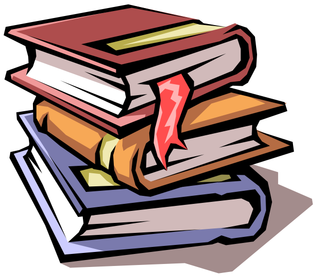
Tailieumontoan.com

Sưu tầm



CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC
LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

Mục lục

Hệ thức về cạnh và đường cao

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Thales, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kí hiệu: $AB=c,\ BC=a,\ CA=b,\ AH=h,$ $HB=c',\ HC=b'$. Ta có:

1) $a^2=b^2+c^2$.

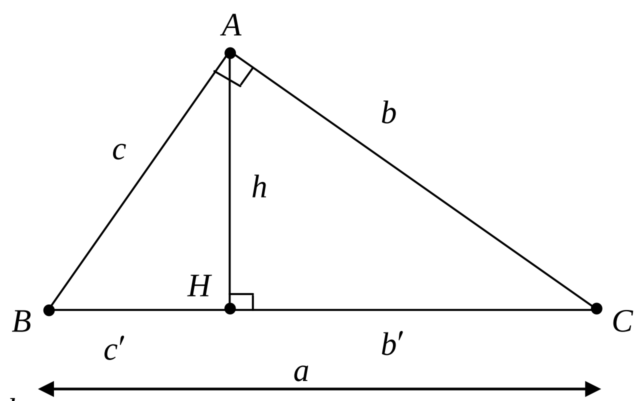
2) $b^2=ab';c^2=ac'$.

3) $h^2=b'.c'$.

4) $a.h=b.c$.

5) $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

6) $\dfrac{b'}{a}=\dfrac{b^2}{a^2}$.



Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S=\dfrac{1}{2}.b.c$.

Chứng minh:

+) Xét tam giác vuông AHB và CHA, ta có: $\widehat{BAH}=\widehat{HCA}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$) suy ra $\Delta AHB \backsim \Delta CHA(g.g)$ nên ta có: $\dfrac{AH}{HB}=\dfrac{CH}{HA}\Leftrightarrow AH^2=BH.CH$.

+) Xét tam giác vuông BHA và BAC, ta có: $\widehat{ABC}$ chung suy ta $\Delta BAH \backsim \Delta BAC(g.g)$ nên ta có: $\dfrac{BH}{BA}=\dfrac{BA}{BC}\Leftrightarrow BA^2=BH.BC$.

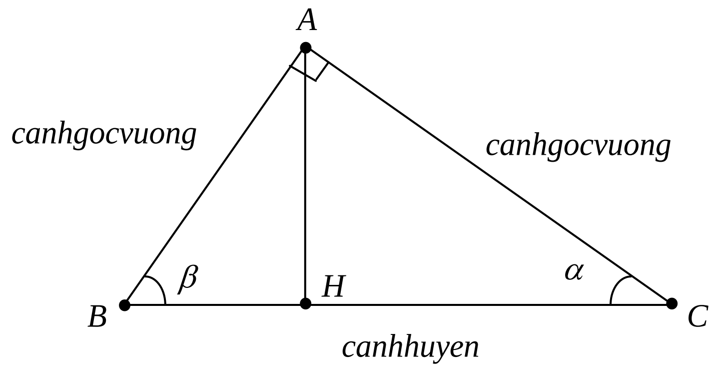
+) Tương tự ta có: $\Delta AHC \backsim \Delta BAC(g.g)$ nên $\dfrac{AC}{HC}=\dfrac{BC}{AC}\Leftrightarrow CA^2=CH.CB$.

+) Ta có:

$$AH.BC=AB.AC=(2S_{ABC})\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BC^2}{AB^2.AC^2}\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2.AC^2}\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}.$$

Tỉ số lượng giác của góc nhọn

KIẾN THỨC CƠ BẢN



Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi đó ta có các góc B,C là góc nhọn, đặt $\widehat{C}=\alpha,\widehat{B}=\beta$ thì $\alpha+\beta=90^0$.

Xét góc α ta thấy: AB là cạnh đối của góc α, AC gọi là cạnh kề của góc α.

1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$\sin\alpha=\dfrac{AB}{BC};\cos\alpha=\dfrac{AC}{BC};\tan\alpha=\dfrac{AB}{AC};\cot\alpha=\dfrac{AC}{AB}$.

Nếu α là góc nhọn thì:

$0<\sin\alpha<1;0<\cos\alpha<1;\tan\alpha>0;\cot\alpha>0$.

2. Với hai góc α,β mà $\alpha+\beta=90^0$,

Ta có: $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta;$

$\tan\alpha=\cot\beta;\cot\alpha=\tan\beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha=\sin\beta$ hoặc $\cos\alpha=\cos\beta$ thì $\alpha=\beta$.

3. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\tan\alpha.\cot\alpha=1$.

4. Với một số góc đặc biệt ta có: $\sin 30^0=\cos 60^0=\dfrac{1}{2};\sin 45^0=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 30^0=\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\cot 60^0=\tan 30^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\tan 45^0=\cot 45^0=1;\cot 30^0=\tan 60^0=\sqrt{3}$.

Việc chứng minh các hệ thức khá đơn giản:

+) Ta có: $\sin\alpha=\dfrac{AB}{BC};\cos\beta=\dfrac{AB}{BC}$ suy ra $\sin\alpha=\cos\beta$. Tương tự cho các trường hợp còn lại.

+) Ta có:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC};\cos\alpha=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\sin^2\alpha=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2;\cos^2\alpha=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1.$$

Một số ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a. $AB = a, AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

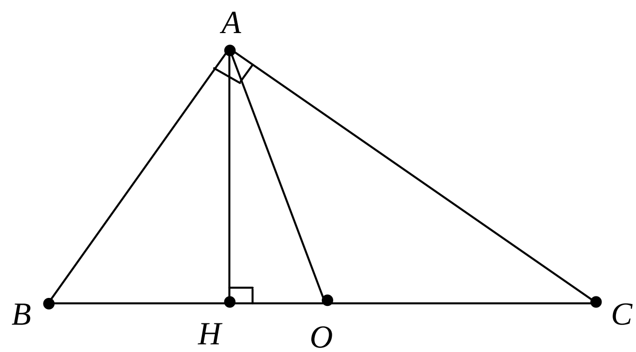
b. $BC = 2a; HC = \frac{1}{4}BC$.

c. $AB = a; CH = \frac{3}{2}a$;

d. $CA = a\sqrt{3}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

e. $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}; BC = 5a$.

Giải



a. Áp dụng công thức: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Ta có: $\frac{1}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

b. Ta có tam giác OAB cân tại O, $BC = 2BO$

Mà $BC = 4BH \Rightarrow BH = BO \Rightarrow \Delta OAB$ cũng cân tại B. Hay OAB là tam giác đều. Suy ra $AB = a, AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ nên $AC = a\sqrt{3}$.

c. Áp dụng công thức: $BA^2 = BH.BC \Rightarrow BA^2 = BH(BH + HC)$ hay $a^2 = BH^2 + \frac{3}{2}a.BH$

$\Leftrightarrow 2BH^2 + 3a.BH - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (2BH - a)(BH + 2a) = 0 \Rightarrow BH = \frac{a}{2}$.

Vậy $BC = 2a \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

d. Áp dụng công thức: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Ta có: $\frac{1}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AB = a \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4a^2$. Hay $BC = 2a$.

e. Đặt $AB = 3k, AC = 4k$ với $k > 0 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2 = BC^2 = 25a^2$ suy ra $k = a \Rightarrow AB = 3a, AC = 4a$.

Ví dụ 2: Cho tam giác vuông ABC có $A = 90^0, BC = 2a$, gọi O là trung điểm của BC. Dựng $AH \perp BC$.

a. Khi $\widehat{ACB} = 30^0$. Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.

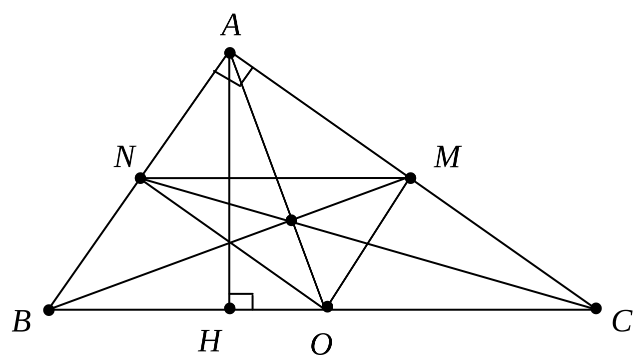
b. Khi $\widehat{ACB} = 30^0$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính độ dài BM.

c. Khi $\widehat{ACB} = 30^0$. Các đoạn thẳng AO, BM cắt nhau ở điểm G. Tính độ dài GC.

d. Giả sử điểm A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = 90^0$, $BC = 2a$. Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tam giác AHO lớn nhất?

e. Giả sử CG cắt AB tại điểm N. Tứ giác $AMON$ là hình gì? Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác $AMON$ lớn nhất?

Giải



a. Khi $\widehat{ACB} = 30^0$ thì tam giác ABC là tam giác nửa đều nên $AB = \frac{1}{2}BC = a$,

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

b. Theo câu a) ta có: $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BM^2 = BA^2 + AM^2 = a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

c. Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $CG = \frac{2}{3}CN$ (với N là trung điểm của AB).

Áp dụng định lý Pitago ta có: $CN^2 = AN^2 + AC^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow CN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $CG = \frac{2}{3}CN = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

d. Ta có: $S_{AHO}=\frac{1}{2}AH.HO\le\frac{1}{2}\left(AH^2+HO^2\right)=\frac{1}{2}AO^2=\frac{BC^2}{4}=a^2$. Diện tích tam giác AHO lớn nhất khi và chỉ khi $AH=HO$. Tức là AHO vuông cân tại H. Suy ra $\widehat{ACB}=22^030'$, $\widehat{ABC}=77^030'$.

d. Tứ giác $AMON$ là hình chữ nhật nên $S_{AMON}=AM.AN$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $AM^2+AN^2\ge 2AM.AN\Leftrightarrow MN^2\ge 2AM.AN$. Mà $MN^2=OA^2=a^2$ nên $AM.AN\le\frac{a^2}{2}$. Vậy $S_{AMON}\le\frac{a^2}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM=AN\Leftrightarrow AB=AC$, hay tam giác ABC vuông cân tại A.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Từ H dựng HM,HN lần lượt vuông góc với AC,AB.

a. Chứng minh: $CM.CA.BN.BA=AH^4$.

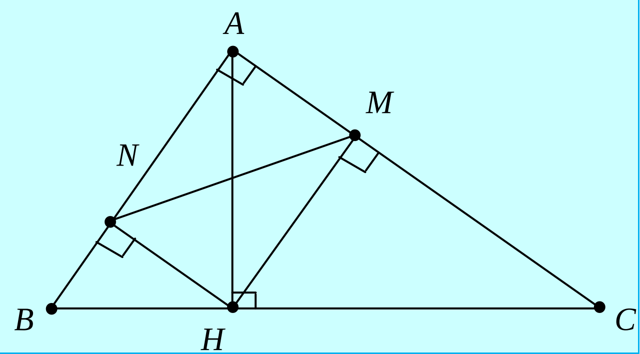
b. Chứng minh: $CM.BN.BC=AH^3$.

c. Chứng minh: $AM.AN=\frac{AH^3}{BC}$.

d. Chứng minh: $\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BN}{CM}$.

e. Chứng minh: $AN.NB+AM.MC=AH^2$.

f. Chứng minh: $\sqrt[3]{BC^2}=\sqrt[3]{BN^2}+\sqrt[3]{CM^2}$.



Giải

a. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB,AHC,ABC ta có: $BN.BA=BH^2,CM.CA=CH^2,HB.HC=AH^2$, suy ra $CM.CA.BN.BA=(CH.BH)^2=AH^4$.

b. Chú ý rằng: $AB.AC=AH.BC=(2S_{ABC})$

Từ câu a) suy ra $CM.BN.AH.BC=AH^4\Leftrightarrow CM.BN.BC=AH^3$.

c. Ta có: $AM.AC=AH^2,AN.AB=AH^2\Rightarrow AM.AN.AB.AC=AH^4$, mặt khác $AB.AC=AH.BC=(2S_{ABC})$ nên $AM.AN.BC=AH^3$.

d. Ta có: $CM.CA=CH^2,BN.BA=BH^2\Rightarrow\frac{BN}{CM}=\frac{BH^2.CA}{CH^2.AB}$ (*) ta lại có: $BH.BC=BA^2\Rightarrow BH^2=\frac{BA^4}{BC^2},CH.CB=CA^2\Rightarrow CH^2=\frac{CA^4}{BC^2}$ thay vào (*) ta suy ra $\frac{BH}{CM}=\frac{AB^3}{AC^3}$.

e. Ta có: $AN.NB=HN^2,AM.MC=HM^2\Rightarrow AN.NB+AM.MC=HN^2+HM^2$. Tứ giác $ANHM$ là hình chữ nhật nên $HN^2+HM^2=MN^2=AH^2$ hay $AN.NB+AM.MC=AH^2$.

