh đề b) sai và các mệnh đề a) và c) đúng.

Giả sử $A+51=m^2;A-38=n^2(m,n\in N;m>n)$

$\Rightarrow m^2-n^2=89$ hay (m – n)(m + n) = 89

Vì 89 là số nguyên tố nên m + n = 89 và m – n = 1 => m = 45 và n = 44 nên A = 1974.

Bài 29:

Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2+n+503=m^2$.

Vì: n là số hữu tỉ nên tồn tại $a,\ b\in Z$, $b\neq 0$ sao cho $n=\dfrac{a}{b}$ và $(a;b)=1$

Ta có: $n^2+n+503=m^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+503=m^2 \Leftrightarrow a^2+ab+503b^2=m^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2=-b\left(a+503b-m^2b^2\right) \Rightarrow a^2 \vdots b$

Mà $(a;b)=1$ nên $b=1$ hay $b=a \in Z$

Do đó: $n^2+n+503=m^2 \Leftrightarrow 4n^2+4n+2012=4m^2 \Leftrightarrow 4m^2-(2n+1)^2=2011$

$\Leftrightarrow (2m-2n-1)(2m+2n+1)=2011$

Vì: $(2m-2n-1)+(2m-2n-1)=4m>0$.

Ta có các trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1:*** $\begin{cases} 2m-2n-1=1 \\ 2m+2n+1=2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=503 \\ n=502 \end{cases}$

- ***Trường hợp 2:*** $\begin{cases} 2m-2n-1=2011 \\ 2m+2n+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=503 \\ n=-503 \end{cases}$

Vậy, $n=502$; $n=-503$ thỏa mãn bài toán.

Bài 30:

Giả sử $\begin{cases} n-50=a^2 \\ n+50=b^2 \end{cases}$ với a,b nguyên dương và $a<b$.

Suy ra $b^2-a^2=100 \Leftrightarrow (b-a)(a+b)=2^2.5^2$

Do $b-a<a+b$ và chúng có cùng tính chẵn, lẻ nên $b-a$ và $a+b$ phải là các số chẵn.

Do đó $\begin{cases} b-a=2 \\ a+b=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=24 \\ b=26 \end{cases}$

Vậy $n=626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 31:

Ta có: $\begin{cases} n+24=k^2 \\ n-65=h^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \mathrm{k}^2-24=\mathrm{h}^2+65$

$\Leftrightarrow (\mathrm{k}-\mathrm{h})(\mathrm{k}+\mathrm{h})=89=1.89$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{k}+\mathrm{h}=89 \\ \mathrm{k}-\mathrm{h}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{k}=45 \\ \mathrm{h}=44 \end{cases}$

Vậy: $\mathrm{n}=45^2-24=2001$

Bài 32:

Ta có : $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$

$B = 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2$

B = 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz).yz + y^{2}z^2

B = (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2

Vì x, y, z là số nguyên nên 2x^2 + 2xy + 2xz + yz là số nguyên

$\Rightarrow$ B là số chính phương

Bài 33:

$\Rightarrow n^4+n^3+1=\left(n^2+k\right)^2=n^4+2kn^2+k^2\ (k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^3-2kn^2=k^2-1\Rightarrow n^2\left(n-2k\right)=k^2-1\geq 0$

Mà $k^2-1\vdots n^2\Rightarrow k^2=1$ hoặc $n^2\leq k^2-1$

Nếu $k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow n^2\left(n-2\right)=0\Rightarrow n=2$

Thử lại $2^4+2^3+1=5^2$ (thỏa mãn)

Khi $k\neq 1\Rightarrow k^2>k^2-1\geq n^2\Rightarrow k>n$

$\Rightarrow n-2k<0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2\left(n-2k\right)=k^2-1\geq 0$.

Vậy $n=2$.

Bài 34:

+ Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $a,b\in N*$ mà

$\begin{cases}2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1=a^2\\5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)=b^2\end{cases}$, suy ra $a^2+b^2=7\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2\right]$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2+B^2=7\left(X^2+Y^2\right)$ có nghiệm $\left(X;Y;A;B\right)$ với $X,Y\in N*$ và $A,B\in N$. Ta coi $\left(X;Y;A;B\right)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện X + Y nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0.1.2.4 nên $\left(A^2+B^2\right)\vdots 7$ khi và chỉ khi $A\vdots 7$ và $B\vdots 7$, dẫn tới biểu diễn $A=7A_1$, $B=7B_1$ với $A_1,B_1\in N*$. Khi đó (1) trở thành $X^2+Y^2=7\left(A_1^2+B_1^2\right)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X=7X_1,Y=7Y_1$ với $X_1,Y_1\in N*$.

Bài 35:

Ta có:

$$M = (n+1)^4 + n^4 + 1$$
$$= \left[(n^2+2n+1)^2 - n^2\right] + \left[(n^4+2n^2+1) - n^2\right]$$
$$= (n^2+n+1)(n^2+3n+1) + (n^2+n+1)(n^2-n+1)$$
$$= (n^2+n+1)(2n^2+2n+2)$$
$$= 2(n^2+n+1)^2 \quad (*)$$

Vì $n \in N^*$ nên $(n^2+n+1)^2$ là số chính phương khác 1.

Do đó, từ (*) suy ra $M = (n+1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương (đpcm).

Bài 36:

Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1 = (2m+1)^2, m \in \mathbb{N}$.

Suy ra, $m(m+1) = 3n^2$.

Vì $(m; m+1) = 1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m = 3u^2; m+1 = v^2 \\ m = v^2; m+1 = 3u^2 \end{array}\right., u, v \in \mathbb{Z}^*$.

Nếu $m = v^2; m+1 = 3u^2$ thì $v^2 = 3u^2 - 1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m = 3u^2; m+1 = v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1} + 2 = 2(2m+1) + 2 = 4m + 4 = 4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh)

Bài 37: Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ta được $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c(a+b) = ab \Leftrightarrow ab - ac - bc = 0$.

Từ đó ta được $ab - ca - bc + c^2 = c^2 \Leftrightarrow (a-c)(b-c) = c^2$.

Gọi $d = (a-c; b-c)$, khi đó ta có $c^2 ⋮ d^2$ nên $c ⋮ d$., từ đó dẫn đến $a ⋮ d; b ⋮ d$.

Mà do a, b, c nguyên tố cùng nhau nên ta được $d = 1$.

Do đó ước chung lớn nhất của $a-c$ và $b-c$ là 1. Mà ta lại có $(a-c)(b-c) = c^2$ nên suy ra $a-c$ và $b-c$ là các số chính phương.

Đặt $a - c = m^2; b - c = n^2 \; (m, n \in N^*)$. Khi đó ta có

$c^2 = (a-c)(b-c) = m^2.n^2 \Rightarrow c = mn$.

Từ đó ta có $a+b=a-c+b-c+2c=m^2+n^2+2mn=\left(m+n\right)^2$.

Vậy $a+b$ là số chính phương.

Bài 38: Vì a, b là các số tự nhiên lẻ nên ta đặt $a=2m+1; b=2n+1\ \left(m,n\in\mathbb{N}\right)$.

Khi đó ta có $a^2+b^2=\left(2m+1\right)^2+\left(2n+1\right)^2=4\left(m^2+n^2+m+n\right)+2$

Ta có một số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4

Mà a^2+b^2 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, nên a^2+b^2 không phải là số chính phương

Bài 39:

Gọi m là số nguyên dương thỏa mãn $n^2+3^n=m^2$. Khi đó $\left(m-n\right)\left(m+n\right)=3^n$

Suy ra tồn tại số tự nhiên k sao cho m và x_1, x_2

Vì $m-n<m+n$ nên $k<n-k$, do đó $n-2k\ge 1$.

Nếu $n-2k=1$ thì $2n=\left(m+n\right)-\left(m-n\right)=3^{n-k}-3^k=3^k\left(3^{n-2k}-1\right)=3^k\left(3^1-1\right)=2.3^k$

Vì vậy $n=3^k=2k+1$.

+ Nếu $k=0$ thì $n=1$.

+ Nếu $k=1$ thì $n=3$.

+ Nếu $k\ge 2$ thì $3^k-1=2\left(3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3+1\right)>2k$ (*).

Nếu $n-2k>1$ thì $k\le n-k-2$. Do đó $3^k\le 3^{n-k-2}$.

Suy ra $2n=3^{n-k}-3^k\ge 3^{n-k}-3^{n-k-2}=3^{n-k-2}\left(3^2-1\right)=8.3^{n-k-2}$.

Áp dụng (*), ta có $3^{n-k-2}\ge 1+2\left(n-k-2\right)=2n-2k-3$.

Suy ra $2n\ge 8\left(2n-2k-3\right)\Leftrightarrow 8k+12\ge 7n$.

