**Dạng toán: Ứng dụng tứ giác nội tiếp**

**A. Kiến thức**

1. Hệ thức 1: Cho đường tròn  và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm) và các cát tuyến  với đường tròn. Chứng minh rằng:



2. Hệ thức 2: Cho đường tròn  và điểm A nằm trong đường tròn . Qua A Kẻ hai dây cung CD và EF. Ta có 

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho tam giác  (các góc ,  đều nhọn), các đường cao ,  cắt nhau tại . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của  và  Vì  là trực tâm của tam giác  nội tiếp    Tương tự ta có  Vậy | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** | |
| Cho tam giác  với  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp góc . Chứng minh |  |
| **Lời giải**  Ta có  thẳng hàng  là hai tia phân giác của hai góc kề bù  Tương tự ta có  là tứ giác nội tiếp.  Lấy  thuộc tia  sao cho  Vì  tâm  ngoại tiếp tứ giác  là trung điểm của  Vì  và  là phân giác  là trung trực của  cùng nằm trên một đường tròn  Xét phương tích điểm  với   (đpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** | |
| Cho nửa đường tròn tâm , đường kính ,  là điểm đối xứng của  qua . Đường thẳng qua  cắt nửa đường tròn  tại  và  ( nằm giữa  và . Gọi  là giao điểm của  và . Chúng minh rằng . |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp  và  Suy ra tứ giác  là tứ giác nội tiếp  nội tiếp  Xét phương tích của điểm  với đường tròn ngoại tiếp của tứ giác    Tương tự ta có  Vậy ta cần chứng minh  Ta có  Vậy  Mà  Vậy  (ddpcm). | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Từ một điểm  nằm ngoài đường tròn . Vẽ hai tiếp tuyến  ( là tiếp điểm) và một cát tuyến qua  cắt đường tròn tại ,  ( nằm giữa  và . Gọi  là giao điểm của  và . Khi cung  nhỏ hơn cung . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Áp dụng hệ thức (\*) ta có . Trong tam giác vuông  có  là đường cao nên  nội tiếp  Mà  (cùng chắn cung  của đường tròn (O)) nên . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** | |
| Cho đường tròn  đường kính . Vẽ đường tròn tâm  cắt đường tròn  ở  và . Kẻ dây  của đường tròn , cắt đường tròn  tại điểm  ở bên trong đường tròn . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Do  thuộc đường tròn đường kính  nên  hay  là tiếp tuyến của đường tròn  Xét đường tròn , ta có  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung )  Xét đường tròn , ta có  (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)  Ta có:  và  (góc ngoài của tam giác)  Mà  Vì  là trung trực của  nên  Từ (1)(2) suy ra | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** | |
| Cho tứ giác . Các đường thẳng  và  lần lượt cắt nhau tại  và . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác  nội tiếp đường tròn là |  |
| **Lời giải**  Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại , đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF cắt  tại . Áp dụng hệ thức (\*) với hai cát tueyén ,  và hai cát tuyến ,  ta có:  Từ (1)(2) ta có  Giả sử tứ giác  nội tiếp, ta có  (cùng bù ), mà  (cùng bù với ) nên  Suy ra tứ giác  nội tiếp, chứng tỏ  Từ  suy ra  Ngược lại,giả sử có , kết hợp với , suy ra  Chứng tỏ  Từ đó  Nên  nội tiếp đường tròn. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
| Cho tam giác  với hai đường phân giác trong và ngoài của  lần lượt là  và . Chứng minh rằng: |  |
| **Lời giải**  Giả sử  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác . Tia  cắt đường tròn ở  (điểm chính giữa cung . Tia đối của tia  cắt đường tròn tại .  Dễ thấy  Nên  là đường kính của đường tròn . Suy ra  Xét hai tam giác  và  có  (góc nội tiếp cùng chắn cung , suy ra  Nên  hay  Áp dụng hệ thức (\*\*) với hai dây cung  và  ta có  Do đó  Hai tam giác  và  có  (cùng phụ với hai góc bằng nhau )      Áp dụng hệ thức (\*) với hai cát tuyến  và  ta có  Do đó  Kết hợp  và  ta có đpcm. | |

**Dạng toán: Định lí Ptôlemê và ứng dụng**

**A. Kiến thức:** Định lí Ptôlêmê có thể phát biểu thành định lí thuận và đảo

Tứ giác ABCD nội tiếp 

Chứng minh:

Phân tích: 

Lấy  sao cho 



Chứng minh:

+ Chiều thuận: Lấy điểm M thuộc đoạn AC sao cho 



Ta đi chứng minh 

Thật vậy 

+ Chiều đảo: Lấy M sao cho  và  (M nằm trong góc )



Từ giả thiết ta đi chứng minh 

Thật vậy từ  và 



Từ (2)(3) 

Dấu “=” xảy ra  nội tiếp.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho tam giaác đều ABC có các cạnh bằng a. Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho . Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** Định lí Carnot | |
| Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn  và ngoại tiếp đường tròn . Gọi  lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** | |
| Cho đường tròn (O) và AB là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm C thuộc cung lớn AB sao cho  lớn nhất. |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Tam giác ABC vuông có . Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía A sao cho . Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho  nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** | |
|  |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** | |
|  |  |
| **Lời giải** | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
|  |  |
| **Lời giải** | |