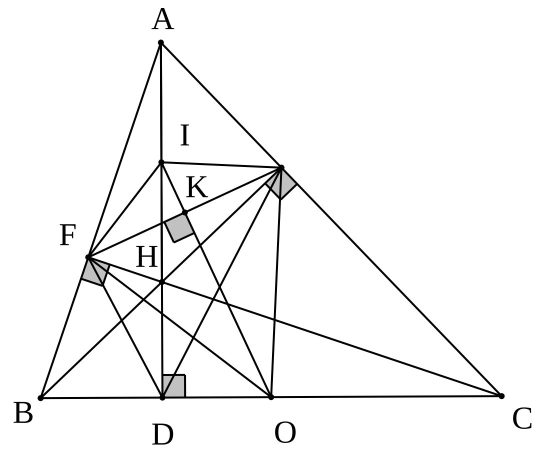
f. Ta có: $CM.CA = CH^2, BN.BA = BH^2 \Rightarrow BN^2 = \dfrac{BH^4}{AB^2}, CM^2 = \dfrac{CH^4}{AC^2}$. Lại có $BA^2 = BH.BC$ nên suy ra $BH = \dfrac{BA^2}{BC} \Rightarrow BH^4 = \dfrac{BA^8}{BC^4} \Rightarrow \dfrac{BH^4}{BA^2} = \dfrac{BA^6}{BC^4}$ hay $BN^2 = \dfrac{BA^6}{BC^4}$ tương tự ta cũng có: $CM^2 = \dfrac{CA^6}{BC^4} \Rightarrow \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2} = \sqrt[3]{\dfrac{BA^6}{BC^4}} + \sqrt[3]{\dfrac{CA^6}{BC^4}} = \dfrac{BA^2 + CA^2}{\sqrt[3]{BC^4}}$. Theo định lý pitago ta có: $BA^2 + CA^2 = BC^2$ suy ra $\sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2} = \dfrac{BC^2}{\sqrt[3]{BC^4}} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Ví dụ 4

Cho tam giác nhọn ABC, có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH, K là giao điểm của EF, OI biết $BC = 2a$.

a) Chứng minh : các tam giác IEO, IFO là tam giác vuông.
b) Chứng minh : OI là trung trực của EF.
c) Chứng minh: $AH^2 = 4IK.IO$.
d) Chứng minh : $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$.
e) Chứng minh : $\dfrac{EF}{BC}.\dfrac{FD}{AC}.\dfrac{ED}{AB} = \cos A.\cos B.\cos C$
f) Chứng minh: $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$
g) Chứng minh : $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right)$
h) Chứng minh : $\tan B.\tan C = \dfrac{AD}{HD}$
i) Giả sử $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{ACB} = 45°$. Tính S_{ABC} theo a
j) Gọi M là điểm trên AH sao cho $\widehat{BMC} = 90°$. Chứng minh: $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC}.S_{BHC}}$

GIẢI



a. Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên các tam giác AEH, AFH lần lượt vuông tại E, F. Do I là trung điểm cạnh huyền AH nên tam giác AIE cân tại I suy ra $\widehat{IEA}=\widehat{IAE}\ (1)$, tam giác OEC cân tại O nên $\widehat{OEC}=\widehat{OCE}\,(2)$. Lấy $(1)+(2)$ theo vế ta có $\widehat{IEA}+\widehat{OEC}=\widehat{IAE}+\widehat{OCE}=90^\circ$ hay $\widehat{OEI}=90^\circ$. Tương tự ta cũng có $\widehat{OFI}=90^\circ$.

b. Do $IE=IF=\dfrac{AH}{2}\Rightarrow I$ nằm trên trung trực của EF, $OE=OF=\dfrac{BC}{2}$ nên O nằm trên trung trực của EF suy ra OI là trung trực của EF.

c. Do OI là trung trực của EF nên $IO\perp EF$ tại K. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông IEO ta có: $IK.IO=IE^2=\left(\dfrac{AH}{2}\right)^2\Leftrightarrow 4IK.IO=AH^2$

d. Trong tam giác vuông AEB ta có $\cos A=\dfrac{AE}{AB}$, trong tam giác vuông AFC ta cũng có $\cos A=\dfrac{AF}{AC}\Rightarrow\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$, suy ra $\Delta AEF\backsim\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\cos A$

e. Tương tự như câu d) ta cũng có:

$\dfrac{FD}{AC}=\cos B,\ \dfrac{ED}{AB}=\cos C$ suy ra $\dfrac{EF}{BC}.\dfrac{FD}{AC}.\dfrac{ED}{AB}=\cos A.\cos B.\cos C.$

f. Theo câu d) ta có : $\Delta\,AEF\backsim\Delta\,ABC\Rightarrow\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2 A.$

g. Ta có : $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-S_{AEF}-S_{BFD}-S_{DFE}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}-\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}-\frac{S_{DFE}}{S_{ABC}}$. Tương tự như câu f) ta cũng có $\frac{S_{BFD}}{S_{ABC}}=\cos^2 B, \frac{S_{DFE}}{S_{ABC}}=\cos^2 C$ suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)$.

h. Ta có : $\tan B=\frac{AD}{BD}, \tan C=\frac{AD}{AC}$ suy ra $\tan B.\tan C=\frac{AD^2}{BD.CD}$, ta cần chứng minh $\frac{AD^2}{BD.CD}=\frac{AD}{HD}\Leftrightarrow AD.HD=BD.CD$. Thật vậy xét tam giác BDH và tam giác ADC ta có : $\widehat{BHD}=180°-\widehat{DHE}=\widehat{ACD}$ suy ra $\Delta BDH \backsim \Delta ADC$ nên $\frac{DH}{DC}=\frac{BD}{AD}$ hay $AD.HD=BD.CD$ đpcm.

i. Để tính diện tích tam giác ABC ta cần tính đường cao AD theo a .

Do tam giác ACD vuông tại D nên $AD=DC\,(*)$. Do $\widehat{ABC}=60°$ nên :

$\tan 60°=\frac{AD}{BD}\Leftrightarrow AD=BD.\sqrt{3}\,(**)$. Nhân $(*)$ với $\sqrt{3}$ rồi cộng với $(**)$ ta có:

$$\left(\sqrt{3}+1\right)AD=\sqrt{3}\left(DC+BD\right)=\sqrt{3}BC=2\sqrt{3}a\Rightarrow AD=\frac{2\sqrt{3}a}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a$$

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}.\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)a.2a=\left(3-\sqrt{3}\right)a^2$.

j. Ta cần chứng minh $S^2{}_{BMC}=S_{ABC}.S_{BHC}\,(***)$

Áp dụng công thức tính diện tích các tam giác ta có :

$$S_{BMC}=\frac{1}{2}MD.BC,\ S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC,\ S_{BHC}=\frac{1}{2}HD.BC$$

Thay vào $(***)$ thì điều cần chứng minh tương đương với $MD^2=AD.HD$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BMC ta có : $MD^2=DB.DC$. Như vậy ta quy về chứng minh : $DB.DC=AD.HD$. Xét tam giác BDH và tam giác ADC ta có: $\widehat{BHD}=180°-\widehat{BHE}=\widehat{ACD}$ suy ra $\Delta BDH \backsim \Delta ADC$. Nên $\frac{DH}{DC}=\frac{BD}{AD}$ hay $AD.HD=BD.CD$ đpcm.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng :

a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

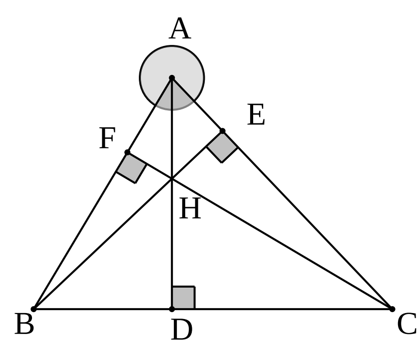
b. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Heron) với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

c. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

$S = \dfrac{1}{2}ab.\sin C = \dfrac{1}{2}bc.\sin A = \dfrac{1}{2}ac.\sin B$

d. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Giải



a. Dựng đường cao BE của tam giác ABC ta có :

Cách 1 : Giả sử E thuộc cạnh AC

Ta có : $AC = AE + EC$. Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông AEB, BEC ta có $AB^2 = AE^2 + EB^2,\ BC^2 = BE^2 + EC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có

$$c^2 - a^2 = EA^2 - EC^2 = (EA + EC)(EA - EC) = b.(EA - EC) \Rightarrow EA - EC = \frac{c^2 - a^2}{b}$$

Ta cũng có $EA + EC = b \Rightarrow AE = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Xét tam giác vuông AEB ta có : $\cos A = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2+c^2-2bc.\cos A.$

Cách 2 : Xét tam giác vuông CEB ta có $BC^2 = BE^2 + EC^2 = BE^2 + \left(AC - AE\right)^2$

$= BE^2 + AE^2 + AC^2 - 2AC.AE$. Ta có: $AE = AB.\cos A$ suy ra

$BC^2 = BE^2 + AE^2 + AC^2 - 2AC.AB.\cos A$ hay $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AC.AB.\cos A$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

b. Ta giả sử góc A là.góc lớn nhất của tam giác $ABC \Rightarrow B,C$ là các góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A lên BC là điểm D thuộc cạnh BC . Ta có $BC = BD + DC$. Áp.dụng định lý pytago cho các tam giác vuông ADB, ADC , ta có :
$AB^2 = AD^2 + DB^2, AC^2 = AD^2 + DC^2$. Trừ hai đẳng thức trên ta có :

$c^2 - b^2 = DB^2 - DC^2 = \left(DB + DC\right)\left(DB - DC\right) = a.\left(DB - DC\right) \Rightarrow DB - DC = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$ ta cũng có

: $DB + DC = a \Rightarrow BD = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ADB

ta có :

$AD^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right).$

$= \left[\dfrac{\left(a+c\right)^2 - b^2}{2a}\right].\left[\dfrac{b^2 - \left(a-c\right)^2}{2a}\right] = \dfrac{\left(a+b+c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+a-c\right)\left(b+c-a\right)}{4a^2}$. Đặt $2p = a+b+c$

thì $AD^2 = \dfrac{16p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{4a^2} \Rightarrow AD = 2\dfrac{\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}}{a}$

Từ đó tính được $S = \dfrac{1}{2}BC.AD = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

c. Từ câu b) ta có : $S = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right) \le \left(\dfrac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \dfrac{p^3}{27}$. Suy ra $S \le \sqrt{p.\dfrac{p^3}{27}} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}.$

Hay $S \le \dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{12\sqrt{3}}$. Mặt khác ta dễ chứng minh được : $\left(a+b+c\right)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Suy ra $S \le \dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{12\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều .

d. Ta có : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC$, trong tam giác vuông ABD ta có $\sin B=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AD=AB.\sin B$

thay vào ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC=\frac{1}{2}AB.BC.\sin B=\frac{1}{2}ac.\sin\mathrm{B}$. Tương tự cho các công thức còn lại.

e. Dựng đường kính BK của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC thì $\widehat{BAK}=\widehat{BCK}=90^\circ$ và $OA=OB=OC=R.$.

Trong tam giác vuông BKC ta có : $\sin\widehat{BKC}=\frac{BC}{BK}=\frac{a}{2R}$

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác ta có :

$\widehat{BOC}=2\widehat{BKC},\ \widehat{BAC}=\widehat{BAO}+\widehat{OAC}=\frac{1}{2}\widehat{AOK}+\frac{1}{2}\widehat{AOx}$

Hay $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{KOx}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\widehat{BKC}$.

Từ đó suy ra : $\sin\widehat{ABC}=\sin\widehat{BKC}=\frac{a}{2R}$ hay $\frac{a}{\sin A}=2R$

Tương tự : $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$.

<u>Chú ý :</u> Việc dựng đường kính AK giúp ta tạo ra tam giác vuông đẻ sử dụng tỷ số lượng giác góc nhọn, $\widehat{BAC}=\widehat{BKC}$ là một kết quả quen thuộc trong chương 2- hình 9 (hai góc nội tiếp chán cùng một cung)

Nếu chỉ chứng minh rằng : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Ta làm đơn giản hơn như sau :

Vẽ $AD\perp BC, D\in BC, \Delta DAB$ có $\widehat{D}=90^\circ$ nên $\sin B=\frac{AD}{AB}$; ΔDAC có $\widehat{D}=90^\circ$ nên $\sin\widehat{C}=\frac{AD}{AC}$. .

Do đó $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Chứng minh tương tự ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

Vậy $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

Ví dụ 6:

Cho tam giác ABC với các đỉnh A,B,C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là : a,b,c. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A . Chứng minh rằng:

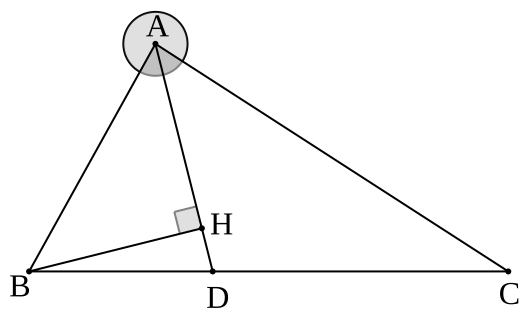
a. Chưng minh: $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{a}{b+c}$.

b. Chứng minh : $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{b+c}$.

c. Chứng minh : $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$.

d. Chứng minh : $AD=\dfrac{2bc.\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)}{b+c}$

Giải



Áp dụng tính chất đường phân giác trong ta có : $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$ suy ra $DC=\dfrac{b}{c}.DB$ nên :

$DB+DC=\dfrac{b}{c}DB+DB=\dfrac{(b+c)}{c}DB \Leftrightarrow a=\dfrac{(b+c)}{c}.DB$ hay $DB=\dfrac{ac}{b+c}\Leftrightarrow\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{a}{b+c}$.

b. Dựng $BH\perp AD$ thì $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{BH}{AB}\le\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{a}{b+c}$.

c. Áp dụng kết quả các câu a, b ta có: $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\le\left(\dfrac{a}{b+c}\right)\left(\dfrac{b}{c+a}\right)\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $b+c\ge 2\sqrt{bc},\ c+a\ge 2\sqrt{ca},\ a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Nhân các bất đẳng thức (có các vế dương) cùng chiều ta có: $(b+c)(c+a)(a+b)\ge 8abc$.

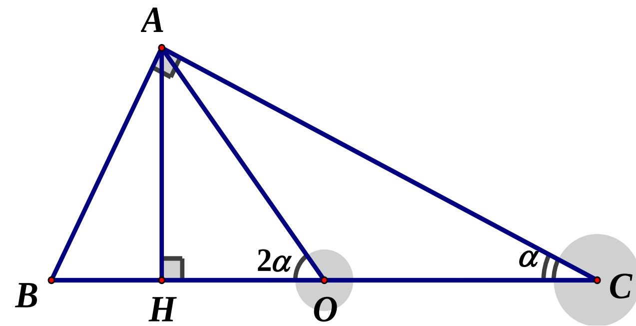
Suy ra $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)\left(\dfrac{b}{c+a}\right)\left(\dfrac{c}{a+b}\right)\le\dfrac{1}{8}$ hay $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

c. Để chứng minh bài toán ta cần kết quả sau:

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha.$
- $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C.$

*) Thật vậy xét tam giác vuông $ABC,\ \widehat{A} = 90°,$ gọi O là trung điểm của $BC,$ dựng đường cao $AH.$



Đặt $\widehat{ACB} = \alpha \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\alpha.$

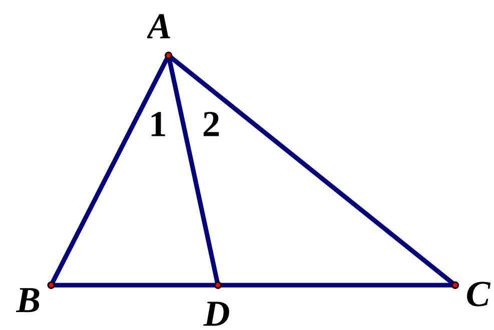
Ta có: $\sin\alpha = \sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{h}{b},\ \cos\alpha = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}.$

$\sin 2\alpha = \sin\widehat{AOH} = \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}.$

Từ đó ta suy ra: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha.$

*) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ (Xem ví dụ 5).