Mặt khác $n\ge 2k+2$ nên $7n\ge 14k+14$, mâu thuẫn.

Vậy $n=1$ hoặc $n=3$.

Cách khác. Giả sử $n^2+3^n=m^2$ (1), với m là số nguyên dương, $m>n$.

Khi đó $\left(m-n\right)\left(m+n\right)=3^n$. Suy ra $m+n=3^p$, $m-n=3^q$, với p, q là các số tự nhiên và $p>q$.

Ta có $\dfrac{m+n}{m-n}=3^{p-q}\Rightarrow 1+2\cdot\dfrac{n}{m-n}=3^{p-q}\Rightarrow\dfrac{n}{m-n}=\dfrac{3^{p-q}-1}{2}\ge 1\Rightarrow 2n\ge m$.

Suy ra $n^2+3^n \le 4n^2 \Rightarrow 3^n \le 3n^2$ (2).

Thử trực tiếp $n=1, n=2, n=3$ thỏa mãn (2), nhưng chỉ có $n=1, n=3$ thỏa mãn (1).

Ta chứng minh (2) không đúng với $n \ge 4$. Thật vậy:

+ $n=4$: $3^4 > 3.4^2$.

+ Giả sử $3^n > 3n^2$ với $n \ge 4$.

+ Suy ra $3^{n+1} = 3.3^n > 3.3n^2 = 3(n+1)^2 + 3(2n^2-2n-1) > 3(n+1)^2$ với $n \ge 4$.

Vậy bài toán có hai nghiệm $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 40:

Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử b^2-4ac là số chính phương m^2 $(m \in N)$.

Xét $4a.\overline{abc} = 4a(100a+10b+c) = 400a^2+40ab+4ac$

$$= (20a+b)^2-(b^2-4ac) = (20a+b)^2-m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m)$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m, 20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$. Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do $m<b$ (vì $m^2-b^2=-4ac<0$)

Nên: $20a+b-m \le 20a+b+m < 100a+10b+c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không là số chính phương.

Bài 41:

Đặt $m^2+12=n^2$ với n là số nguyên. Khi đó ta có $n^2-m^2=12 \Leftrightarrow (n-m)(n+m)=12$.

Do m, n là các số nguyên và $n-m; n+m$ là các số chẵn nên ta có các trường hợp như sau

+ Với $n-m=-6$ và $n+m=-2$ ta được $n=-4; m=2$.

+ Với $n+m=-6$ và $n-m=-2$ ta được $n=-4; m=-2$.

+ Với $n+m=6$ và $n-m=2$ ta được $n=4; m=2$.

+ Với $n+m=2$ và $n-m=6$ ta được $n=4; m=-2$.

Thử lại ta được các giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{-2;2\}$.

Bài 42:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$.

Khi đó ta có: $x^2 < x^2+8y \le x^2+8x < x^2+8x+16 = (x+4)^2$

Theo yêu cầu của đề bài x^2+8y là số chính phương nên nó sẽ nhận giá trị là một trong các số $(x+1)^2$; $(x+2)^2$; $(x+3)^2$. Ta xét các trường hợp cụ thể như sau:

TH1: $x^2+8y=(x+1)^2 \Rightarrow 2x+1=8y$. Điều này không thể xảy ra vì $2x+1$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH2: $x^2+8y=(x+3)^2 \Rightarrow 6x+9=8y$. Điều này không thể xảy ra vì $6x+9$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH3: $x^2+8y=(x+2)^2 \Rightarrow 4x+4=8y \Rightarrow x=2y-1$.

Do: y^2+8x là số chính phương nên $y^2+8(2y-1)=y^2+16y-8$ là số chính phương.

Với y = 1 => x = 1 => Cặp số (x; y) = (1; 1) thỏa mãn yêu cầu.

Xét $y\ge 2$ ta có: $y^2+16y-8=(y+3)^2+(10y-17)>(y+3)^2$ và

$y^2+16y-8=(y+8)^2-72<(y+8)^2$. Do đó để: $y^2+16y-8$ là số chính phương thì ta phải có: $y^2+16y-8\in\left\{(y+7)^2;(y+6)^2;(y+5)^2;(y+4)^2\right\}$

Giải trực tiếp các trường hợp ta được: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=3\\x=5\end{cases}\\\begin{cases}y=11\\x=21\end{cases}\end{array}\right.(TM)$

Vậy các cặp (x; y) = (1; 1) ; (5; 3) ; (3; 5) ; (21; 11) ; (11; 21).

Bài 43:

Do m, n là các số nguyên dương nên ta có $(m+n)^3<(m+n)^2+3m+n<(m+n+2)^2$.

Do đó $(m+n)^3<A<(m+n+2)^2$. Mà A là số chính phương nên ta được $A=(m+n+1)^2$.

Do đó $(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2 \Rightarrow 3m+n=2(m+n)+1 \Rightarrow m=n+1$.

Từ đó suy ra $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)=m(n^2-n+1)\,\vdots\, m$.

Bài 44:

Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu $p=2$. khi đó ta có $A=n^4+4n$.

Xét $n\ge 0$, khi đó dễ thấy $n^4\le n^4+4n<n^4+4n^2+4 \Leftrightarrow n^4\le n^4+4n<(n^2+2)^2$

Do $A = n^4 + 4n$ là số chính phương nên ta được $A = n^4 + 4n = n^4$ hoặc $A = n^4 + 4n = (n^2+1)^2$

Với $n^4 + 4n = n^4 \Leftrightarrow n = 0$.

Với $n^4 + 4n = (n^2+1)^2 \Leftrightarrow n^4 + 4n = n^4 + 2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n + 1 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

Xét $n = -1$ và $n = -2$, thay vào ta được A không phải là số chính phương.

Xét $n < -2$, khi đó dễ thấy $n^4 - 2n^2 + 1 \le n^4 + 4n < n^4 \Leftrightarrow (n^2-1)^2 < n^4 + 4n < (n^2)^2$

Do đó $A = n^4 + 4n$ không thể là số chính phương.

+ Trường hợp 1. Nếu $p > 2$, khi đó do p là số nguyên tố nên p là số lẻ.

Do A là số chính phương nên tồn tại số nguyên t để $A = n^4 + 4n^{p-1} = t^2$.

Dễ thấy với $n = 0$ thì A là số chính phương.

Xét $n \ne 0$, khi đó ta có $n^4 + 4n^{p+1} = t^2 \Leftrightarrow 1 + 4n^{p-3} = \left(\frac{t}{n^2}\right)^2$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên $1 + 4n^{p-3}$ là số nguyên dương, do đó $\left(\frac{t}{n^2}\right)^2$ và $4n^{p-3}$ là số chính phương.

Đặt $4n^{p-3} = a^2; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = b^2\ (a, b \in Z)$ ta có phương trình

$$1 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-a = b+a = 1 \\ b-a = b+a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1; a = 0 \\ b = -1; a = 0 \end{array}\right.$$

Với $b = 1; a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \ne 0$

Với $b = -1; a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \ne 0$.

Như vậy khi $p > 2$ không tồn tại số nguyên n để A là số chính phương.

Vậy với $n = 0; p = 2$ thì A là một số chính phương.

Bài 45:

Giả sử $m \ne n$. Theo bài ra ta có:

$(m+n)^2-1=(m+n+1)(m+n-1)\vdots(m+n+1)$

$\Rightarrow 2(m^2+n^2)-1-\left[(m+n)^2-1\right]\vdots(m+n+1)$

$\Leftrightarrow (2m^2+2n^2-m^2-2mn-n^2)\vdots(m+n+1)$

$\Leftrightarrow (m-n)^2\vdots(m+n+1)$

Do $m+n+1$ là số nguyên tố $\Rightarrow m+n+1$là ước của $m-n$

Mà $m-n<m-n+1$do đó vô lý

Vậy giả sử sai $\Rightarrow m=n\Rightarrow m.n=m^2$ là số chính phương

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 46:

Ta có: $M=x^4+(x+1)^3-2x^2-2x$

$M=x^4+x^3+3x^2+3x+1-2x^2-2x$

$M=x^4+x^3+x^2+x+1$

$\Rightarrow 4M=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$

+) Ta có:

$(2x^2+x)^2=4x^4+4x^3+x^2\le 4x^4+4x^3+x^2+2x^2+(x+2)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=4M$

Ta thấy dấu $"="$không thể xảy ra nên $(2x^2+x)^2<4M$ (1)

+) Với $x=0\Rightarrow 4M=4\Leftrightarrow M=1\Rightarrow$M là số chính phương

Với $x=1\Rightarrow 4M=20\Leftrightarrow M=5\Rightarrow M$ không là số chính phương.

Với $x=2\Rightarrow 4M=124\Rightarrow M=31\Rightarrow$M không là số chính phương

Với $x\ne\{0;1;2\}$ ta có: $\left[\begin{array}{l}x-1\ge 2\\x-1\le -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le -1\end{array}\right.\Rightarrow (x-1)^2\ge 4\Leftrightarrow 4-(x-1)^2\le 0$

Ta có:

$4M=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$

$=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1-x^2+2x+3$

$=(2x^2+x+1)^2-(x-1)^2+4$

$\Rightarrow 4M\le(2x^2+x+1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (2x^2+1)^2<4M\le(2x^2+x+1)^2$.Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4M=(2x^2+x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của $x$thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x=0;\ \ x=-1;x=3$

Bài 47:

$n^3-1=(n-1).(n^2+n+1)\vdots p$

$(p-1)\vdots n\Rightarrow p-1\ge n\Rightarrow p\ge n+1$

Vì $p \geq n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1) \vdots p \Leftrightarrow (n^2+n+1) \vdots p$

Đặt : $p-1 = kn, \quad k \geq 1 \Rightarrow p = kn+1 \quad (*)$

$\Rightarrow (n^2+n+1) \vdots (kn+1) \Rightarrow kn+1 \leq n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn \leq n^2+n \Leftrightarrow k \leq n+1$

$k(n^2+n+1) - n(kn+1) \vdots (kn+1)$

$\Rightarrow [(k-1)n+k] \vdots (kn+1)$

$k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n+k > 0$

$\Rightarrow (k-1)n+k \geq kn+1$

$\Rightarrow k \geq n+1$

$\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Bài 48:

Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b \in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b \geq 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a \geq 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Kết luận: $(p;q)$ = (5;11), (13;3).

Trình bày cách khác:

Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b \in N^* \end{cases}$.

Suy ra $b^2 - a^2 = 3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 3q$.

Vì p, q là các số nguyên tố nên $a \geq 2, b \geq 4$. Do đó ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$. Khi đó $b=a+1$ và $2a+1=3q$. Suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a = 3q-1 = 6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$. Suy ra $p=13,\ q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$. Khi đó $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$.

Do p nguyên tố nên $a=4$. Suy ra $p=5,\ q=11$.

Vậy $p=13,\ q=3$ hoặc $p=5,\ q=11$.

Bài 49:

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp đó là $a, a+1 (a \in \mathbb{Z})$, theo đề bài ta có:

$(a+1)^3 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 3a + 1 = n^2$ (*)

+)Xét TH: $-1 \leq a \leq 0$ ta có: $\left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow n=1=0^2+1^2 \Rightarrow a=0 \quad (tm) \\ a=-1 \Rightarrow n=1=0^2+1^2 \Rightarrow a=-1 \quad (tm) \end{array}\right.$

+)Xét TH: $\left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<-1 \end{array}\right. \Rightarrow (2a)^2 < 3a^2+3a+1 < (2a+1)^2$

Vậy ta có n là tổng của hai số chính phương liên tiếp .

Bài 50:

Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2=m^2$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

Suy ra $2018 = m^2 - n^2 \Leftrightarrow 2018 = (m-n)(m+n)$

Như vậy trong hai số $m-n$ và $m+n$ phải có ít nhất một số chẵn (1)

Mà $(m-n)+(m+n)=2m$ nên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ là hai số chẵn

$\Rightarrow (m-n)(m+n)$ chia hết cho 4

Mà 2018 không chia hết cho 4 nên điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

Bài 51:

Khi $n=2$ ta có:

$A = 4m^2 - 4m - 4 = (2m-1)^2 - 5 = 4k^2$

$\Leftrightarrow (2m-2k-1)(2m+2k-1)=5$

$TH1:\begin{cases}2m-2k-1=1\\2m+2k-1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\k=1\end{cases}(tm)$

$TH2:\begin{cases}2m-2k-1=-1\\2m+2k-1=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\k=-1\end{cases}(ktm)$

$TH3:\begin{cases}2m-2k-1=5\\2m+2k-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\k=-1\end{cases}(tm)$

$TH4:\begin{cases}2m-2k-1=-5\\2m+2k-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\k=1\end{cases}(ktm)$

Vậy $m=2$

Với $n\geq 5, m=1 \Rightarrow A=n^2-2n-4=(n-1)^2-5<(n-1)^2$

$A=n^2-2n-4=(n-2)^2+2n-8>(n-2)^2\ (Do\ n\geq 5)$

$\Rightarrow (n-2)^2<A<(n-1)^2$. Do đó A không thể là số chính phương

Khi $m\geq 2$ ta có:

$A=m^2n^2-4m-2n$

$A=(mn-1)^2+2mn-4m-2n-1$

$A=(mn-1)^2+2(n-2)(m-1)-5$

$\Rightarrow A\geq (mn-1)^2+2(n-2)-5(do\quad m\geq 2\Rightarrow m-1\geq 1)$

$\Rightarrow A>(mn-1)^2\qquad (Do\quad n\geq 5\Rightarrow 2(n-2)-5\geq 1)$

Lại có: $A=m^2n^2-4m-2n\leq (mn)^2$

$\Rightarrow (mn-1)^2<A<(mn)^2$. Do vậy A không thể là số chính phương

Bài 52:

Từ $2a^2+a=3b^2+b$ ta có $a>b$ và

$\Leftrightarrow 2(a^2-b^2)+a-b=b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ (*)

Đặt $(a-b; 2a+2b+1)=d$

$\Rightarrow (a-b)\ \vdots\ d$; $(2a+2b+1)\ \vdots\ d$ và $b\ \vdots\ d$

$\Rightarrow \{2a+2b+1-2(a-b)\}\ \vdots\ d \Rightarrow (4b+1)\ \vdots\ d$ mà $b\ \vdots\ d$

$\Rightarrow 1\ \vdots\ d$ hay $d=1$.

Vậy a-b và 2a +2b +1 nguyên tố cùng nhau, kết hợp với (*) ta có:

a -b và 4a + 4b + 1 đều là số chính phương.

Bài 53: Giả sử $x^2+2x+20=a^2\left(a\in N,a>4\right)$. $\Leftrightarrow a^2-\left(x+1\right)^2=19$

$\Leftrightarrow\left(a-x-1\right)\left(a+x+1\right)=19$.

Vì $\left(a-x-1\right)<\left(a+x+1\right)$ và 19 = 1.19 nên $\begin{cases}a-x-1=1\\a+x+1=19\end{cases}$. Do đó $x=8$.

Thử lại với x = 8, ta có $x^2+2x+20=8^2+2.8+20=10^2$ thỏa mãn.

Bài 54. Ta có: A= $(x^2-8x)(x^2-8x+7)$.

Đặt $x^2-8x=y$ thì $A=y(y+7)=y^2+7y$

Giả sử $y^2+7y=m^2$ (m thuộc N)

=> $4y^2+28y+49-4m^2=49$

=> $(2y+7+2m)(2y+7-2m)=49=49.1=(-1).(-49)=7.7=(-7).(-7)$.

Ta thấy $2y+7+2m\geq 2y+7-2m$ nên ta có 4 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases}2y+7+2m=49\\2y+7-2m=1\end{cases}$, do đó $y=9$.

Suy ra $x\in\{-1;9\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2y+7+2m=-1\\2y+7-2m=-49\end{cases}$, do đó $y=-16$.

Suy ra $x=4$.

Trường hợp 3: $\begin{cases}2y+7+2m=7\\2y+7-2m=7\end{cases}$, do đó $y=0$.

Suy ra $x\in\{0;8\}$.

Trường hợp 4: $\begin{cases}2y+7+2m=-7\\2y+7-2m=-7\end{cases}$, do đó $y=-7$.

Suy ra $x\in\{1;7\}$.

Vậy $x\in\{-1;0;1;4;7;8;9\}$.

Bài 55.

$$A=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}-\underbrace{88...8}_{n}+1.$$

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

Ta có $A=a.10^n+a-8a+1=a\left(9a+1\right)+a-8a+1$

$\Rightarrow A = 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$.

$\Rightarrow A = \underbrace{33...3}_{n-1}2^2$.

Vậy A là một số chính phương.

Bài 56.

Giả sử $2^x + 5^y = k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn => k^2 chia hết cho 4 nhưng $1+5^y$ chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x + 5^y = k^2$ => k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n+1, n \in N$).

$\Rightarrow 2^x = 4n(n+1) \Rightarrow n = 1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+) Với $y \neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 (\bmod 5)$

Từ $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 (\bmod 5) \Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x = 2x_1$ $(x_1 \in N)$, ta có

$5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$

$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases}$ với $y_1 + y_2 = y$ với $y_1 > y_2$, y_1, y_2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_2}(5^{y_1-y_2} - 1) \Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0$.

$\Rightarrow y_1 = y$. Khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1$.

Nếu y = 2t$(t \in N)$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1 \vdots 3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + ... + 5 + 1)$.