Trở lại bài toán:



Ta có: $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AD.AB.\sin\widehat{A_1} = \dfrac{1}{2}AD.c.\sin\left(\dfrac{A}{2}\right).$

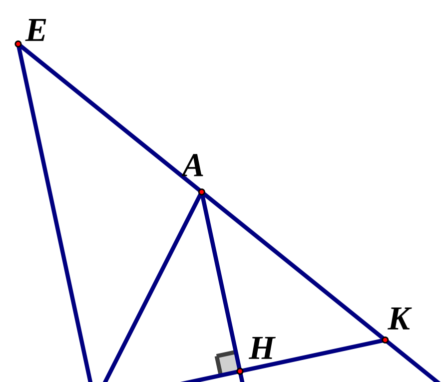
$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AD.AC.\sin\widehat{A_2} = \dfrac{1}{2}AD.b.\sin\left(\dfrac{A}{2}\right).$

Suy ra $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AD.\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)[c+b].$

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow AD\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)[c+b] = bc\sin A \Leftrightarrow AD = \dfrac{bc\sin A}{(b+c)\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{c+b}.$

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách khác:

Dựng $BH \perp AD,\ BH$ cắt AC tại K thì tam giác ABK cân tại A nên H là trung điểm của $BK.$



Ta có: $\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH = c.\cos\dfrac{A}{2}.$

Theo tính chất phân giác ta cũng có:

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}\Leftrightarrow\dfrac{AB+AC}{AC}=\dfrac{DB+DC}{DC}.$

$\Rightarrow DC=\dfrac{AC.BC}{AB+AC}$ hay $DC=\dfrac{ab}{b+c}\Rightarrow\dfrac{DC}{a}=\dfrac{b}{b+c}.$

Như vậy ta cần chứng minh: $AH.\dfrac{2DC}{a}=AD.$

Dựng $BE\,//\,AD$ (E nằm trên đường thẳng AC).

Suy ra $2AH=BE$ nên ta chỉ cần chỉ ra $BE.DC=AD.BC,$ hay $\dfrac{BE}{AD}=\dfrac{BC}{DC}$ nhưng điều này luôn đúng theo định lý Thales.

Chú ý rằng: Ta chứng minh được kết quả sau: $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$

Thật vậy xét tam giác vuông $ABC,\ \widehat{A}=90^\circ,$ gọi O là trung điểm của $BC,$ dựng đường cao $AH.$

Đặt $\widehat{ACB}=\alpha\Rightarrow\widehat{AOB}=2\alpha.$ Ta có: $\cos\alpha=\cos C=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a},\ \sin\alpha=\sin C=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{c}{a}.$

$$\cos 2\alpha=\cos\widehat{AOH}=\frac{AO^2+OB^2-AB^2}{2AO.OB}=\frac{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-c^2}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}}=\frac{a^2-2c^2}{a^2}=1-2\left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

$=1-2\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-1.$ Từ đó suy ra $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$

Áp dụng công thức: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right).$

$\Rightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1\Leftrightarrow\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4bc}.$ Thay vào công thức đường phân giác ta có:

$$AD=\frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{c+b}=\frac{2bc\sqrt{\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}.$$

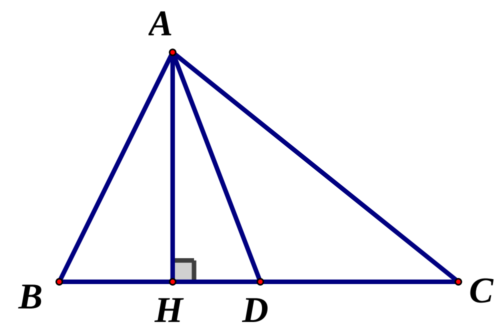
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{bc}\le\dfrac{b+c}{2}\Rightarrow AD\le\dfrac{\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{2}=\sqrt{p(p-a)},$ với $2p=a+b+c.$

Áp dụng công thức: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$ Ta cũng chứng minh được hệ thức rất quan trọng trong hình học phẳng (Định lý Stewart) đó là: "Cho điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC khi đó ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$"

+ Thật vậy: Ta kẻ $AH \perp BC.$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử D nằm trong đoạn $HC.$

Khi đó ta có:



$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2.AD.BD.\cos\widehat{ADB}$$
$$= AD^2 + BD^2 - 2DB.DH \quad (1).$$

Tương tự ta có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DH.DC$ (2).

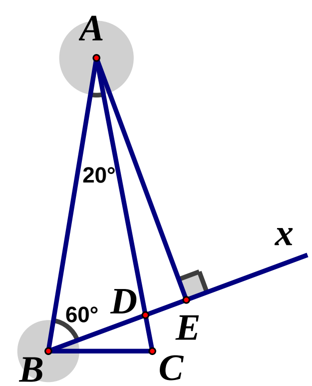
Nhân đẳng thức (1) với $DC,$ đẳng thức (2) với BD

rồi cộng lại theo vế ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right).$

Ví dụ 7: Cho tam giác cân $ABC,$ $\hat{A} = 20°,$ $AB = AC,$ $AC = b,$ $BC = a.$ Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2.$

Giải

Vẽ tia Bx sao cho $\widehat{CBx} = 20°,$ Bx cắt cạnh AC tại $D.$



Vẽ $AE \perp Bx,$ $E \in Bx.$ Xét ΔBDC và ΔABC có:

$\widehat{CBD} = \widehat{BAC} = 20°;$ $\widehat{BCD}$ chung nên $\Delta BDC \backsim \Delta ABC.$

Do đó $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{BC}$ vì $BD = BC = a;$

$$DC = \frac{BD}{AB}.BC = \frac{a^2}{b};\ AD = AC - DC = b - \frac{a^2}{b}.$$

Ta có: ΔABE vuông tại E và $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{CBD} = 60°$

nên ΔABE là nửa tam giác đều .

Suy ra $BE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{b}{2} \Rightarrow DE = BE - BD = \dfrac{b}{2} - a.$

ΔABE vuông tại $E,$ nên tho định lý Pitago ta có:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = AB^2 - BE^2 = \frac{3}{4}b^2.$$

ΔADE vuông tại $E,$ nên tho định lý Pitago ta có:

$$AE^2+DE^2=AD^2 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2+\left(\frac{b}{2}-a\right)^2=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2-ab+a^2=b^2-2a^2+\frac{a^4}{b^2}$$

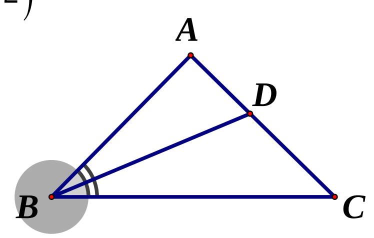
$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2}+ab=3a^2 \Rightarrow a^3+b^3=3ab^2.$$

Chú ý: Nếu không dùng định lý Pitago ta cũng có thể áp dụng công thức:

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB.BD.\cos\widehat{ABD}=AB^2+BC^2-2AB.BC.\frac{1}{2}=c^2+a^2-ac.$ Từ đó dựa vào hệ thức: $BC^2=AC.DC=AC\left(AC-AD\right)\Rightarrow\left(AC.AD\right)^2=\left(AC^2-BC^2\right)^2$ ta cũng có được kết quả cần tìm.

Ví dụ 8: Tính $\sin 22°30', \cos 22°30', \tan 22°30'.$

Giải



Dựng tam giác vuông cân $ABC,$ không mất tính tổng quát ta đặt $AB=AC=1, \widehat{A}=90° \Rightarrow BC=\sqrt{2}.$

Gọi BD là phân giác góc $\widehat{B},$ theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{BC+AB}\Rightarrow AD=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$ Áp dụng định lý Pitago

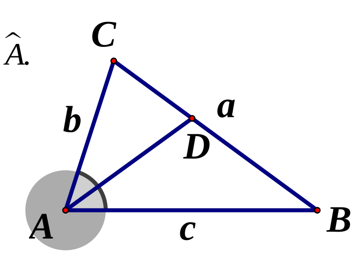
$$\Rightarrow BD^2=AB^2+AD^2\Rightarrow BD^2=1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=4-2\sqrt{2}\Rightarrow BD=\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin 22°30'=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos 22°30'=\frac{AB}{BD}=\frac{1}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \tan 22°30'=\frac{\sin 22°30'}{\cos 22°30'}=\sqrt{2}-1.$$

Ví dụ 9: Chứng minh rằng trong tam giác $ABC, \widehat{A}=2\widehat{B}\Leftrightarrow a^2=b\left(b+c\right).$

Giải



Kẻ đường phân giác $AD,$ ta có: $\widehat{CAD}=\widehat{DAB}, \widehat{ADC}=\widehat{DAB}+\widehat{B}=2\widehat{B}=\widehat{A}.$

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DAC \Leftrightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{DA}{AC}\Leftrightarrow cb=a.AD=a.BD.$$

$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}\Leftrightarrow\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AB}{AB+AC}\Leftrightarrow AD=\dfrac{ac}{b+c}.$

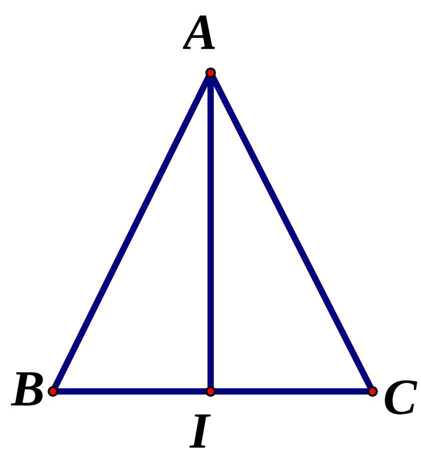
$\Leftrightarrow bc=a\dfrac{ac}{b+c}\Leftrightarrow a^2=b(b+c).$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Giải

Dựng tam giác cân $ABC\ (AB=AC)$, $\widehat{A}=36^\circ\Rightarrow\widehat{B}=\widehat{C}=2\widehat{A}.$ Áp dụng ví dụ 2 ta có:

$AB^2=BC^2+AB.BC,$ chia hai vế cho $AB^2,$



ta được $\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2+\dfrac{BC}{AB}-1=0.$ Gọi I là trung điểm $BC.$

$\Rightarrow AI\perp BC\Rightarrow\widehat{BAI}=\widehat{CAI}=18^\circ.$

$\Rightarrow\sin 18^\circ=\dfrac{BI}{AB}=\dfrac{BC}{2AB}\Rightarrow 4\left(\dfrac{BC}{2AB}\right)^2+2.\dfrac{BC}{2AB}-1=0.$

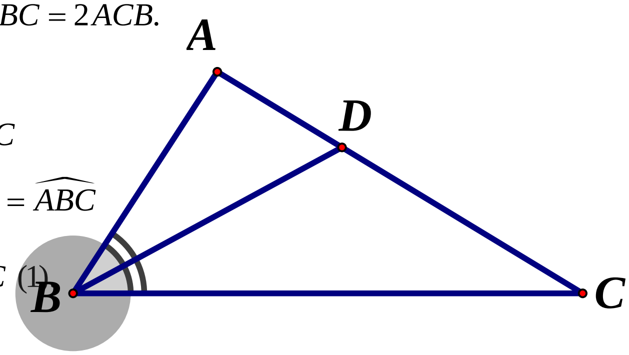
$\Rightarrow 4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0.$ Giải phương trình

ta tìm được $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (do $\sin 18^\circ>0$).

Bài toán tương tự: Cho tam giác MNP cân tại M và có góc $\widehat{NMP}=36^\circ.$ Tính tỷ số $\dfrac{NM}{NP}$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2011 – 2012).

Ta chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=2\widehat{ACB}.$

Chứng minh: $AC^2=AB^2+AB.BC.$



Thật vậy: Dựng phân giác trong BD của tam giác ABC

Ta có: BDC là tam giác cân từ đó suy ra $\widehat{ADB}=2\widehat{DBC}=\widehat{ABC}$

Suy ra $\Delta ABC\backsim\Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AB}\Leftrightarrow AB^2=AD.AC$ (1)

Theo tính chất đường phân giác ta cũng có

$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{AD}{AD+DC}=\dfrac{AB}{AB+BC}\Leftrightarrow AD=\dfrac{AB.AC}{AB+BC}$ thay vào (1) ta có: $AC^2=AB^2+AB.BC.$

Có thể biến đổi theo cách: $\Delta ABC\backsim\Delta ADB\Rightarrow\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BC}{DB}$

Suy ra $AB^2=AC.AD,\ AB.BC=AC.DB=AC.DC\ (\text{do } DB=DC).$

Từ đó ta có: $AB^2 + AB.BC = AC\left(AD + DC\right) = AC^2$.

Trở lại bài toán: Tam giác MNP cân tại M và $\widehat{NPM} = 36^0$ suy ra $\widehat{N} = \widehat{P} = 2\widehat{M}$. Áp dụng bổ đề ta có $AB^2 = BC^2 + AB.BC$. Chia hai vế cho AB^2 suy ra:

$$1 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC}{AB} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \frac{BC}{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 11

Chứng minh $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Giải

Dựng tam giác vuông ABC: $\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = 30^0$. Gỉa sử AC=1$\Rightarrow$BC=2, AB=$\sqrt{3}$.

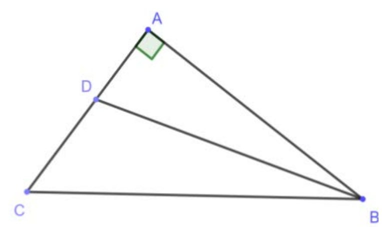
Dựng phân giác BD: $\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{AD}{AD+DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}-3$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 3 + 12 + 9 - 12\sqrt{3} = 12(2-\sqrt{3})$

$$BD = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow \cos 15^0 = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

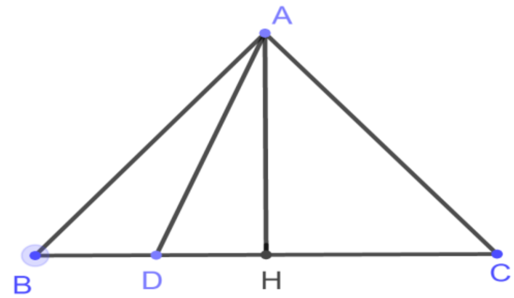
$$\sin 15^0 = \frac{AD}{BD} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(3-1)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$



Ví dụ 12

Chứng minh $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Giải



Dựng tam giác cân ABC (AB = AC) có $\widehat{A} = 108^0$

Lấy điểm D trên BC sao cho CD = CA. Ta có:

ΔCAD cân $\Rightarrow \widehat{ADC} = 72^0 \Rightarrow \widehat{ADB} = 108^0 \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DAB \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DA}{AB}$ $\Rightarrow AB^2 = BC.DA =$ BC(BC - AB)$\Rightarrow AB^2 = BC^2 - BC.AB$. Chia hai vế cho AB^2 được

$\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 - \dfrac{BC}{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ $\cos 36^0 = \dfrac{BC}{2AB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Ví dụ 13

Chứng minh các hệ thức

1. $\tan^2 36^0 + \tan^2 72^0 = 10$.   2. $\tan^4 36^0 + \tan^4 72^0 = 90$

Giải

$\tan^2 36^0 = \dfrac{\sin^2 36^0}{\cos^2 36^0} = \dfrac{1-\cos^2 36^0}{\cos^2 36^0} = \dfrac{1}{\cos^2 36^0} - 1$.