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + .. + 1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ khi đó $x = 2; y = 1$.

Thử lại $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài 57.

-Với $n \in \{0;1;2;....;8\}$, bằng cách thử không có giá trị n thỏa mãn đề bài.

- Với $n \geq 9$, đặt $2^8 + 2^{11} + 2^n = t^2$, ta có $t^2 = 2^8(1 + 2^3 + 2^{n-8}) = 2^8(9 + 2^{n-8})$

$\Rightarrow 9 + 2^{n-8}$ là số chính phương

- Đặt $9+2^{n-8}=k^2 \ \left(k\in N^*, k>3\right)$

Do đó: $2^{n-8}=\left(k-3\right)\left(k+3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}k+3=2^a\\ k-3=2^b\end{cases}$ (với a > b).

Khi đó: $\left(k+3\right)-\left(k-3\right)=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)$

$\Leftrightarrow 2.3=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2^b=2\\ 2^{a-b}-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}.$

Do đó $n-8=3+1\Leftrightarrow n=12$.

Thử lại $2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là n = 12.

Bài 58.

Ta có $10\le n\le 99$ nên $21\le 2n+1\le 199$.

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169.

Tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n=40$.

Bài 59.

Ta có: $\begin{cases}A=\dfrac{10^{2m}-1}{9}\\ B=\dfrac{10^{m+1}-1}{9}\\ C=6.\dfrac{10^m-1}{9}\end{cases}$

Nên: $A+B+C+8=\dfrac{10^{2m}-1}{9}+\dfrac{10^{m+1}-1}{9}+6.\dfrac{10^m-1}{9}+8$

$=\dfrac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6.10^m-6+72}{9}$

$=\dfrac{\left(10^m\right)^2+16.10^m+64}{9}=\left(\dfrac{10^m+8}{3}\right)^2.$

Bài 60. Vì $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương nên:

$n^4+2n^3+2n^2+n+7=m^2,\ m\in\mathbb{N}.$

Ta có:

$m^2=\left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7>\left(n^2+n\right)^2\Rightarrow m>\left|n^2+n\right|\Rightarrow m\ge\left|n^2+n\right|+1$

$\Rightarrow m\ge\left|n^2+n+1\right|\Rightarrow m^2\ge\left(n^2+n+1\right)^2.$

Khi đó

$n^4+2n^3+2n^2+n+7\ge\left(n^2+n+1\right)^2\Leftrightarrow n^2+n-6\le 0\Leftrightarrow -3\le n\le 2.$

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 61. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$ ta có được $2n^3\ge n^4$ hay $n\le 2.$

- Với $n=0,$ ta chọn $a=b=0.$
- Với $n=1,$ ta chọn $a=1,\ b=0.$
- Với $n=2,$ ta chọn $a=b=2.$

Vậy các giá trị của n cần tìm là 0; 1; 2.

Bài 62. Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}.$

Giả sử rằng $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Khi đó $32\le b<a<100$ và $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)=1111c=11.101c$ (do việc đặt $c=a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$).

Do 11; 101 là các số nguyên tố và $a+b<200,\ a-b<100$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=101\\a-b=11c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\left(101+11c\right)\vdots 2\\b=\left(101-11c\right)\vdots 2\end{cases}.$$

Vì $b\ge 32$ nên $c\le 3$. Kết hợp với $a+b=101$ (số lẻ) nên c lẻ, nghĩa là $c=1$ hoặc $c=3$.

Điều này dẫn đến $\begin{cases}a=56\\b=45\end{cases};\ \begin{cases}a=67\\b=34\end{cases}.$

Do đó các cặp số chính phương phải tìm là: 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Trong trường hợp $a+b=11c$ thì $c=1$ (bị loại).

Bài 63.

Xuất phát từ đồng nhất thức $(2a+1)^2+\left(2a^2+2a\right)^2=\left(2a^2+2a+1\right)^2$;

Ta chọn $a=1$ và $a_1=3=2a+1,\ a_2=4=2a^2+2a,$ ta được:

$a_1^2+a_2^2=\left(2a^2+2a+1\right)^2=5^2.$

Chọn $a_3=2\left(a^2+a\right)^2+2\left(a^2+a\right)=12$ ta có:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left(2\left(a^2+a\right)+1\right)^2+\left(2\left(a^2+a\right)^2+2\left(a^2+a\right)\right)^2$$

$$=\left(2\left(a^2+a\right)^2+2\left(a^2+a\right)+1\right)^2=13^2.$$

Cứ như vậy ta chọn được 2013 số thỏa mãn.

Bài 64.

Ta có: $A=\sqrt[6]{\overline{4****}}\Rightarrow A^6=\overline{4****}$
A^6 có chữ số tận cùng bên trái là 4
$\Rightarrow 10000\le A^6<100000$
$\Rightarrow 100\le A^3<317$
$\Rightarrow 4<A<7$
A là một số tự nhiên $\Rightarrow A=5$ hoặc $A=6$
Với $A=5\Rightarrow A^6=15625$, không thỏa
Với $A=6\Rightarrow A^6=46656$
Vậy số phải tìm là: $A=\sqrt[6]{46656}$.

Bài 65.

A_n được viết lại như sau: $A_n=111...1\left(10^{n+1}+5\right)+1$ ($n+1$ chữ số 1). Đặt $t=111...1$ (n chữ số 1). Suy ra $9t+1=10^{n+1}$ $\Rightarrow$ $A=t\left(9t+1+5\right)+1=9t^2+6t+1=\left(3t+1\right)^2$. Vậy A_n là một số chính phương.

Bài 66.

Giả sử $2n+1=a^2$ và $3n+1=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $5n+3=4\left(2n+1\right)-\left(3n+1\right)=4a^2-b^2$ $=\left(2a-b\right)\left(2a+b\right)$.

Do $a^2\equiv1\left(mod 2\right)$ nên $a^2\equiv1\left(mod\ 4\right)$. Suy ra $n\equiv0\left(\text{mod}\,2\right)$ và $b\equiv1\left(\text{mod}\ 2\right)$. Do đó $2a-b>1$ và $2a+b>1$. Vậy $5n+3$ là hợp số.

Bài 67.

Giả sử tồn tại $y>x\ge1$ sao cho $xy+x=m^2$, $xy+y=n^2$ với $m,n\in\mathbb{N}^*$. Vì $y>x$ nên $xy+x>x^2\Rightarrow$ $m^2>x^2$ $\Rightarrow$ $m>x$ $\Rightarrow$ $m\ge x+1$. Ta có: $y-x=n^2-m^2\ \ge\ \left(m+1\right)^2-m^2$ $\Rightarrow$ $y-x>\left(x+1\right)^2-x^2$ $\Rightarrow$ $y>3x+1$. Lúc này $y\notin\left(988;1994\right)$. Vậy không tồn tại các số x,y phân biệt thuộc khoảng $\left(988;1994\right)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương.

Bài 68.

Giả sử tồn tại $n\in\mathbb{N}*$sao cho ta có $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}=k$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{k}$ Do đó ta có $\begin{cases}\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\left(k+\frac{2}{k}\right)\\ \sqrt{n-2}=\frac{1}{2}\left(k-\frac{2}{k}\right)\end{cases}$

Ta suy ra $(n+1)$ và $(n-1)$ là hai số chính phương.

$\begin{cases}n+1=p^2\\ n-1=q^2\end{cases}$ với $p,q\in\mathbb{N}*$

$\Rightarrow p^2-q^2=2(*)$

$(p+q)$và $(p-q)$ cùng tính chất chẵn lẻ

$(*)\Rightarrow(p+q)$ và $(p-q)$ là hai số tự nhiên chẵn.

$\Rightarrow(p+q)(p-q)\vdots4\Rightarrow2\vdots4$ vôlí.

Do đó không có số tự nhiên n thỏa yêu cầu của bài toán.

Bài 69.

Ta có:

* $a_1=14$ không phải là số chính phương.

* $a_2=144=12^2$

* $a_3=1444=38^2$

Ta hãy xét a_n là một số chính phương

$$a_n=k^2,k\in\mathbb{N}*$$

a_n tận cùng là 4444.

Số dư của phép chia a_n cho 16 bằng số dư của phép chia 4444 cho 16.

$\Rightarrow a_n=16q+12$

$\Rightarrow k^2=16q+12$ (*)

Suy ra: $k\vdots2$ và $k\vdots4$.

$\Rightarrow k=2(2t+1)=4t+2$

$\Rightarrow k^2=16t^2+16t+4=16h+4$ mâu thuẫn $(*)$.

Ta suy ra: a_n với $n>4$ không phải là số chính phương.

Bài 70.

Chọn 3 số tự nhiên a,b,c nguyên tố cùng nhau và thỏa tính chất.

$a=b+c$

Ta có $n=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(b+c)^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2$

$=b^4+c^4+3b^2c^2+2b^3c+2bc^3=(b+c+bc)^3$.

Do đó n là một số chính phương.

Có vô số bộ ba số tự nhiên nguyên tố cùng nhau mà một trong 3 số bằng tổng hai số kia.

TD: $(2,3,5)=1$ và $5=2+3$.

$\Rightarrow n=6^2+15^2+10^2=19^2$.

Bài 71.

$p(x)$ là một đa thức bậc 4 và hệ số của x^4 là 1 nên $p(x)$ chỉ có thể là bình phương đúng của một tam thức bậc 2 có dạng: $\alpha(x)=x^2+px+q$

Do đó, ta có : $x^4+mx^3+29x^2+nx+4=\left(x^2+px+q\right)^2$

$=x^4+2px^3+\left(p^2+2q\right)x^2+2pqx+q^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2=4 \\ 2pq=n \\ p^2+2q=29 \\ 2p=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ p=\pm 5 \\ m=\pm 10 \\ n=\pm 20 \end{cases}$$

Vậy $(m,n)=(10,20),(-10,-20)$.

Bài 72.

Ta có : $a \,\vdots\, 6,\ a\neq 0 \Leftrightarrow a=6k, k\in\mathbb{N}^*$

Suy ra : $1000a=6000k=20^2.15k$

1000a là số chính phương khi và chỉ khi $k=15p^2, p\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow a=90p^2, p\in\mathbb{N}^*$

Do đó số tự nhiên a nhỏ nhất phải tìm là : a = 90

2. Ta có : $2002=2.7.11.13$

$2002.b$ là số chính phương nên ta có : $b=2002k^2, k\in\mathbb{N}^*$

b chia hết cho bốn số nguyên tố liên tiếp mà b đã chứa ba thừa số nguyên tố liên tiếp là 7, 11 và 13 nên thừa số nguyên tố thứ tư là 5 hoặc 17, b nhỏ nhất nên ta chọn thừa số nguyên tố thứ 5.

$\Rightarrow b=2002.25t^2, t\in\mathbb{N}^*$

* Nếu $t^2=1\Rightarrow b=50050\Rightarrow b-1=50049 \not\vdots\, 9$ không thỏa mãn yêu cầu.

* Nếu $t^2=4\Rightarrow b=200200\Rightarrow b-1=200199 \,\vdots\, 9$ thỏa mãn.

Vậy số b phải tìm là b =200200.

Bài 73.

Ta có: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Giả sử $a>0$

Muốn cho a^2-b^2 là một số chính phương, ta chỉ cần chọn

$$\begin{cases} a+b=du^2 \\ a-b=dv^2, u>v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{d(u^2+v^2)}{2} \\ b=\dfrac{d(u^2-v^2)}{2} \end{cases}$$

Trong đó hoặc d chẵn hoặc u và v cùng tính chất chẵn, lẻ $(u>v)$

Lúc đó ta có: $a^2-b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$

Các nghiệm của phương trình là:

$$a=d(u^2+v^2), b=2duv, c=d(u^2-v^2)$$

Vậy a^2-b^2 có thể là một số chính phương.

Bài 74.

Ta có $k=\overline{ab}=10\text{a}+b$ nên $k+ab=(a+b)^2 \Leftrightarrow 10\text{a}+b+ab=a^2+b^2+2\text{ab} \Leftrightarrow b^2+ab-b=10\text{a}-a^2$

$\Leftrightarrow b^2+(a-1)b=a(10-a)$

Mà $a(10-a)\le 25$ do đó $b^2+(a-1)b\le 25 \Leftrightarrow b^2\le 25$ (vì $(a-1)b\ge 0$)

$\Rightarrow b=0;2;3;4;5$. Ta xét từng trường hợp và kết luận.

Vậy số k cần tìm là: 91; 13; 63.

Bài 75.

Chuyển về dạng $A=2017^2\ \ n^4+n^3+n^2\ \ =2017^2n^2\ \ n^2+n+1$

Để A chính phương thì n^2+n+1 chính phương.

Giá trị n thỏa mãn là $n=-1$ hoặc $n=0$

Bài 76.

Giả sử $\dfrac{n-37}{n+43}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$ với p,q là hai số nguyên dương và $\ p,q\ =1$. Ta có

$n-37=k.q^2, n+43=k.q^2$ với k là số nguyên dương

$\Rightarrow k\ \ p-q\ \ \ p+q\ =80=2^4.5.1$

Trường hợp 1: Trong hai số p,q có một chữ số chẵn, một số lẻ $\Rightarrow p+q$ và $p-q$ đều lẻ.

Từ $\ 1\ \Rightarrow \begin{cases} p+q=5 \\ p-q=1 \\ k=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=2\Rightarrow n=101 \\ k=16 \end{cases}$

Trường hợp 2: Cả hai số $\ p,q$ đều lẻ. Đặt $p=2a-1,\ q=2b-1$ với a,b là các số nguyên dương

Từ $\ 1\ \Rightarrow k\ \ a-b\ \ \ a+b-1\ =20=2^2.5.1$

Ta có $a+b-1>a-b$ và $a+b-1, a-b$ khác tính chẵn lẻ.

Xét các cặp số $\ a-b;a+b-1\ $ lần lượt $1;2\ ,\ 1;4\ ,\ 1;20\ ,\ 2;5\ ,\ 4;5\ ,\ 5;20\ .$

Tính $a,b\Rightarrow p,q,k$ ta được n bằng $38,47,55,82,199,398$

Vậy n bằng $38,47,55,82,199,398$

Bài 77.

Ta có: $\overline{abc}=100a+10b+c=n^2-1$;

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow 99\ \ a - c\ \ = 4n - 5 \Rightarrow 4n - 5 \vdots 99$ $\quad$ *

Mặt khác: $100 \le n^2 - 1 \le 999 \Rightarrow 101 \le n^2 \le 1000$

$\Rightarrow 11 \le n \le 31$(do $n \in \mathbb{Z}$) **

Từ * và ** $\Rightarrow 4n - 5 = 99 \Rightarrow n = 26$. Vậy $\overline{abc} = 675$

Bài 78.

Giả sử: $n+12=a^2;\ n-11=b^2\ (a,\ b \in \mathbb{N};\ a>b) \Rightarrow a^2 - b^2 = (n+12) - (n-11) = 23$

Hay $(a-b)(a+b) = 1.23$. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=23 \end{cases} (Do: a-b < a+b) \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow n=132$

Vậy n = 132.

Bài 79.

Đặt: $n^2 - 14n - 256 = k^2\ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305 \Rightarrow (n-7+k)(n-7-k) = 305$

Mà: 305 = 1.305 = (- 305)(- 1) = 5.61 = (- 61)(- 5) và $(n-7-k) \le (n-7+k)$ nên xét các trường hợp: $\begin{cases} n-7-k=1 \\ n-7+k=305 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-305 \\ n-7+k=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=5 \\ n-7+k=61 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-61 \\ n-7+k=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n=160 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-146 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=40 \\ k=28 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-26 \\ k=28 \end{cases}$

Vì: $n,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array} \right.$ Vậy $\left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array} \right.$

Bài 80.

Vì: n là số có 2 chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mà: 2n là số chính phương chẵn nên $2n = \{36; 64; 100; 144; 196\} \Rightarrow n = \{18; 32; 50; 72; 98\}$

$\Rightarrow n + 4 = \{22; 36; 54; 76; 102\}$ chỉ thấy $n+4=36$ là số chính phương $\Rightarrow n=32$

Vậy n = 32.

Bài 81.

Giả sử $A = 1010n^2 + 2010(n+p) + 10^{10^{195}} = a^2 - b^2\ (a, b \in \mathbb{N})$

Do: A chẵn nên $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ cũng chẵn $(a-b);(a+b)$ cùng tính chẵn lẻ.

$\Rightarrow a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,\vdots\,4$ tiếp tục ta có: $B=1010n^2+2010(n+p)\,\vdots\,4$

Từ $B=1010n^2+2010(n+p)+2(n^2+n+p)\,\vdots\,2\Rightarrow(n^2+n+p)=n(n+1)+p\,\vdots\,2$

Mà: $n(n+1)\,\vdots\,2\Rightarrow p\,\vdots\,2\Rightarrow p=2$

Với $p=2\Rightarrow A=4k=(k+1)^2-(k+1)^2\ (k\in\mathbb{Z}^+)$

Bài 82.

Đặt: $3^x+171=y^2$.