Sử dụng $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 36^0} = \dfrac{8}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{8(3-\sqrt{5})}{4} = 2(3-\sqrt{5}) \Rightarrow \tan^2 36^0 = 5 - 2\sqrt{5}$

Tương tự, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$, thay $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ tính được $\cot^2 18^0 = 5 + 2\sqrt{5} = \tan^2 72^0 \Rightarrow \tan^2 36^0 + \tan^2 72^0 = 5 - 2\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} = 10$

$\tan^4 36^0 + \tan^4 72^0 = (\tan^2 36^0 + \tan^2 72^0)^2 - 2\tan^2 36^0 . \tan^2 72^0 = 90$.

Ví dụ 14

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60°$ và đường phân giác AD. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.

Giải

Dựng tam giác ABC, $\widehat{A}=60^0$, AD là phân giác trong $\widehat{A} \Rightarrow \widehat{BAD}=\widehat{CAD}=30^0$

Kẻ DH⊥ AC, DK⊥ AB $\Rightarrow \Delta AKD=\Delta AHD \Rightarrow DH=DK=\frac{1}{2}AD$

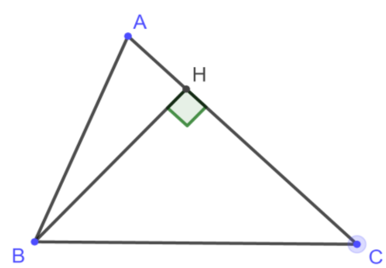
$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0=\frac{1}{2}AB.AD.\sin 30^0+\frac{1}{2}AC.AD.\sin 30^0$ hay

$\frac{\sqrt{3}}{2}AB.AC=\frac{1}{2}AB.AD+\frac{1}{2}AC.AD \Leftrightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$. Cũng có thể giải nhanh bằng cách áp dụng công thức tính đường phân giác trong AD

Ví dụ 15

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, $\widehat{A}=60^0$ khi và chỉ khi $a^2=b^2+c^2-bc$; $\widehat{A}=120^0$ khi và chỉ khi $a^2=b^2+c^2+bc$.

Giải



Hạ BH vuông góc với AC. $\widehat{A}=60^0 \Leftrightarrow \widehat{ABH}=30^0 \Leftrightarrow AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c$, $BH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔBHC, ta có:

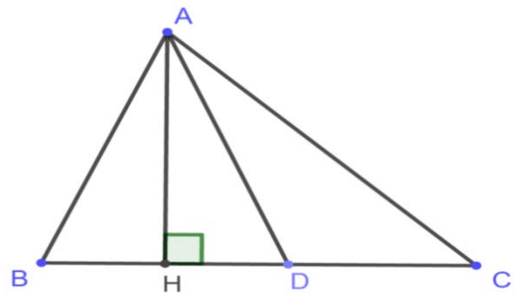
$a^2=BC^2=BH^2+HC^2 \Rightarrow \frac{3c^2}{4}+\left(b^2-\frac{c}{2}\right)^2=b^2+c^2-bc$.

Trường hợp $\widehat{A}=120^0$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 16

Tính độ dài các đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua ba cạnh của tam giác ấy.

Giải



Gọi AD là trung tuyến thuộc cạnh BC$\Rightarrow$DB = DC

Kẻ AH$\perp$ BC $\Rightarrow AD^2 = AH^2 + HD^2 \Rightarrow AD^2 = AB^2 – BH^2 + HD^2$ (1)

Tương tự, $AD^2 = AC^2 – CH^2 + HD^2$ (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được: $2AD^2 = AB^2 + AC^2 – BH^2 – CH^2 + 2\,HD^2$

$2AD^2 = AB^2 + AC^2 – (BH + CH)^2 + 2BH.HC + 2HD^2$

$2AD^2 = AB^2 + AC^2 – BC^2 + 2(BD – HD)(DC + HD)+2\,HD^2$

$2AD^2 = AB^2 + AC^2 – BC^2 + 2(BD^2 – HD^2)+2\,HD^2$

$2AD^2 = AB^2 + AC^2 – BC^2 + \frac{1}{2}BC^2 = AB^2 + AC^2 – \frac{1}{2}BC^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2$

Hoàn toàn tương tự ta tính được độ dài các đường trung tuyến còn lại(dành cho bạn đọc)

Từ các hệ thức này ta suy ra: trong hình bình hành, độ dài các cạnh là a,b và hai đường chéo là m,n. Ta có $m^2 + n^2 = 2(a^2+b^2) - \frac{1}{4}b^2$; $m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Ví dụ 17

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Giải

Gọi BM, CN là hai đường trung tuyến $\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM \Rightarrow BG^2 = \frac{4}{9}BM^2$

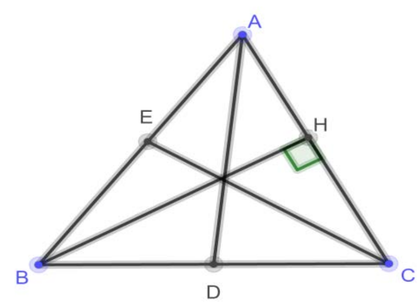
$\Rightarrow BG^2 = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{2}a^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}b^2\right) = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}b^2$ .Tương tự

$CG^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{9}c^2$. Khi đó BM$\perp$CN $\Leftrightarrow BG^2 + CG^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}b^2 +$
$\frac{2}{9}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{9}c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

Ví dụ 18

Cho tam giác ABC (BC=a,CA=b, AB=c). Trung tuyến AD, đường cao BH và phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức: $(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$

Giải



Xét tam giác vuông BHC

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = BC^2 - \left(AB^2 - AH^2\right) = BC^2 - AB^2 + AH^2 = BC^2 - AB^2 + (CA - CH)^2$

$\Rightarrow BC^2 + CA^2 - AB^2 = 2CA.CH$

Tương tự, $AH = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2}$ (1)

CE là phân giác của tam giác ABC,AD,BH,CE đồng quy $\Rightarrow$CO là đường phân giác của $\Delta ADC \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{2CA}$(2) .Từ D kẻ đường thẳng $DK \perp AC \Rightarrow BH // DK \Rightarrow HK = \frac{HC}{2}$

$\Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{HK}{HA} = \frac{CH}{2HA}$(3) .

Từ (1),(2),(3)

$\Rightarrow \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{CA^2 + AB^2 - BC^2} = \frac{BC}{CA}$

$\Rightarrow BC^2CA + CA^3 - AB^2CA = CA^2BC + AB^2BC - BC^3$

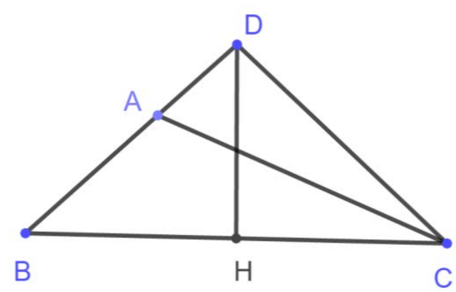
$\Rightarrow (BC^3+CA^3)+BC^2CA+CA^2BC-AB^2CA-AB^2BC=2BC.CA^2$

$\Rightarrow (BC+CA)(BC^2+CA^2-AB^2)=2BC.CA^2 \Rightarrow (a+b)(a^2+b^2-c^2)=2ab^2$

Ví dụ 19

Cho tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

Giải



Gọi H là trung điểm của BC, qua H dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt AB kéo dài tại D $\Rightarrow \Delta DBC$ là tam giác cân $\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{BCD}$.

Theo giả thiết, $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}$

Đặt $\alpha=\frac{180^0}{7} \Rightarrow \widehat{C}=\alpha, \widehat{B}=2\alpha, \widehat{A}=4\alpha,$

$\widehat{DAC}=\widehat{B}+\widehat{C}=3\alpha \Rightarrow \widehat{ACD}=\alpha \Rightarrow \widehat{BDC}=3\alpha$.

Do đó ΔCAD cân $\Rightarrow$ CA= CD = BD $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AB}{BD}(1)$

Vì CA là phân giác góc $\widehat{BCD} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{CD}(2)$.Cộng (1) với (2) từng vế được

$\frac{AB}{AC}+\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BD}+\frac{AD}{CD}=\frac{AB+AD}{BD}=1 \Rightarrow \frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{AB} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

Ví dụ 20

Cho tam giác vuông ABC $\left(\widehat{A}=90^0\right)$, đường cao AH. Độ dài các cạnh của tam giác là các số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AH}=1$ .Xác định các cạnh của tam giác.

Giải

Đặt $AB=\alpha, AC=b, AH=h,$ ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h}=1\Rightarrow bh+ah+ab=abh$.

Tam giác ABC vuông$\Rightarrow ab=ch$ và $c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow bh+ah+ch=abh\Rightarrow a+b+c=ab\Rightarrow a+b+\sqrt{a^2+b^2}=ab$

$\Rightarrow ab-a-b=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow a^2b^2-2ab(a+b)+2ab=0$

$\Rightarrow ab(ab-2a-2b+2)=0\Rightarrow ab-2a-2b+2=0\Rightarrow b=\frac{2a-b}{a-2}=2+\frac{2}{a-2}$

Vì a và b là các số nguyên nên 2 chia hết cho $a-2\Rightarrow a-2=2$ hoặc $a-2=1$.

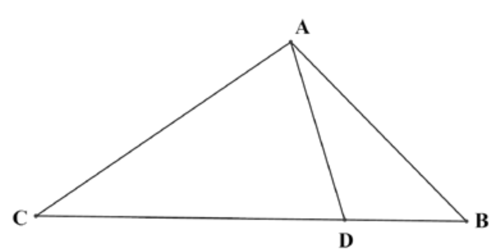
Trường hợp: $a-2=2\Rightarrow a=4\Rightarrow b=3\Rightarrow c=5\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{25}{144}\Rightarrow h=\frac{12}{5}$. Thay vào thỏa mãn $\Rightarrow AB=4, AC=3, BC=5$.

Trường hợp: $a-2=1\Rightarrow a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow c=5$. Vậy cả hai trường hợp tam giác có các cạnh 3, 4, 5.

Ví dụ: 21

Cho tam giác, thỏa mãn $2\widehat{B}+3\widehat{C}=180°$. Chứng minh rằng $BC^2=BC.AC+AB^2$.

Giải



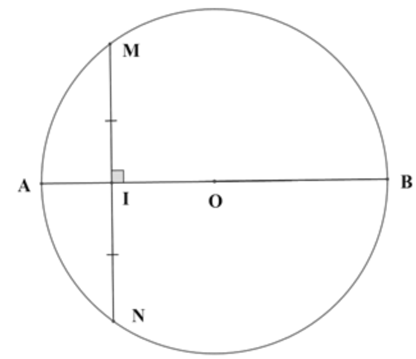
Ta viết lại biểu thức cần chứng minh thành: $BC^2-BC.AC=AB^2\Leftrightarrow BC(BC-AC)=AB^2$.
Trên BC lấy điểm D sao cho $CD=AC$. Khi đó biểu thức cần chứng minh trở thành: $BC.DB=AB^2$ ta nghĩ đến việc chứng minh: ΔCBA" ABD, thật vậy, ta có:

$\widehat{ADB}=180°-\widehat{ADC}=180°-\frac{180°-\widehat{C}}{2}=180°-\frac{2\widehat{B}+3\widehat{C}-\widehat{C}}{2}=180°-(\widehat{B}+\widehat{C})=\widehat{A}$ (đpcm)

Chương II: ĐƯỜNG TRÒN – DÂY CUNG – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập hợp các điểm M cách điểm O cho trước một khoảng không đổi R là đường tròn tâm O bán kính R. Kí hiệu $(O;R)$



2. Đường kính và dây cung.

+ Đoạn thẳng nối 2 điểm nằm trên đường tròn và đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn đó.

+ Đoạn thẳng nối 2 điểm bất kỳ nằm trên 1 đường tròn gọi là 1 dây của đường tròn đó.

Các tính chất cần nhớ

a. Nếu điểm M nằm trên (O) đường kính AB thì $\widehat{AMB} = 90°$, đảo lại : Nếu $\widehat{AMB} = 90°$ (với A, B cố định) thì điểm M nằm trên đường tròn đường kính AB

b. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

c. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

d. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

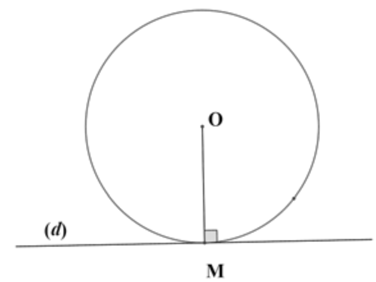
e. Trong một đường tròn: Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm; hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

f. Trong 2 dây của một đường tròn: Dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn; dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

3. Tiếp tuyến của đường tròn.

Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

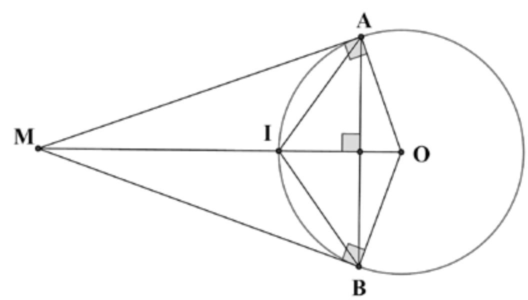
Như vậy:



+ Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.
+ Nếu khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

Qua một điểm ở ngoài đường tròn ta luôn kẻ được 2 tiếp tuyến đến đường tròn đó.

Một số tính chất cần nhớ đối với 2 tiếp tuyến cắt nhau:



Từ M nằm ngoài (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm).

AB cắt MO tại H, đoạn thẳng MO cắt (O) tại điểm I. Khi đó ta có:

+ Tam giác MAB cân tại M.

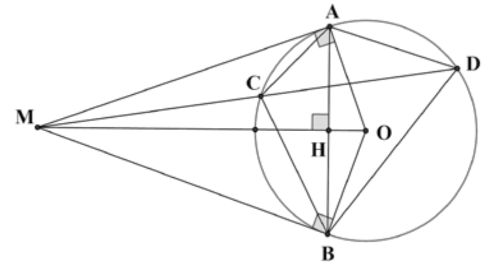
+ MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$.

+ MO vuông góc với AB tại trung điểm H của AB.

+ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

4. Quan hệ đường thẳng và đường tròn

Để xét quan hệ một đường thẳng (d) với đường tròn (O) ta phải dựa vào khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng.



+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) lớn hơn bán kính thì đường thẳng không cắt đường tròn.

+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) bằng bán kính thì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (lúc này đường thẳng (d) gọi là tiếp tuyến của đường tròn).

+ Nếu khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) nhỏ hơn bán kính thì đường thẳng cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt.

+ Từ điểm M nằm ngoài (O) ta dựng tiếp tuyến MA, MB đến (O) và dựng cát tuyến MCD. Khi đó ta có: $MA^2 = MB^2 = MO^2 - R^2$

5. Quan hệ giữa 2 đường tròn

Để xét quan hệ (vị trí tương đối) của 2 đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ ta phải dựa vào khoảng cách O_1O_2 và các bán kính R_1, R_2.

+ Hai đường tròn cát nhau khi và chỉ khi: $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$.