Cách 1: Viết phương trình đã cho về dạng $9.(3^{x-2}+19)=y^2\ (x\ge 2)$. Để $y\in\mathbb{Z}$ thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2\ (z\in\mathbb{Z}^+)$ là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=(3^{2k+1}+1)+18=4.B+18\,\vdots\,2$ nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k$ là số chẵn thì $3^{x-2}+19=z^2\Leftrightarrow 3^{2k}+19=z^2\Leftrightarrow(z+3^k)(z-3^k)=19$

Vì 19 là số nguyên tố nên $z-3^k<z+3^k$ nên $\begin{cases}z-3^k=1\\z+3^k=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=10\\3^k=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=10\\k=2\end{cases}$

Vậy x = 6.

Cách 2: +) Nếu $x=2k+1\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ thì VT = 1.3 + 3 = $VT\equiv 1.3+3\equiv 6(mod3)$ (vô nghiệm) vì VP là số chính phương. Do đó: $x=2k\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ thì để ý rằng $3^k>y-3^k>0$.

Mà: $y-3^k+y+3^k=2y\,\vdots\,2$ nên 2 số trên cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: 171 = $(y-3^k)(y+3^k)=1.171=3.57=9.19$. Xét từng trường hợp cụ thể ta có kết quả x = 6.

Cách 3: Ta có: $3^x\equiv 1,3(mod8)$; $y^2\equiv 0,1,4(mod8)$. Mà: $3^x+171=y^2\Rightarrow 3^x\equiv 1(mod8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k\in\mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A=(3^k)^2+171=y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[(3^k)^2+3\right]^2\ge a>(3^k)^2$.

Khi đó: $A=\left[(3^k)^2+3\right]^2$ hoặc $A=\left[(3^k)^2+2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x=6\Rightarrow y=30$. Vậy x = 6.

Cách 4: Vì: $3^x \vdots 3; 171 \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3$. Đặt y = 3k $\left(k \in \mathbb{Z}^+, k \neq 1\right)$.

Khi đó: $3^x + 171 = 9k^2$. Vì: $171 \vdots 9$; $9k^2 \vdots 9 \Rightarrow 3^x \vdots 9 \Rightarrow x = 2h \left(h \in \mathbb{N}^*\right)$

Khi đó: $9^{h-1} + 19 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - \left(3^{h-1}\right)^2 = 19 \Leftrightarrow \left(k + 3^{h-1}\right)\left(k - 3^{h-1}\right) = 19.$

Để ý rằng: $0 < k - 3^{h-1} < k + 3^{h-1}$ và $k - 3^{h-1} + k + 3^{h-1} = 2k \vdots 2$ nên hai số này cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: $\left(k + 3^{h-1}\right)\left(k - 3^{h-1}\right) = 1.19 \Rightarrow \begin{cases} k - 3^{h-1} = 1 \\ k + 3^{h-1} = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 10 \\ h = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 6$. Vậy x = 6.

Bài 83.

Giả sử $5^x + 12^x = y^2$. Nhận xét x = 1 không thỏa mãn phương trình. Khi đó $x \geq 2$. Từ phương trình ta thấy y lẻ.

Vì: $12^x \vdots 8$, $y^2 : 8$ dư 1 với y lẻ nên $5^x \equiv 1 \left(mod 8\right)$ suy ra x chẵn.

Đặt: $x = 2k \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ ta có phương trình: $5^{2k} = \left(y - 12^k\right)\left(y + 12^k\right)$.

Do 5 là số nguyên tố nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$, $m < k$ sao cho $\begin{cases} y + 12^k = 5^{2k-m} \\ y - 12^k = 5^m \end{cases}$

Suy ra $2.12^k = 5^m \left(5^{2k-2m} - 1\right)$. Do 2, 12 đều nguyên tố cùng nhau với 5 mà: $2.12^k \vdots 5^m$ nên m = 0 và ta được y = $12^k + 1$.

Thay vào phương trình ta được: $2.12^k = 25^k - 1 \; (*)$ hay $k \geq 2$ thì :

$25^k - 1 > 24^k = 2^k.12^k > 2.12^k$ (Loại)

Với k = 1 (TM) $\Rightarrow x = 2, y = 13$. Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên x = 2.

Bài 84.

Ta có: $A = \left(n+2\right)^2\left(4n^2 + 6n - 3\right)$.

TH1: $A = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{4} \end{array} \right.$

TH2: $A \neq 0$ và A là số chính phương $\Rightarrow \left(4n^2 + 6n - 3\right)$ là số chính phương.

$\Leftrightarrow 4n^2 + 6n - 3 = k^2 \; \left(k \in \mathbb{N}\right) \Leftrightarrow \left(4n+3\right)^2 - \left(2k\right)^2 = 21 \Leftrightarrow \left(4n + 3 + 2k\right)\left(4n + 3 - 2k\right) = 21.$

Ta thấy: $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $4n + 3 + 2k$ và $4n + 3 - 2k$ là các ước của 21.

+) $4n + 3 - 2k \leq 4n + 3 + 2k$ với $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Do đó ta có: $\begin{cases} 4n + 3 - 2k = 1 \\ 4n + 3 + 2k = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 2 \end{cases}$

hoặc: $\begin{cases}4n+3-2k=3\\4n+3+2k=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\n=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}4n+3-2k=-21\\4n+3+2k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=5\\n=\dfrac{-7}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}4n+3-2k=-7\\4n+3+2k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\n=-2\end{cases}$

Vậy $n=\pm 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 85.

Đặt: $M=k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ ta có: $M=\left(k^4-2k^2+1\right)-8k\left(k^2-2k+1\right)+9k^2-18k+9$

$\Rightarrow M=(k-1)^2\left((k-3)^2+1\right)$. M là số chính phương khi và chỉ khi: $(k-1)^2=0$ hoặc $(k-3)^2+1$ là số chính phương.

TH1: $(k-1)^2=0\Leftrightarrow k=1$

TH2: $(k-3)^2+1$ là số chính phương

Đặt: $(k-3)^2+1=m^2\,(m\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow m^2-(k-3)^2=1\Leftrightarrow(m-k+3)(m+k-3)=1$

Vì: $m,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-k+3\in\mathbb{Z},\ m+k-3\in\mathbb{Z}$ nên: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-k+3=1\\m+k-3=1\end{cases}\\\begin{cases}m-k+3=-1\\m+k-3=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1,k=3\\m=-1,k=3\end{array}\right.\Rightarrow k=3.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=3\end{array}\right.$ thì $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Bài 86.

Ta có: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ Giả sử $(n+1)(2n+1)=6k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (1)

Do $(2n+1)$ lẻ nên $(n+1)$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ. Đặt $n=2m+1\ \left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Thay vào (1) ta có: $(m+1)(4m+3)=3k^2$. Do: $(m+1,\,4m+3)=1$, $4m+3$ không là số chính phương nên ta có: $\begin{cases}m+1=a^2\\4m+3=3b^2\end{cases}\left(a,b\in\mathbb{N}^*;ab=k\right)$ Từ đó ta có: $4a^2-3b^2=1$

$\Leftrightarrow(2a-1)(2a+1)=3b^2$. Ta lại có $(2a+1,\,2a-1)=1$ nên có 2 khả năng:

(I) $\begin{cases}2a-1=a_1^2\\2a+1=b_1^2\end{cases}\left(a_1,b_1\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $b_1^2=3a_1^2+2$ (Vô lý vì số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

(II) $\begin{cases}2a-1=a_2^2\\2a+1=3b_2^2\end{cases}$ $\left(a_2,b_2\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $3b_2^2-a_2^2=2$ suy ra a_2 lẻ và không chia hết cho 3.

Dễ thấy $a_2=5\Rightarrow n=337$ là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn bài toán.

Khi đó: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{(337+1)(2.337+1)}{6}=195^2$

Bài 87:

Ta có: n = 0 thỏa mãn bài toán.

Xét n > 0, nếu cả 2 số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương thì số $A_n=(9n+16)(16n+9)=(12n)^2+\left(9^2+16^2\right)n+12^2$ cũng là số chính phương.

Mặt khác: $(12n+12)^2<(12n)^2+\left(9^2+16^2\right)n+12^2<(12n+15)^2$ nên ta có: $\left[\begin{array}{l}A_n=(12n+13)^2\\A_n=(12n+14)^2\end{array}\right.$

Từ đó thay vào giải ra được: $\left[\begin{array}{l}n=1\\n=52\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của n thỏa mãn: $n=\{0,1,52\}$

Bài 88:

Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}$ $(a,b\in\mathbb{N},1\le a,b\le 9)$ ta có hệ: $\begin{cases}\overline{ab}=4\overline{ba}+15 & (1)\\\overline{ab}-9=a^2+b^2\,(2)\end{cases}$

Từ (1) ta thấy nếu $b\ge 2\Rightarrow 4\overline{ba}+15\ge 4.21+15\Rightarrow\overline{ab}\ge 99\Rightarrow\overline{ab}=99\Rightarrow a=b=9(KTM)$

Vậy b = 1 thay b = 1 vào (2) ta được: $\overline{a1}-9=a^2+1^2\Leftrightarrow 10a+1-9=a^2+1\Leftrightarrow a^2-10a+9=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=9\end{array}\right.$

Với a = 1 $\Rightarrow a=b(KTM)$

Với a = 9 $\Rightarrow ab=91\,(TM:91=4.19+15)$

Vậy số phải tìm là 91.