+ Hai đường tròn tiếp xúc nhau: $|R_1 - R_2| = O_1O_2$ hoặc $O_1O_2 = R_1 + R_2$.

+ Hai đường tròn không giao nhau: $O_1O_2 > R_1 + R_2$ hoặc $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$.

Ví dụ 1

Cho nửa đường tròn $(O;R)$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB, dựng các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Lấy một điểm M trên nửa đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại D, C tia AM, BM kéo dài cắt By, Ax lần lượt tại F, E.

a, Chứng minh: Các điểm D, M, O, A cùng nằm trên một đường tròn, các điểm C, M, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b, Chứng minh ΔCOD vuông.

c, D là trung điểm AE.

d, ΔCBO " ΔBAE.

e, Chứng minh: $AD.BC = R^2$, $AD + BC = CD$.

f, Dựng MH vuông góc với AB. Chứng minh: AC, BD đi qua trung điểm I của MH.

g, Chứng minh $EO \perp AC$.

h, Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MHO lớn nhất.

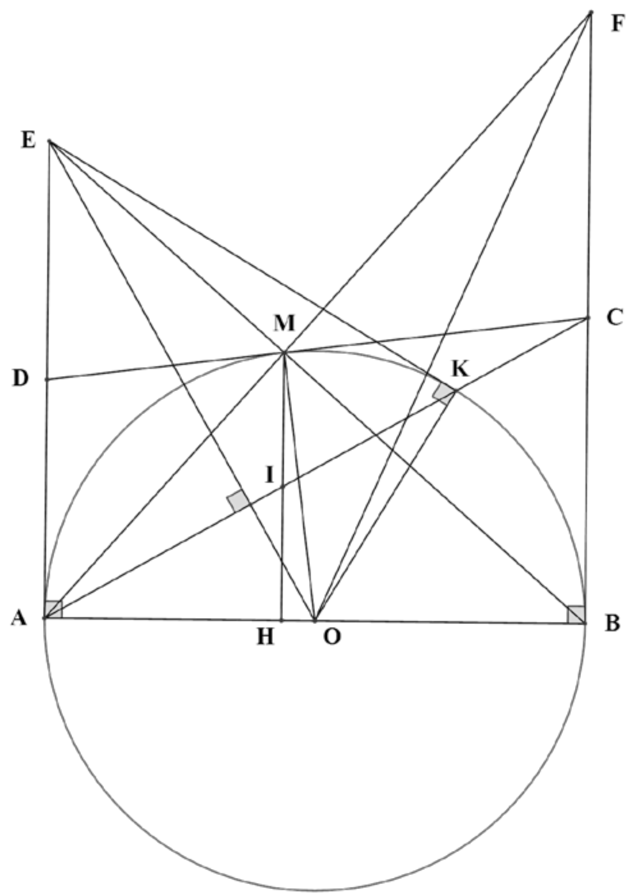
i, Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MAB lớn nhất.

j, Tìm vị trí điểm M để chu vi tam giác MAB lớn nhất.

k, Tìm vị trí điểm M để diện tích tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

l, Tìm vị trí điểm M để chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

Giải



a, Vì DA, DM là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{DMO} = \widehat{DAO} = 90°$, suy ra 4 điểm D, M, O, A nằm trên đường tròn đường kính DO. Hoàn toàn tương tự ta có các điểm C, M, O, B nằm trên đường tròn đường kính CO

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC, OD lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{MOA}, \widehat{MOB}$ nên $\widehat{COD} = \widehat{MOC} + \widehat{MOD} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BOM} + \widehat{COM}\right) = 90^0$ hay tam giác COD vuông tại O.

c) Do điểm M nằm trên đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EMA} = 90^0$. Cũng theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DA = DM$ nên $\widehat{DAM} = \widehat{DMA}$

$\Leftrightarrow 90^0-\widehat{DAM}=90^0-\widehat{DMA}\Leftrightarrow \widehat{DEM}=\widehat{DME}\Rightarrow DM=DE$. Vậy $DE=DA=DM$ hay D là trung điểm của AE . Cũng có thể chứng minh theo cách chỉ ra OD là đường trung bình của tam giác EAB .

d) Xét tam giác CBO và tam giác BAE ta có: $\widehat{CBO}=\widehat{BAE}=90^0$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $BM\perp CO$ nên $\widehat{COB}=\widehat{BEA}$ cùng phụ với $\widehat{EBA}\Rightarrow \Delta CBO\backsim\Delta BAE$ (g.g).

e) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $AD=DM$, $BC=CM\Rightarrow AD.BC=DM.CM$. Mặt khác tam giác COD vuông tại O có OM là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $CM.DM=OM^2=R^2$. Vậy $AD.BC=R^2$ và $AD+BC=CM+DM=CD$.

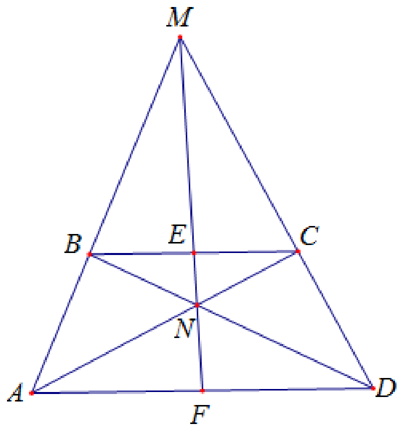
f) Giả sử BD cắt MH tại I. Theo định lý Thales ta có: $\frac{IM}{DE}=\frac{IB}{DB}=\frac{IH}{AD}\Rightarrow\frac{IM}{DE}=\frac{IH}{AD}$ mà $DE=DA\Rightarrow IH=IM$ hay I là trung điểm của HM. Chứng minh tương tự ta cũng có AC đi qua trung điểm I của MH tức là MH, BD, AC đồng quy tại I.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh bằng cách dùng Bổ đề hình thang: " Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên là AB, CD, cắt nhau tại M, hai đường chéo cắt nhau tại N. Gọi E,F là trung điểm của 2 cạnh đáy BC, AD . Khi đó 4 điểm M,E,N,F cùng nằm trên một đường thẳng".

Thật vậy, giả sử MN cắt BC, AD tại E,F theo định lý Thales ta có: $\frac{BE}{AF}=\frac{CE}{DF}$ (1) (cùng bằng $\frac{ME}{MF}$)

$\frac{BE}{DF}=\frac{CE}{AF}$ (2) (cùng bằng $\frac{NE}{NF}$). Nhân hai đẳng thức (1), (2) ta có:

$\frac{BE^2}{DF.AF}=\frac{CE^2}{AF.DF}$ suy ra $BE=CE$ thay vào (1) ta có: $AF=DF$ (đpcm).



g) Theo chứng minh ở câu d) ta có: $\Delta BAE \backsim \Delta CBO \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{BO}{BC} \Leftrightarrow \frac{AE}{2AO} = \frac{\frac{1}{2}AB}{BC}$ hay $\frac{AE}{AO} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \Delta OAE \backsim \Delta CBA \Rightarrow OE \perp AC$.

Chú ý: Nếu cắt (O) tại K từ việc chứng minh: $OE \perp AC$ ta suy ra $\Delta EAO = \Delta EKO \Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EKO} = 90^0$ ta cũng suy ra EK là tiếp tuyến của (O).

h) Tam giác MOH vuông tại H nên ta có: $S_{MHO} = \frac{1}{2}MH.HO \le \frac{1}{2}\frac{\left(MH^2 + HO^2\right)}{2} = \frac{OM^2}{4} = \frac{R^2}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MH = HO$ nên tam giác MHO vuông cân tại H. Tức là M nằm trên nửa đường tròn sao cho OM tạo với AB một góc 45^0.

i) Ta có: $S_{MAB} = \frac{1}{2}MH.AB = \frac{1}{2}MH.2R = R.MH$. Trong tam giác vuông MHO ta có: $MH \le MO = R$ nên $S_{MAB} \le R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv O, MH \perp AB$. Hay M là điểm chính giữa của cung AB.

j) Chu vi tam giác MAB kí hiệu là $2p$ thì $2p = MA + MB + AB = MA + MB + 2R$. Để ý rằng $(MA+MB)^2 \le 2.\left(MA^2 + MB^2\right) = 2AB^2 = 8R^2$ suy ra $MA + MB \le 2\sqrt{2}R$. Suy ra $2p \le 2R + 2\sqrt{2}R = 2R\left(\sqrt{2}+1\right)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$, hay M là điểm chính giữa cung AB.

k) Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).AB = \frac{1}{2}.2R.CD = R.CD$. Do $CD \ge AB = 2R$ nên $S_{ABCD} \ge 2R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CD = AB$ hay $CD \,/\!/\, AB$ khi đó M là điểm chính giữa cung AB.

l) Chu vi tứ giác $ABCD$ bằng q: $q = AD + CD + BC + AB = 2CD + AB = 2CD + 2R$ mà $CD \geq AB = 2R$ nên chu vi tứ giác $ABCD$: $q = 2CD + 2R \geq 6R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CD = AB$ hay $CD // AB$ khi đó M là điểm chính giữa cung AB.

Ví dụ 2

Xét đường thẳng (d) cố định ở ngoài $(O;\ R)$ (khoảng cách từ O đến (d) không nhỏ hơn $R\sqrt{2}$). Từ một điểm M nằm trên đường thẳng (d) ta dựng các tiếp tuyến $MA,\ MB$ đến $(O;\ R)$ ($A,\ B$ là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD (tia MC nằm giữa 2 tia $MO,\ MA$ và $MC < MD$). Gọi E là trung điểm của $CD,\ H$ là giao điểm của AB và MO.

a) Chứng minh: 5 điểm $M,\ A,\ E,\ O,\ B$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $MC.MD = MA^2 = MO^2 - R^2$.

c) Chứng minh: Các tiếp tuyến tại $C,\ D$ của đường tròn $(O;\ R)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AB .

d) Chứng minh: Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

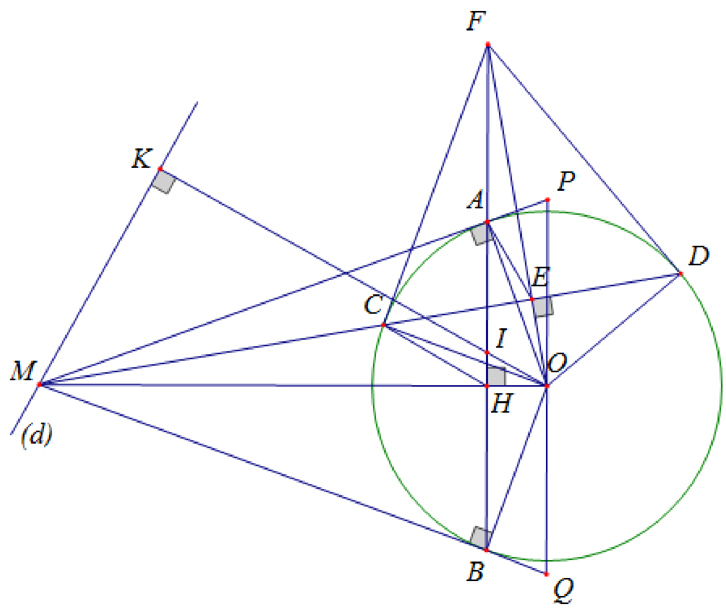
e) Chứng minh: Một đường thẳng đi qua O vuông góc với MO cắt các tia $MA,\ MB$ lần lượt tại $P,\ Q$. Tìm GTNN của S_{MPQ}.

f) Tìm vị trí điểm M để AB nhỏ nhất.

Giải

a) Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$.

E là trung điểm của CD nên $\widehat{MEO} = 90^0$. Từ đó suy ra 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.



b) Ta có: $MC.MD = (ME - EC)(ME + ED)$

Mà $ED = EC$ nên ta suy ra $MC.MD = (ME - EC)(ME + EC) = ME^2 - EC^2 = MO^2 - EO^2 - EC^2$

$= MO^2 - (EC^2 + EO^2) = MO^2 - OC^2 = MO^2 - R^2 = MO^2 - OA^2 = MA^2$ đpcm.

c) Giả sử các tiếp tuyến tại C, D của (O) cắt nhau ở F. Theo a) ta đã chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO, suy ra 4 điểm A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO. Hoàn toàn tương tự ta có: C, H, O, D cùng nằm trên đường tròn đường kính OF suy ra $\widehat{FHO} = 90^0$ hay $FH \perp HO$, mặt khác ta cũng có $AH \perp HO \Rightarrow F, A, H$ thẳng hàng. Nói cách khác: Các tiếp tuyến C, D tại cắt nhau tại điểm F nằm trên đường thẳng AB .

d) Dựng $OK \perp (d)$ thì K là điểm cố định và OK có độ dài không đổi. Giả sử AB cắt OK tại điểm I thì $\Delta OHI \backsim \Delta OKM$ (g.g) suy ra $\frac{OI}{OH} = \frac{OM}{OK} \Rightarrow OH.OM = OI.OK$. Mặt khác theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO ta có $OH.OM = OA^2 = R^2$ suy ra $OI.OK = R^2$ hay $OI = \frac{R^2}{OK}$ suy ra OI không đổi, I nằm trên đường thẳng OK cố định, suy ra điểm I cố định. Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm I .

e) Ta có: $S_{MPQ} = 2S_{MOP} = OA.MP = R(MA + AP)$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $MA + AP \geq 2\sqrt{MA.AP}$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MOP thì

$MA.AP = OA^2 = R^2$. Từ đó suy ra $S_{MPQ} \ge 2R^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = AP$ hay tam giác MOP vuông cân. Suy ra $MAOB$ là hình vuông, tức là $MO = R\sqrt{2}$.

f) Ta có: $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$ nên AB nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Để ý rằng: $OI = \dfrac{R^2}{OK}$ mà $OK \ge R\sqrt{2}$ nên $OI \le \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ nên điểm I luôn nằm trong đường tròn $(O;R)$. Trong tam giác vuông OHI ta có: $OH \le OI$ nên OH lớn nhất bằng OI khi và chỉ khi $H \equiv I$ hay $M \equiv K$.

Cũng có thể lập luận theo cách khác: $AB = 2AH = 2\dfrac{MA.OA}{MO} = 2R.\dfrac{\sqrt{MO^2 - R^2}}{MO} = 2R\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{MO^2}}$ nên AB nhỏ nhất khi và chỉ khi MO nhỏ nhất. Hay M là hình chiếu vuông góc của O lên (d).

Ví dụ 3

Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính BC và điểm A trên nửa đường tròn (O) (A khác B, C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). I, K lần lượt đối xứng với H qua AB, AC. Đường thẳng IK và tia CA cắt tiếp tuyến kẻ từ B của (O) lần lượt tại M, N. Gọi E là giao điểm của IH và AB, F là giao điểm KH với AC.

a. Chứng minh: I, A, K thẳng hàng. IK là tiếp tuyến của (O).

b. Chứng minh: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AN^2}$.

c. Chứng minh: M là trung điểm của BN và MC, AH, EF đồng quy.

d. Xác định vị trí điểm A trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác $BIKC$ lớn nhất.

e. Chứng minh: $BE.CF.BC = AH^3$.

f. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt IK tại P. Chứng minh: $NO \perp PB$.

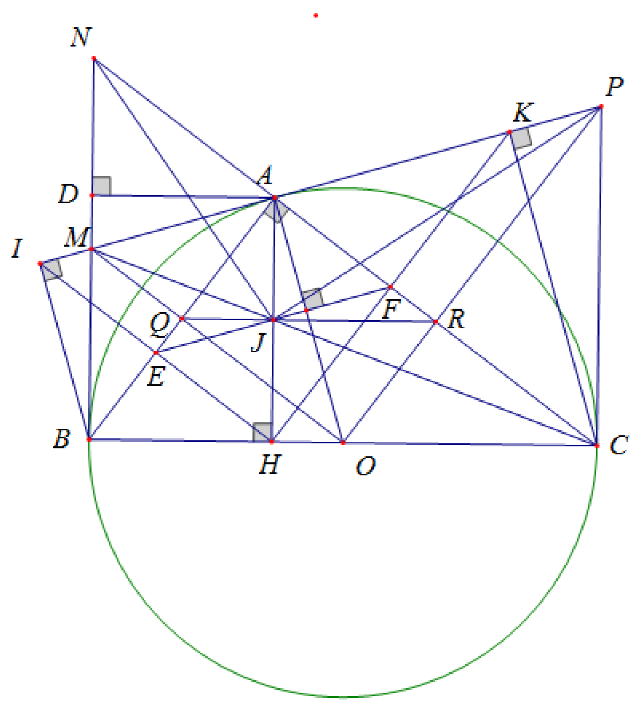
g. Chứng minh: $AO \perp EF$.

h. Gọi Q, R lần lượt là giao điểm của OM, OP với AB, AC. Xác định tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MPRQ$ biết $\widehat{ACB} = 30^0$.

Giải

a) Vì I,K là các điểm đối xứng với H qua AB, AC nên $\widehat{IAH}=2\widehat{HAB}, \widehat{PAH}=2\widehat{HAC}$. Suy ra $\widehat{IAH}+\widehat{PAH}=2\widehat{HAB}+2\widehat{HAC}=180^0$ nên I,A,K thẳng hàng. Ngoài ra ta cũng có: $AH=AI=AK$ nên tam giác IHK vuông tại H.

Từ tính chất đối xứng ta có: $\widehat{AIB}=\widehat{AHB}=90^0$, $\widehat{AKC}=\widehat{AHC}=90^0$ nên $BI \parallel KC$ suy ra tứ giác $BCKI$ là hình thang. Nên OA là đường trung bình của hình thang $BCKI$ suy ra $OA \perp KI$, nói cách khác KI là tiếp tuyến của (O) tại A.



b) Dựng $AD \perp BN$ thì $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AB^2}$. Chú ý rằng $ADBH$ là hình chữ nhật nên $AD=BH$. Từ đó suy ra $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AB^2}$ (đpcm).

c) Do MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $MA=MB$ nên $\widehat{MAB}=\widehat{MBA}$, mặt khác ta có: $\widehat{MNA}=90^0-\widehat{ABN}$, $\widehat{MAN}=90^0-\widehat{MAB}$ suy ra $\widehat{MNA}=\widehat{MAN}$ hay tam giác MAN cân tại M. Suy ra $MN=MA=MB$ hay M là trung điểm của NB.

d) Ta chứng minh: MC đi qua trung điểm của AH. Thật vậy giả sử MC cắt AH tại J, theo định lý Thales ta có: $\frac{JA}{MN}=\frac{JC}{CM}=\frac{JH}{MB}$ mà M là trung điểm của NB nên $MN=MB$ suy ra $JA=JH$ hay J là trung điểm của AH. Chú ý rằng: tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên AH, EF cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường, nói cách khác AH, EF, MC đồng quy tại J.

e) Theo tính chất đối xứng ta có: $IH \perp AB$ tại E , $IK \perp AC$ tại F. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, AHC ta có: $BE.BA = BH^2, CF.CA = CH^2$ suy ra $BE.CF.AB.AC = BH^2.CH^2$. Trong tam giác vuông ABC ta cũng có: $BH.CH = AH^2$, $AB.AC = AH.BC = (2S_{ABC})$ nên suy ra $BE.CF.AH.BC = AH^4 \Leftrightarrow BE.CF.BC = AH^3$.

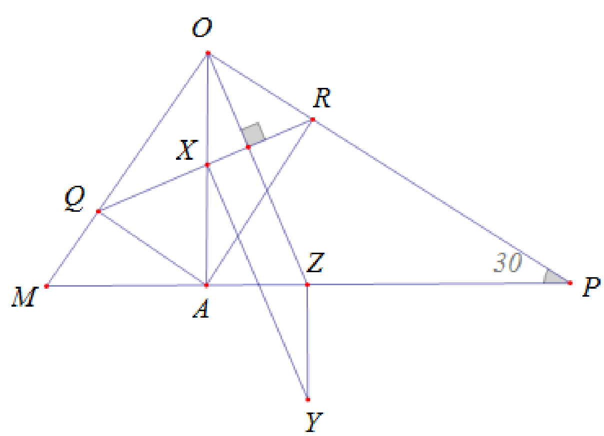
f) Ta dễ chứng minh được: $\Delta NBC \backsim \Delta OCP$ (g.g) suy ra $\frac{NB}{BC} = \frac{OC}{CP} \Leftrightarrow \frac{NB}{2BO} = \frac{\frac{1}{2}CB}{CP}$ hay $\frac{NB}{BO} = \frac{CB}{CP} \Rightarrow \Delta NBO \backsim \Delta BCP$ suy ra $NO \perp BP$.

g) Do $AEHF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AFE} = \widehat{FEH} = \widehat{AHE} = \widehat{ABC}$ từ đó suy ra $\widehat{AFE} + \widehat{OAC} = \widehat{ABC} + \widehat{OCA} = 90^0$ hay $OA \perp EF$.

h) Gọi X là trung điểm của QR , Z là trung điểm của MP. Đường trung trực của QR cắt đường trung trực của MP tại Y thì Y chính là tâm đường tròn đi qua các điểm M, P, R, Q.

Tương tự câu g) ta thấy $OZ \perp QR$ nên $XY \,//\, OZ$. Lại có $OX \,//\, YZ$ nên tứ giác $XYZO$ là hình bình hành suy ra $OZ = XY$, giả thiết $\widehat{ACB} = 30^0$.

$\Rightarrow \widehat{MPO} = \widehat{CPO} = \widehat{ACB} = 30^0, OA = R \Rightarrow AP = R\sqrt{3}$,



$OA^2 = MA.AP$ nên $R^2 = MA.R\sqrt{3} \Rightarrow MA = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MP = \frac{4}{3}R\sqrt{3} \Rightarrow OZ = XY = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$QX = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông QXY ta có:

$$QY^2 = QX^2 + XY^2 = \frac{R^2}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{4R^2}{3} = \frac{19R^2}{12} \Rightarrow QY = \frac{\sqrt{57}R}{6}.$$

Vậy đường tròn đi qua các điểm M, P, R, Q có bán kính là $QY = \frac{\sqrt{57}R}{6}$.

Ví dụ 4:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trụng điểm của BC, I là trung điểm của AH. Dựng đường kính AK của (O). Gọi P là giao điểm thứ hai của AH với (O) (P khác A).

a. Chứng minh: 4 điểm A, E, H, F nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: IM là đường trung trực của EF.

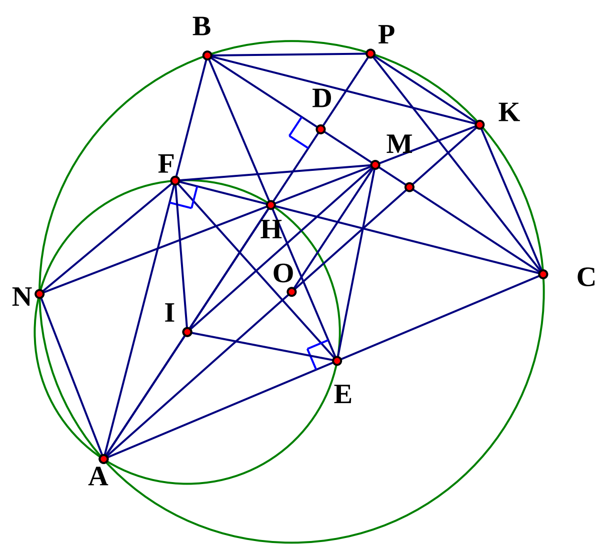
c. Chứng minh: H, K, M thẳng hàng từ đó suy ra $OA \perp EF$.

d. Chứng minh: ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

e. Chứng minh: P đối xứng với H qua BC. Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có cùng bán kính.

f. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF (N khác A). Chứng minh: $MH.MN = \frac{BC^2}{4}$.

Giải:



a. Do BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên: $\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^0$ suy ra 4 điểm A, E, H, F nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH ta gọi là (I).

b. Do $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ suy ra 4 điểm B, F, E, C cùng nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC ta gọi là (M). Vì (I) và (M) cắt nhau theo dây cung EF nên theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có: IM là đường trung trực của EF.

c. Do AK là đường kính của (O) nên $\widehat{AKC}=90^0 \Rightarrow AC\perp KC$ mặt khác $BH\perp AC \Rightarrow BH//KC$. Tương tự $CH//BK$ nên tứ giác BHCK là hình bình hành suy ra hai đường chéo BC, HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Nói cách khác ta có H, M, K thẳng hang. Từ đó suy ra OM đường trung bình của tam giác AHK nên $OM//AH; OM=\frac{1}{2}AH \Rightarrow OM//AI; OM=AI$ nên tứ giác AOMI là hình bình hành. Suy ra: $AI//MI$, mà $MI\perp \mathrm{EF} \Rightarrow \mathrm{OA}\perp E\mathrm{F}$.

d. Ta thấy rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAEF cũng chính là đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác AEHF. Tam giác AIE cân tại I nên : $\widehat{IEA}=\widehat{IAE}(1)$, tam giác MEC cân tại M nên $\widehat{MEC}=\widehat{MCE}(2)$. Lấy $(1)+(2)$ theo vế ta có : $\widehat{IEA}+\widehat{MEC}=\widehat{IEA}+\widehat{MCE}=90^0$ hay $\widehat{MEI}=90^0$.

Nói cách khác ME là tiếp tuyến của (I), hoàn tòan tương tự ta cũng có MF là tiếp tuyến của (I).

e. Do AK là đường kính của (O) nên $\widehat{APK}=90^0 \Rightarrow PK//DM$ mà M là trung điểm của HK nên MD là đường trung bình của tam giác HPK suy ra D là trung điểm của HP. Hay P, H đối xứng nhau qua BC. Ba điểm B, P, C nằm trên (O) nên theo tính chất đối xứng ta có ba điể B, H, C cũng nằm trên (O') đối xứng với (O) qua BC. Nên hai đường tròn này có cùng bán kính.

f. Vì N nằm trên (I) đường kính AH nên $\widehat{ANH}=90^0$, N cũng nằm trên (O) đường kính AK nên $\widehat{ANK}=90^0$ suy ra K, H, N thẳng hàng. Mà K, M, H cũng thẳng hàng nên suy ra M, H, N thẳng hàng. Hay M, H, N là một cát tuyến của (I). Theo tính chất quen thuộc cát tuyến và tiếp tuyến ta có: $MH.MN=ME^2$ (xem câu b – Ví dụ 2). Mặt khác ta cũng có:

$$ME=MF=\frac{BC}{2}\Rightarrow MH.MN=\frac{BC^2}{4}.$$

Ví dụ 5:

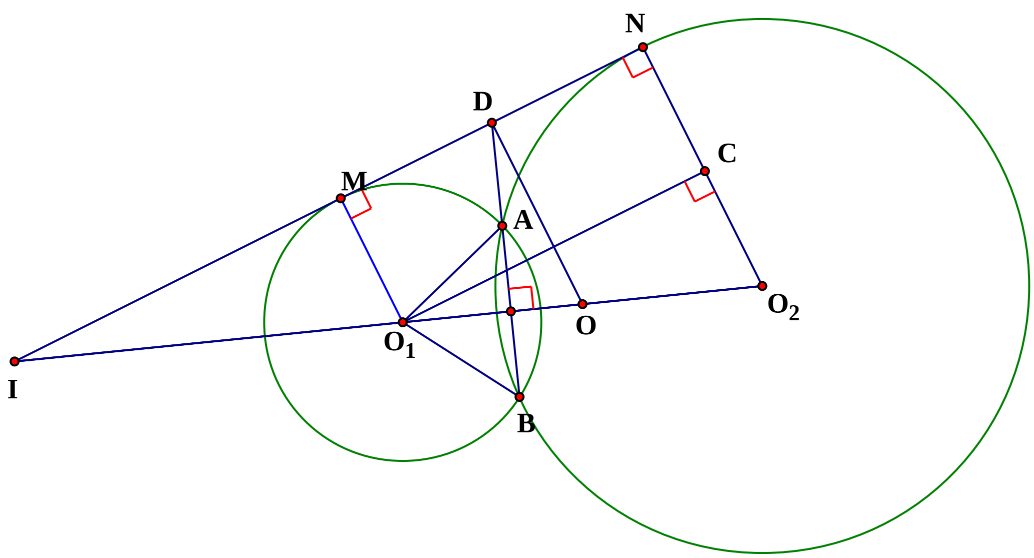
Cho hai đường tròn $(O_1;R_1),(O_2;R_2)(R_1 \neq R_2)$ cắt nhau tại A, B.

a. Nêu cách dựng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn khi biết O_1O_2.

b. Gọi M, N là hai tiếp điểm của một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$. Tính MN theo O_1O_2, R_1R_2.

c. Giả sử AB cắt MN tại D. Chứng minh: $DM = DN$.

Giải:



a. Dựng $(O_1;R_1)$ và bán kính O_1M .

Dựng tiếp tuyến (d) qua M của .(O_1).. Lấy điểm I trên (d) nối IO_1, trên tia đối của tia O_1I lấy điểm O_2 sao cho O_1O_2 bằng độ dài đã cho. Dựng $O_2N \perp (d)$ tại N. Vẽ đường tròn $(O_2;O_2N)$ ta được (d) tiếp xúc với $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ lần lượt tại M, N.

b. Giả sử $R_1 < R_2$ kẻ $O_1C \perp O_2N$ tại C ta có $MNCO_1$ là hình chữ nhật nên :
$MN = O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2}$.

c. Theo tính chất cát tuyến, tiếp tuyến ta có: $DM^2 = DA.DB = DN^2$ suy ra D là trung điểm của MN.