Bài 89.

Gọi là tổng các chữ số của s thì s và t_s có cùng số dư khi chia cho 9, nghĩa là $s=t_s+9$a với a là số tự nhiên. Do đó số A được viết bơie 1, 2, 3, …, 2007 nên

$t_A=t_1+\ldots+t_{2007}=1+2+\ldots+2007-9k=B-9k\quad\left(k\in N^*\right)\qquad(1)$

Ta có tổng 9 số tự nhiên liên tiếp là $a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+8)=9(a+4)\vdots 9$ nên tổng của $2007=9.223$số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho 9, nghĩa là

$B=1+2+3+...+2007=9h \quad (h\in N^*) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $t_A=9(h-k)\Rightarrow A=9m \quad (m\in N^*)$

Mà ta có $(9u+1)(9v+1)=9(9uv+u+v)+1$ với $u,v\in N^*$

Khi đó $C=2008^{2007}+2009=(9.223+1)^{2007}+9.223+2=9n+3 \quad (n\in N^*) \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra số $A+C=9(m+n)+3 \quad (5)$. Nếu $A+C$ là số chính phương mà chia hết cho số nguyên tố 3 thì nó phải chia hết cho 9, nhưng điều này mâu thuẫn với (5). Vậy $A+C$ không là số chính phương.

Bài 90.

Với $x=0$ hoặc $y=0$ ta có $1-xy=1^2$ (đpcm)

Với $x\neq 0, y\neq 0, x,y\in Q$, ta có các cách sau:

Cách 1: Bình phương hai vế đẳng thức (1) ta được:

$x^{10}+y^{10}+2x^5y^5=4x^4y^4\Rightarrow x^{10}+y^{10}-2x^5y^5=4x^4y^4-4x^5y^5$

$(x^5-y^5)^2=4x^4y^4(1-xy)\Rightarrow 1-xy=\left(\dfrac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$ (đpcm)

Cách 2: Bình phương hai lần (1) $x^{10}+y^{10}+2x^5y^5=4x^4y^4$

$x^{10}+y^{10}=2x^4y^4(2-xy)\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2x^{10}y^{10}=4x^8y^8(4-4xy+x^2y^2)$

$\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2x^{10}y^{10}=16x^8y^8-16x^9y^9+4x^{10}y^{10}$

$\Rightarrow x^{20}+y^{20}-2x^{10}y^{10}=16x^8y^8(1-xy)\Rightarrow (x^{10}-y^{10})^2=(4x^4y^4)^2(1-xy)$

$1-xy=\left(\dfrac{x^{10}-y^{10}}{4x^4y^4}\right)^2$ (đpcm)

Cách 3: Chia cả hai vế của (1) cho x^4 ta được $\dfrac{x^5}{x^4}+\dfrac{y^5}{x^4}=2\dfrac{y^2}{x^2}$

$\Rightarrow x+\dfrac{y^5}{x^4}=2\dfrac{y^2}{x^2}\Rightarrow xy+\dfrac{y^6}{x^4}=2\dfrac{y^3}{x^2}$ (nhân cả hai vế với y)

$\Rightarrow \dfrac{y^6}{x^4}-2\dfrac{y^3}{x^2}+1=1-xy\Rightarrow \left(\dfrac{y^3}{x^2}-1\right)=1-xy$ (đpcm)

Cách 4: $(1)\Rightarrow \dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{x^2}=2\Rightarrow \dfrac{x^6}{y^4}+\dfrac{y^6}{x^4}+2xy=4\Rightarrow \dfrac{x^6}{y^4}+\dfrac{y^6}{x^4}-2xy=4-4xy$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{y^2}-\frac{y^3}{x^2}\right)^2 = 4(1-xy) \Rightarrow 1-xy = \left(\frac{\dfrac{x^3}{y^2}-\dfrac{y^3}{x^2}}{2}\right)^2$$

Cách 5: Đặt $x = ky$ thay vào (1) và biến đổi đồng nhất.

Ta có $(ky)^5 + y^5 = 2(ky)^2 y^2$

Hay $k^5y^5 + y^5 = 2.k^2.y^2.y^2$. Hay $k^5y^5 + y^5 = 2.k^2.y^4$. Hay $y^4[(k^5y+y)-2k^2]=0$.

Với $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in Q$ ta có: $(k^5y+y)-2k^2=0$.

Hay $y = \dfrac{2k^2}{k^5+1}$ và $x = k.\dfrac{2k^2}{k^5+1} = \dfrac{2k^3}{k^5+1}$

Lúc này ta có: $1-xy = 1-\dfrac{2k^2}{k^5+1}.\dfrac{2k^3}{k^5+1} = \dfrac{(k^5+1)^2-4k^5}{(k+1)^5} = \dfrac{(k-1)^5}{(k+1)^5} = \left[\dfrac{k-1}{k+1}\right]^5$ bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 91. * Nếu $m = n$ thì ta có ngay đpcm.

* Nếu m khác n: Đặt $\begin{cases} m+n=2x \\ m-n=2y \end{cases} (x, y \in N^*; x>0; y \neq 0)$

Khi đó $\begin{cases} m=x+y \\ n=x-y \end{cases}$ và từ $x+y>0; x-y>0$ suy ra $x > |y|$

Do $n^2-1 \vdots |m^2+1-n^2| \Rightarrow m^2 \vdots |m^2+1-n^2| \Rightarrow m^2 = k(m^2+1-n^2)$ (1), $k \in N$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+y)^2 = k(4xy+1) \Leftrightarrow x^2-2(2k-1)xy+(y^2-k)=0$ (*)

Phương trình (*) có một nghiệm là x nên có một nghiệm nữa là x_1.

Ta có: $\begin{cases} x+x_1 = 2(2k-1) \\ xx_1 = y^2-k \end{cases} \Rightarrow x_1 \in N$

- Nếu $x_1>0$ thì $(x_1; y)$ là cặp nghiệm thoả mãn (*), suy ra $x_1 > |y|$

Khi đó $y^2-k = xx_1 > |y^2| \Rightarrow k<0 \Rightarrow 0 < x+x_1 = 2(2k-1)<0$, mâu thuẫn.

- Nếu $x_1<0$ thì $xx_1 = y^2-k<0 \Rightarrow k>y^2 \Rightarrow k>0 \Rightarrow 4xy+1>0 \Rightarrow y>0$

Ta có: $k = x_1^2-2(2k-1)x_1y+y^2 = x_1^2+2(2k-1)|x_1|y+y^2$.

Suy ra $k > 2(2k+1)|x_1|y \geq 2(2k-1) > k$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1 = 0$. Khi đó $k = y^2$ và $\dfrac{m^2}{k} = m^2+1-n^2$ là số chính phương.

Do đó $|m^2+1-n^2|$ là số chính phương (đpcm).

Bài 92. +) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ta được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2.

Khi đó ta có: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a,b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn cũng là số chẵn $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,\vdots\,4$ (đpcm).

Bài 93.

Ta có $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$ $(n\in N)$

Ta thấy: $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$

$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+2)+2000n+2015+2$ $(n\in N)$ chia 5 dư 2.

Ta nhận xét rằng không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5+1999n+2017$ $(n\in N)$ không phải là số chính phương.

Bài 94.

Vì n là số nguyên dương nên $n^2+n+3>3$.

Gọi r là số dư khi chia n cho $3, r\in\{0;1;2\}$.

Nếu $r=0$ hoặc $r=2$ thì $n^2+n+3\,\vdots\,3$. Mâu thuẫn với giả thiết n^2+n+3 là số nguyên tố.

Do đó $r=1$ hay n chia 3 dư 1. Khi đó $7n^2+6n+2017$ chia 3 dư 2.

Mà một số chính phương có số dư khi chia cho 3 là 0 hoặc 1.

Nên $7n^2+6n+2017$ không phải số chính phương.

Bài 95.

Từ: $2x^2+x=3y^2+y$ (1)

$\Rightarrow 2x^2-2y^2+x-y=y^2 \Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)=y^2$ (2)

Mặt khác từ (1) ta có: $3x^2-3y^2+x-y=x^2$ hay $(x-y)(3x+3y+1)=x^2$

$\Rightarrow (x-y)^2(2x+2y+1)(3x+3y+1)=x^2y^2 \Rightarrow (2x+2y+1)(3x+3y+1)$ là số chính phương (3).