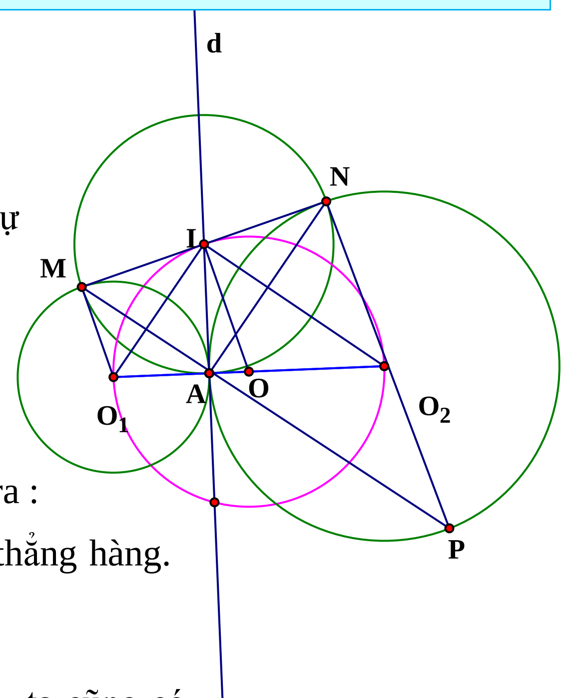
Ví dụ 6:

Cho hai đường tròn $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ tiếp xú ngoài tại A. Dựng tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ tại A là (d). Đường tròn (O) đường kính O_1O_2 cắt (d) tại I. Đường tròn $(I;IA)$ cắt $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ lần lượt tại M, N khác A.

a. Chứng minh: MN là một tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$.

b. Kẻ đường kính NP của (O_2). Chứng minh: M, A, P thẳng hàng.

Giải:



a. Từ giả thiết ta có:

$IA = IM = IN$ dẫn tới $\widehat{IMO_1} = \widehat{IAO_1} = \widehat{INO_2} = 90^0$ (Hs tự cm)

Suy ra IM, IN lần lượt là tiếp tuyến của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ nên

$\widehat{MIO_1} = \widehat{O_1IA}$ và $\widehat{NIO_2} = \widehat{O_2IA}$. Suy ra : $\widehat{MIA} + \widehat{NIA} = 2\widehat{O_1IA} + 2\widehat{O_2IA} = 2\widehat{O_1IO_2} = 180^0$ hay M, I, N thẳng hàng. Tức MN là tiếp tuyến chung của $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$.

b. Do MN là đường kính của $(I;IA)$ nên $\widehat{MAN} = 90^0$, ta cũng có $\widehat{NAP} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MAN} + \widehat{NAP} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ hay M, A, P thẳng hàng.

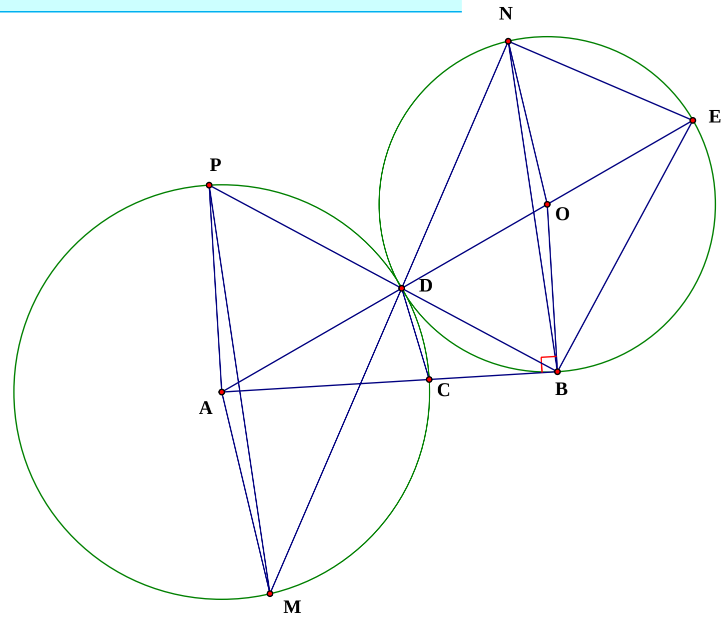
Ví dụ 7:

Cho đoạn thẳng AB kẻ tia $Bx \perp AB$. Trên tia Bx lấy O sao cho $BO = \dfrac{BA}{2}$. Tia AO cắt $(O;OB)$ tại D và E (D nằm giữa A, O). Đường tròn $(A;AD)$ cắt AB ở C.

a. Chứng minh: $DE^2 = AD.AE.$

b. Chứng minh: $AC^2 = CB.AB.$

c. Tia BD cắt $(A; AD)$ tại P. Một đường thẳng qua D cắt $(A; AD)$ tại M và cắt (O) tại N. Chứng minh: $\Delta DPM \backsim \Delta DBN$.



Giải:

a.Ta có :

$$AD.AE = (AO - OD)(AO + OE)$$
$$= (AO - OD)(AO + OD)$$
$$= AO^2 - OD^2 = AO^2 - OB^2$$
$$= AB^2 = (2OB)^2 = DE^2$$

b. Ta có:

$$CA.AB = (AB - AC)AB$$

$$= AB^2 - AC.AB = AD.AE - AD.AB$$
$$= AD(AE - AB) = AD^2 = AC^2$$

c. Xét các tam giác : $\Delta DPM, \Delta DBN$ ta có : $\widehat{PDM} = \widehat{BDN}$ (Đối đỉnh), các cặp tam giác cân ODN, ADM và ODB, ADP đồng dạng với nhau (g.g) suy ra $\frac{DM}{DN} = \frac{DO}{DA} = \frac{DB}{DP}$. Từ đó suy ra : $\Delta DPM \backsim \Delta DBN$ (c.g.c) đpcm.

I. GÓC Ở TÂM

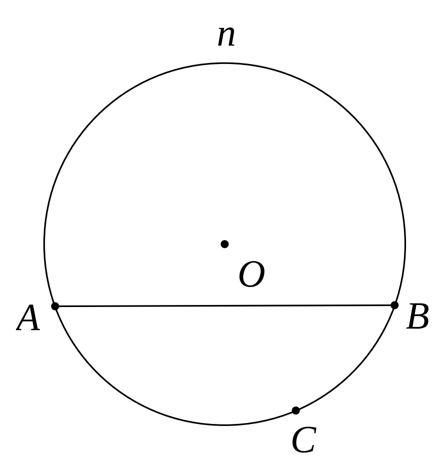
Góc ở tâm: Là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

1. Số đo cung:

+ Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.

+Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).

2. So sánh 2 cung:



+ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

+ Trong 2 cung, cung nào có số đo bằng nhau gọi là cung lớn.

Trên hình 1: Góc $\widehat{AOB}$ ởi gọi là góc ở tâm chắn bởi cung nhỏ $\overset\frown{AB}$ (hay $\overset\frown{AmB}$) .

Ta có sđ $\overset\frown{AmB} = \widehat{AOB}$,sđ $\overset\frown{AnB} = 360^0 - \widehat{AOB}$.

3. Điểm thuộc cung tròn:

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì sđ $\overset\frown{AB}$ =sđ $\overset\frown{AC}$ +sđ $\overset\frown{CB}$.

II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG

1.Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

+ Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

+Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

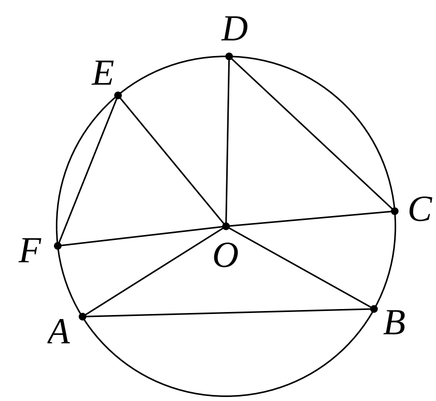
2. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

+Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

+Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Trên hình 2:

$\overset\frown{AB} = \overset\frown{CD} \Leftrightarrow AB = CD$. $\overset\frown{AB} > \overset\frown{EF} \Leftrightarrow AB > EF$



III. GÓC NỘI TIẾP

1 Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và 2 cạnh chứa 2 dây cung của đường tròn.

2. Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn.

+ Trong một đường tròn: Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

+ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn cung bằng nhau thì bằng nhau.

+ Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm chắn cùng một cung.

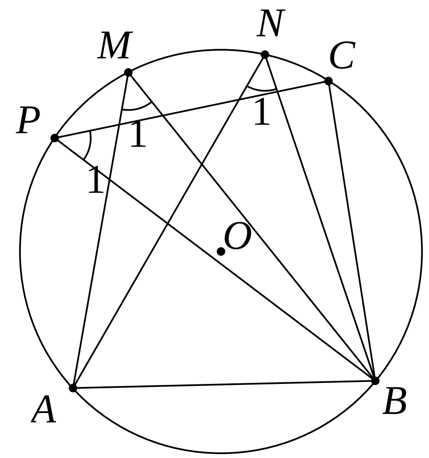
+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Trên hình 3:

+ Các góc $\widehat{AMB},\widehat{ANB}$ là các góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$

suy ra $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=\frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$

+ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Leftrightarrow\widehat{AMB}=\widehat{BPC}$



IV. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

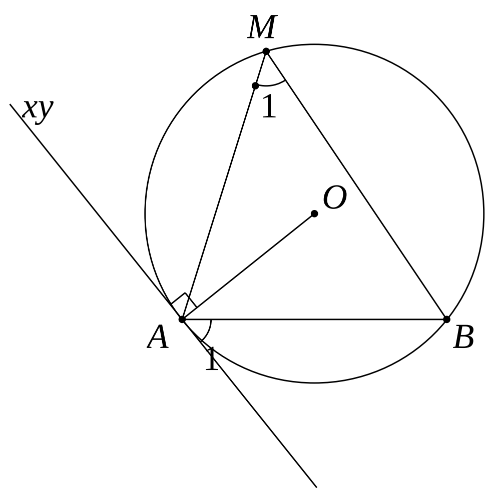
1.Đường thẳng xy là tiếp tuyến của (O) tại điểm A.

Tiếp điểm A là gốc chung của 2 tia đối nhau Ax, Ay, AB là một dây cung của (O). Khi đó góc $\widehat{xAB},\widehat{yAB}$ là các góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung AB.

2. Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn.

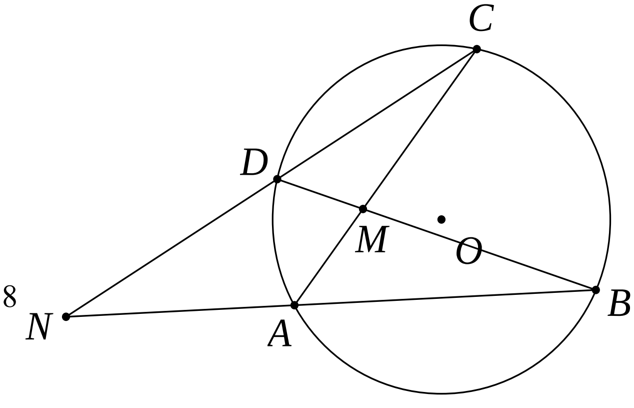
3. Trong một đường tròn: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cùng một cung thì bằng nhau.

Trên hình 4: Ta có $\widehat{xAB}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}=\widehat{AMB},\widehat{yAB}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AM}=\widehat{ABM}$



V. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

1.Cho hai dây cung AB, CD của (O) cắt nhau tại một điểm M nằm trong đường tròn. Khi đó $\widehat{BMC}$ gọi là góc có đỉnh nằm trong đường tròn(O).



Ta có định lí: Số đo góc có đỉnh nằm trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn. Tức là $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{BC} + sd\,\overset{\frown}{AD}\right)$.

2 Hai tia CD, BA cắt nhau tại N (AB, CD là hai dây cung của (O)). Khi đó $\widehat{BNC}$ gọi là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn.

Định lý: Số đo góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Tức là : $\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{BC} - sd\,\overset{\frown}{AD}\right)$

VI. CUNG CHỨA GÓC

1.Cho hai điểm cố định A, B. Quĩ tích những điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{AMB} = \alpha$ không đổi ($0 < \alpha < 180^0$) là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB. Đặc biệt quĩ tích các điểm M quĩ tích các điểm M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

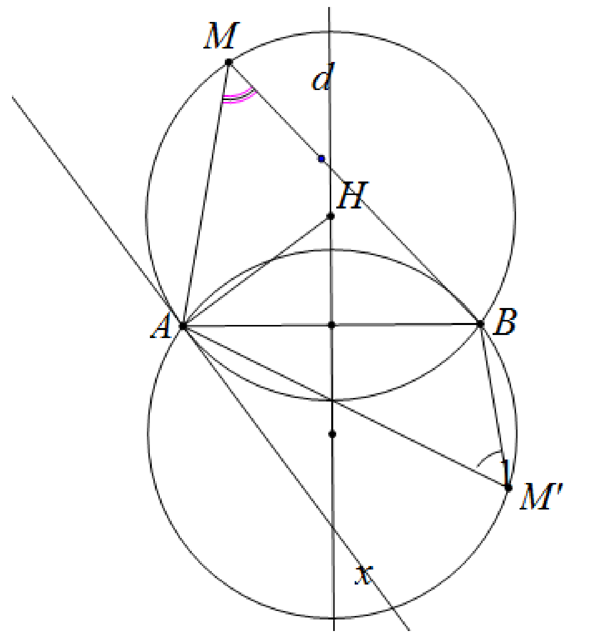
2. Cách dựng cung chứa góc α.

+Dựng đường trung trực (d) của đoạn AB.

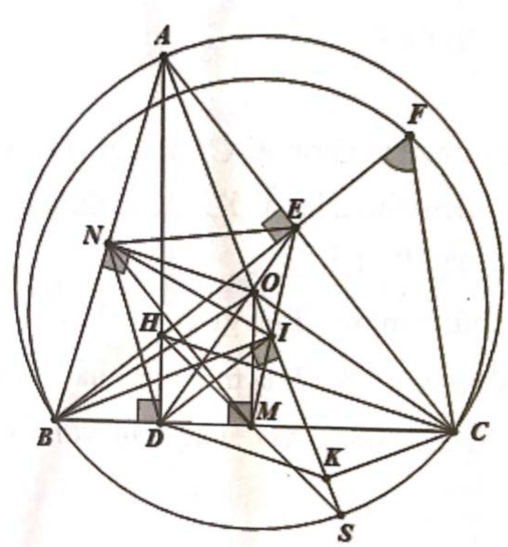
+Dựng tia Ax tạo với AB một góc α.

+Dựng $Ay \perp Ax$ cắt (d) tại O.

Ta có O chính là tâm của đường tròn chứa cung α dựng trên đoạn AB.



Do N là trung điểm của AB nên $ON \perp AB$. Các điểm N, I, M cùng nhìn BO một góc bằng $90°$ nên suy ra 5 điểm B, N, O, I, M nằm trên một đường tròn đường kính BO. Ta cũng có $\widehat{AIB} = \widehat{ADB} = 90°$ nên 4 điểm A, I, D, B cùng nằm trên đường tròn tâm N đường kính AB.