Gọi $(2x+2y+1;3x+3y+1)=d \Rightarrow (2x+2y+1)\,\vdots\,d;(3x+3y+1)\,\vdots\,d$

$\Rightarrow (3x+3y+1)-(2x+2y+1)=(x+y)\,\vdots\,d$

$\Rightarrow 2(x+y)\,\vdots\,d \Rightarrow (2x+2y+1)-2(x+y)=1\,\vdots\,\mathrm{d}$ nên $d=1$

$\Rightarrow (2x+2y+1;3x+3y+1)=1$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là số chính phương.

Lại có từ (2) $\Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)$ là số chính phương suy ra $x-y$ cũng là số chính phương. Vậy $2x^2+x=3y^2+y$ thì $x-y; 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Bài 96. Đặt $B=(1^2+2^2+...+2017^2)=(2^2+4^2+...+2016^2)+(1^2+3^2+...+2017^2)$

Ta thấy số các số hạng của B là số lẻ là $(2017-1):2+1=1009$. Do đó B là số lẻ. Suy ra A chia hết cho 2 và không chia hết cho 4. Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 97.

Nếu $a<b$ thì vế trái của (1) nhỏ hơn vế phải nên chỉ xét $a\geq b$. Với $a=b$ thì từ (1) suy ra $a=b=c=0$, lúc đó $a-b=0$ là số chính phương (*).

Với $a>b$, biến đổi (1) về dạng:

$$b^2=2016(a^2-b^2)+(a-b)\Rightarrow b^2=(a-b)(2016a+2016b+1)\ (2)$$

Đặt $d=(a;b)$ thì có $a=md, b=nd; (m;n)=1, m-n=t>0$

Giả sử $(t;n)=u\Rightarrow n\vdots u, t\vdots u\Rightarrow m\vdots u\Rightarrow u=1$ nghĩa là $(t;u)=1$

Thay $b=nd, a-b-td$ vào (2) có:

$$n^2d=t(2016dt+4032dn+1)\Rightarrow n^2d=2016dt^2+4032dnt+t\ (3).$$

Từ (3) ta có: $n^2d\vdots t, (t,n)=1\Rightarrow d\vdots t$. Mặt khác $d=t$. Lúc đó $a-b=td=d^2$ là số chính phương (**). Từ (*) và (**) có điều phải chứng minh. Vậy $a-b$ là một số chính phương.

Bài 98.

Trước hết ta chứng minh rằng $(x-z);(y-z)$ nguyên tố cùng nhau. Giả sử $d=(x-z;y-z)$ ta có: $x-z\vdots d; y-z\vdots d\Rightarrow (x-z)(y-z)\vdots d^2$

Từ giả thiết suy ra $z^2\vdots d^2\Rightarrow z\vdots d$. Khi đó x và y chia hết cho d.

Vì $(x,y)=1\Rightarrow d=1$. Vậy $(x-z);(y-z)$ cùng là số chính phương.

Đặt $k^2=x-z; m^2=y-z\ (k\in N^*)$

Ta có: $(x-z)(y-z)=z^2=k^2m^2\Rightarrow z=km$

Khi đó $x+y=k^2+m^2+2km=(k+m)^2$. Mặt khác từ $(x-z)(y-z)=z^2$ suy ra $xy=z(x+y)\Rightarrow xyz=z^2(k+m)^2=\left[z(m+k)^2\right]$ là số chính phương.

Vậy $2017^2xyz=\left[2017z(k+m)^2\right]$ là số chính phương.

Bài 99:

Ta có $\overline{xxyy}=11.\overline{x0y}$. Mà ta thấy rằng 11 là số nguyên tố và $\overline{xxyy}$ là một số chính phương nên suy ra $\overline{x0y}\vdots 11\Rightarrow 99x+x+y\vdots 11\Rightarrow x+y\vdots 11$.

Theo điều kiện đề bài ta có:

$0 < x + y \le 18 \Leftarrow x + y = 11 \Rightarrow \overline{x0y} = 99x + 11 \Rightarrow \overline{xxyy} = 121(9x + 1)$.

Từ đó suy ra $9x + 1$ là số chính phương suy ra $x = 7$ (0<x<10) $\Rightarrow y = 4$

Vậy số điện thoại đó là 827744.

Bài 100:

Với mọi số tự nhiên a thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.

Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4.

Suy ra $2019^n \equiv 3^n \pmod 8$

- Nếu n chẵn thì $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 5 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k+1} \equiv 3.3^{2k} \equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 7 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 101:

Đặt $p^3 - 4p + 9 = t^2 (t \in N)$

Biến đổi thành $p\left(p^2 - 4\right) = (t-3)(t+3)$ $(1) \Rightarrow p \mid (t-3) \vee p \mid (t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p \mid t - 3$

Đặt $t - 3 = pk (k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p\left(p^2 - 4\right) = pk(pk + 6) \Leftrightarrow p^2 - pk^2 - 6k - 4 = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta = k^4 + 4\left(6k + 4\right) = k^4 + 24k + 16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k > 3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2\right)^2 < k^4 + 24k + 16 < \left(k^2 + 4\right)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 + 1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k - 15 = 0$ (loại)

$k^4 + 24k + 16 = \left(k^2 + 2\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 6k - 3 = 0$ (loại)

$k^2 + 24k + 16 = \left(k^2 + 3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2 - 24k - 7 = 0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k = 3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t = 36; p = 11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào 1

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3)\Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4\Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2\Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p\mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6)\Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4(6k-4)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2\Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2\Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 102:

Ta có $4B=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n.(n-1).(n-2).\left[(n+3)-(n-1)\right]$

$=n.(n+1).(n+2).(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n<n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

Mặt khác

$n^4+6n^3+11n^2+6n>n^4+6n^3+9n^2=\left(n^2+3n\right)^2\Rightarrow\left(n^2+3n\right)^2<4B<\left(n^2+3n+1\right)^2$

Do đó B không phải là số chính phương.

Bài 103:

Ta có: $p^2+a^2=b^2\Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a = (p-1)(p+1)$.
Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.
Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)
Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.
Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)
Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).
Xét $2(p+a+1)=2\left(p+\dfrac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=(p+1)^2$ là số chính phương.

Bài 104:
Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau :

Các nhóm $n_1, n_2, ..., n_{310}$ mỗi nhóm gồm 2 số hạng $(k, 625-k)$ tức là mỗi nhóm có hai số hạng có tổng bằng 625 sao cho $k \neq 49, k \neq 225$

Nhóm 311 gồm 5 số chính phương $\{49; 225; 400; 576; 625\}$

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm n_{311}, như vậy 311 số này thuộc 310 nhóm còn lại thì theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất một trong hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625. Mẫu thuẫn với giả thiết. Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm n_{311}. Số này là số chính phương.

Bài 105:

Do $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow n^2+2n+18=k^2 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$

Do k, n đều là số tự nhiên nên $k+n+1>k-n-1$

Xét $\begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2\,(tm)$

Vậy $n=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 106:

Ta có $\overline{ab}-\overline{ba}=k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 9(a-b)=k^2$

Do đó $a-b$ là một số chính phương

Ta lại có $a-b \le 9, a \neq b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=4 \\ a-b=9 \end{array}\right.$

Với $a-b=1 \Rightarrow a=b+1 \Rightarrow$ có 9 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98

Với $a-b=4 \Rightarrow a=b+4 \Rightarrow$ có 6 số thỏa mãn: 40; 51; 62; 73; 84; 95.

Với $a-b=9 \Rightarrow a=b+9 \Rightarrow$ có 1 số thỏa mãn: 90

Vậy có tất cả 16 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87;98; 40; 51; 62; 73; 84; 95; 90.

Bài 107:

Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\,sc1}=\frac{10^n-1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a=\underbrace{111...1}_{2017\,sc1}=\frac{10^{2017}-1}{9}$ và $b=1\underbrace{000...0}_{2016\,cs0}5=1\underbrace{000...0}_{2017\,cs0}+5=10^n+5$.

Khi đó ta được

$$M=ab+1=\frac{10^{2017}-1}{9}.\left(10^n+5\right)+1=\frac{\left(10^{2017}\right)^2+4.10^{2017}-5}{9}+1=\left(\frac{10^{2017}+2}{3}\right)^2.$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ hiển nhiên đúng do $10^{2017}+2\,\vdots\,3$. Vậy $M=ab+1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9=10^1-1;99=10^2-1;999=10^3-1;...;\underbrace{999...9}_{n\,cs9}=10^n-1$$

Bài 108.

$$a_n=1+\frac{2^n.(1.3.5......(2n-1).(n-4)!}{(2n)!}1+\frac{2^n.(n+4)!}{2.4.6...2n}=1+\frac{2^n..1.2.3...n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)!}{2^n.1.2.3.4...n}$$

$$=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$a_n=(n^2+5n+5)^2$$