Ta có: $\widehat{IBD}=\frac{1}{2}\widehat{IND}$ (liên hệ góc nội tiếp và góc ở tâm).

Mặt khác $\widehat{IBD}=\widehat{IBM}=\widehat{INM}$ (cùng chắn $\overset\frown{IM}$) $\Rightarrow \widehat{INM}=\frac{1}{2}\widehat{IND}$, nói cách khác NM là phân giác của góc N của tam giác cân IND suy ra $MN\perp DI$ tại trung điểm của DI. Hay MN là trung trực của DI.

b) Dựng $BE\perp AC$, ta chứng minh E,I,M thẳng hàng. Ta thấy 4 điểm A,E,I,B nằm trên đường tròn tâm N đường kính AB.

Suy ra $\widehat{EIA}=\widehat{EBA}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{EA}$)

Ta có: $\widehat{AIM}=\widehat{AIB}+\widehat{BIM}=90^0+\widehat{BNM}=90^0+\widehat{BAC}$ ($do\,\widehat{BIM}=\widehat{BNM}$, cùng chắn $\overset\frown{BM}$, $MN//AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AIM}+\widehat{EIA}=90^0+\widehat{BAC}+\widehat{EBA}=180^0$ hay E,I,M thẳng hàng (đpcm)

c) Gọi P là trung điểm của AC . Chứng minh tương tự a) ta có PM cũng là trung trực của DK. Từ đó suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIK chính là trung điểm M của AC.

d) Dựng đường kính AS thì S,H,M thẳng hàng (tính chất quen thuộc, xem thêm ví dụ 1

Suy ra $AH=2OM$. Do BC cố định nên OM không đổi , suy ra AH không đổi .

Đặt $\widehat{BOC}=2\alpha$. Trên tia đối của HB ta lấy điểm F sao cho $HF=HC$. Khi đó $HB+HC=BF$

Để ý rằng : $\widehat{HFC}=\frac{1}{2}\widehat{BHC}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{A}\right)=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{\alpha}\right)$ không đổi ,

Theo bài toán cung chứa góc ta suy ra điểm F thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{\alpha}\right)$ dựng trên đoạn BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A. Từ đó suy ra BF lớn nhất khi và chỉ khi BF là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{\alpha}\right)$ dựng trên đoạn BC. Tức là $\widehat{BCF}=90°$, hay B,O,F thẳng hàng. Tức là tam giác ABC cân tại B.

Khi đó giá trị lớn nhất của $HA+HB+HC$ là : $2OM+2R=2\sqrt{R^2-\frac{BC^2}{4}}+2R$.

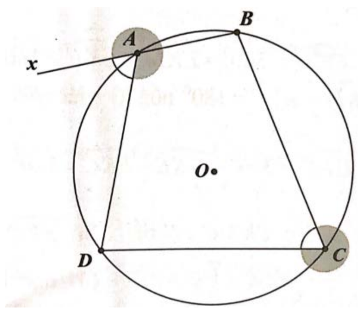
VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Tiêu chuẩn 1:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi tổng hai góc đối bằng 180^0

<u>Hệ quả :</u> $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{xAD}=\widehat{BCD}$.

(Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong đối diện với đỉnh đó)



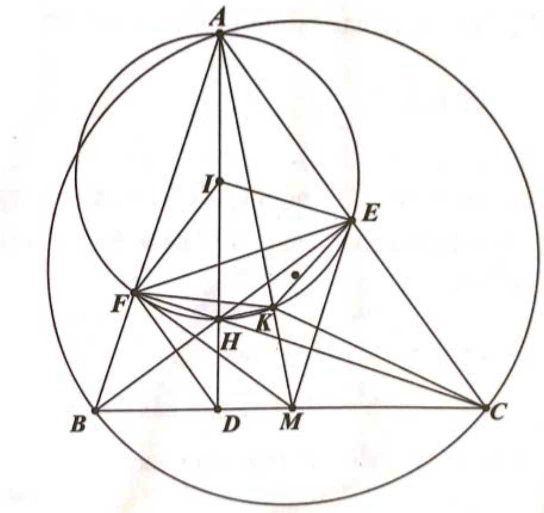
<u>Ví dụ 1:</u> Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF . cắt nhau tại điểm H .Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh : $AEHF$ là tứ giác nội tiếp .

b) Đường tròn ngoại tiếp ΔAEF cắt đường thẳng AM tại K . Chứng minh các tứ giác $EKMC, FKMB$ nội tiếp .

c) Chứng minh : $BHKC$ nội tiếp .

Giải :



a) Do BE, CF là các đường cao của ΔABC nên $\widehat{\mathrm{AEH}} = \widehat{\mathrm{AFH}} = 90^0 \Rightarrow \widehat{\mathrm{AEH}} + \widehat{\mathrm{AFH}} = 180^0$, nên tứ giác AEHF là tứ giác nội tiếp .

b) Do 4 điểm $\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F}$ nằm trên đường tròn (I) đường kính AH nên đường tròn ngoại tiếp $\Delta\mathrm{AEF}$ cũng chính là đường tròn tâm (I).

Ta có $\widehat{\mathrm{AKE}} = \widehat{\mathrm{AFE}}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$) (1)

Mặt khác ta cũng có BFEC nội tiếp nên $\widehat{\mathrm{AFE}} = \widehat{\mathrm{ECB}}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{\mathrm{AKE}} = \widehat{\mathrm{ECM}}$ nên tứ giác EKMC nội tiếp.

Tương tự ta cũng chứng minh được tứ giác FKMB nội tiếp hoặc có thể chứng minh theo cách khác như sau :

Ta có $\widehat{\mathrm{FKM}} = 360^0 - \widehat{\mathrm{EKM}} - \widehat{\mathrm{EKF}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{EKM}} + 180^0 - \widehat{\mathrm{EKF}} = \widehat{\mathrm{ACB}} + \widehat{\mathrm{BAC}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{ABC}}$

$\Rightarrow \widehat{\mathrm{FKM}} + \widehat{\mathrm{ABC}} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác FKMB nội tiếp.

c) Ta có $\widehat{\mathrm{HKC}} = 360^0 - \widehat{\mathrm{HKE}} - \widehat{\mathrm{EKC}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{HKE}} + 180^0 - \widehat{\mathrm{EKC}} = \widehat{\mathrm{DAC}} + 180^0 - \widehat{\mathrm{EKC}}$ (3)

Mặt khác $\widehat{\mathrm{EKC}} = \widehat{\mathrm{EMC}}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{\mathrm{EC}}$)

Tứ giác BFEC nội tiếp $\left(\mathrm{M}; \dfrac{BC}{2}\right)$ nên $\widehat{\mathrm{EMC}} = 2\widehat{\mathrm{EBC}}$ (4)

Ngoài ra cũng có $\widehat{\mathrm{EBC}} = \widehat{\mathrm{DAC}}$ (cùng phụ với góc $\widehat{\mathrm{BCA}}$) (5)

Từ (3)(4) và (5) $\Rightarrow \widehat{\mathrm{HKC}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{EBC}} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{HKC}} + \widehat{\mathrm{HBC}} = 180^0$

nên tứ giác BHKC nội tiếp .

Cách khác :

$\widehat{\mathrm{IEM}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{IEA}} - \widehat{\mathrm{MEC}} = 180^0 - \widehat{\mathrm{IEA}} - \widehat{\mathrm{ECM}} = 90^0 - \widehat{\mathrm{EKC}}$

$\Rightarrow$ ME là tiếp tuyến của (I). Từ đó ta có $\widehat{\mathrm{MCK}} = \widehat{\mathrm{MEK}} = \widehat{\mathrm{EHK}}$ nên tứ giác BHKC nội tiếp

Chú ý : Thông qua ví dụ này , ta cũng có thêm một tính chất : đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF, HBC cắt nhau tại một điểm nằm trên AM.

Ví dụ 2

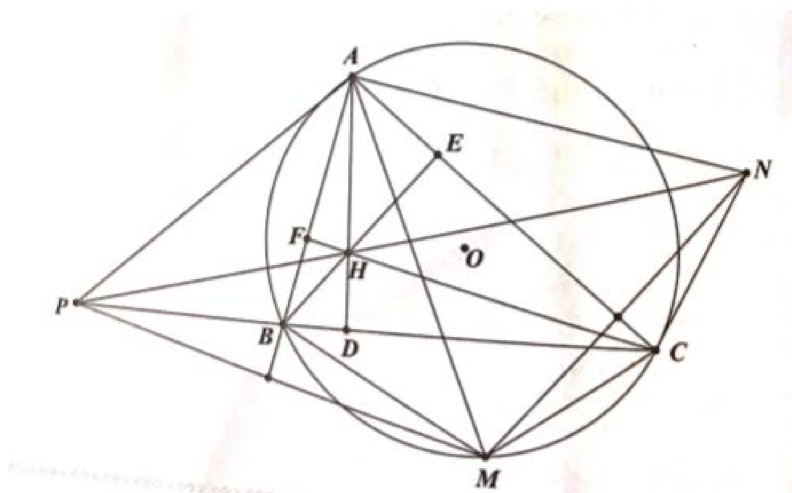
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H ,một điểm M di chuyển trên cung nhỏ BC $(M \neq BC)$.Gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB, AC.

a) Chứng minh : $AHBP$ là tứ giác nội tiếp .

b) Chứng minh: P, H, N thẳng hàng.

c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để PN lớn nhất.

Giải



a) Ta có : $\widehat{APB} = \widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng)

$\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{DHE} = 180^0 - \widehat{AHB}$

hay $\widehat{AMB} + \widehat{AHB} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AHBP$ là tứ giác nội tiếp .

b) Chứng minh tương tự câu a ta thấy tứ giác $AHCN$ là tứ giác nội tiếp .
Theo câu a có $AHBP$ là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{AHP} = \widehat{ABP} = \widehat{ABM} = 180^0 - \widehat{ACM} = 180^0 - \widehat{ACN} = 180^0 - \widehat{AHN}$

hay $\widehat{AHP} + \widehat{AHN} = 180^0$ tức là P, H, N thẳng hàng.

c) Do ba điểm M, N, P nằm trên đường tròn tâm A ,bán kính AM.

suy ra $NP = 2AM.\sin\widehat{PMN} = 2AM.\sin\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 2AM.\sin\widehat{BAC}$.

Do đó NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất , lúc đó AM là đường kính của đường tròn (O)

Vậy độ dài đoạn NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O.

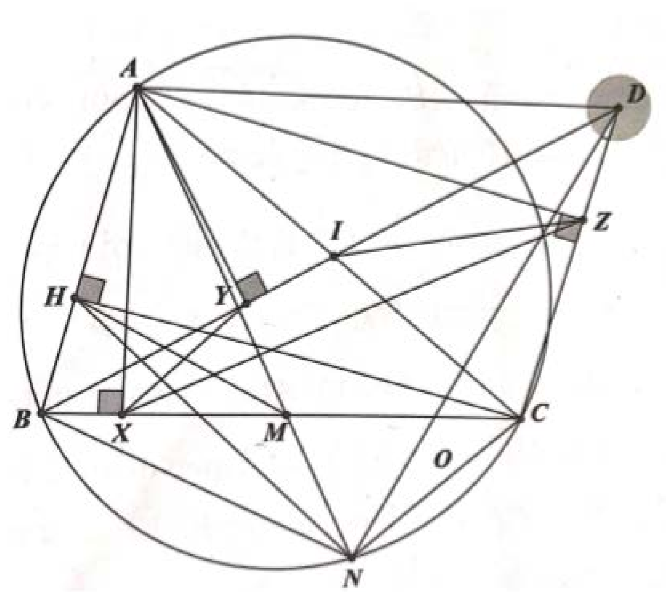
Ví dụ 3

Cho hình bình hành $ABCD$ $\left(\widehat{A} > 90^0\right)$ có hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại N. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB.

a) Chứng minh : tứ giác $ADNH$ nội tiếp .

b) Dựng các đường thẳng qua A lần lượt vuông góc với BC, CD, BD tại X, Y, Z. Chứng minh 4 điểm X, Y, I, Z nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Để chứng minh tứ giác $ADNH$ nội tiếp ta cần chứng minh $\widehat{BHN} = \widehat{ADN}$

Ta có $\widehat{BHN} = \widehat{BHM} - \widehat{NHM}$

Mà $MB = MC, CH \perp BH$

Nên $MB = MH = MC \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{BHN} = \widehat{ABC} = \widehat{NHM}$.

Ta cũng có : $\widehat{ADN} = \widehat{ADC} - \widehat{CDN} = \widehat{ABC} - \widehat{NDC}$

Như vậy ta cần chứng minh $\widehat{NHM} = \widehat{NDC}$.

Để ý rằng : ΔAMB ” $\Delta CMN\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{AB}{CN}$

Thay $AB = CD, MH = MB$ suy ra $\Rightarrow \dfrac{MH}{MN} = \dfrac{CD}{CN}$ (1)

Ta có :

$$\widehat{HMN} = \widehat{HMB} + \widehat{BMN} = \widehat{HMB} + \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{AC}\right)$$
$$= 2\widehat{HCB} + \left(\widehat{BAN} + \widehat{ANC}\right) = 2\left(90^0 - \widehat{ABC}\right) + \left(\widehat{BAN} + \widehat{ANC}\right)$$

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ suy ra $\widehat{HMN} = 180^0 - \widehat{ABC} + \widehat{BAN} = \widehat{BAD} + \widehat{BAN} = \widehat{BCD} + \widehat{BCN} = \widehat{DCN}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta HMN$ ” $\Delta DCN \Rightarrow \widehat{NHM} = \widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{BHN} = \widehat{ADN} \Rightarrow$ tứ giác $ADNH$ nội tiếp .

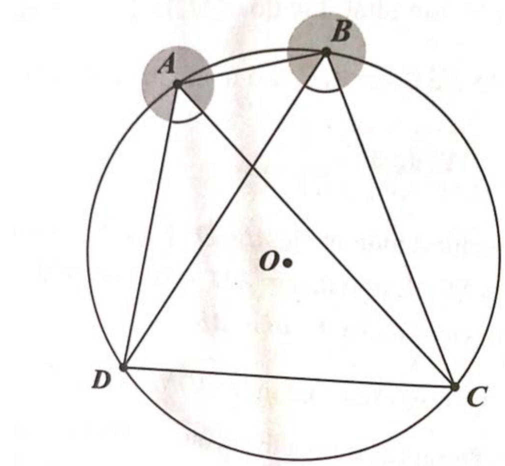
Từ các tứ giác $XAZC, ABXY$ nội tiếp, ta có :

$\widehat{IZX} = \widehat{AZC} - \widehat{AZI} - \widehat{XZC} = \widehat{BAZ} - \widehat{ZAC} - \widehat{CAX} = \widehat{BAX} = \widehat{BYX}$ nên tứ giác $XIYZ$ nội tiếp.

2. Tiêu chuẩn 2:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh những góc bằng nhau.

$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp .



Một số ví dụ tiêu biểu

Ví dụ 1

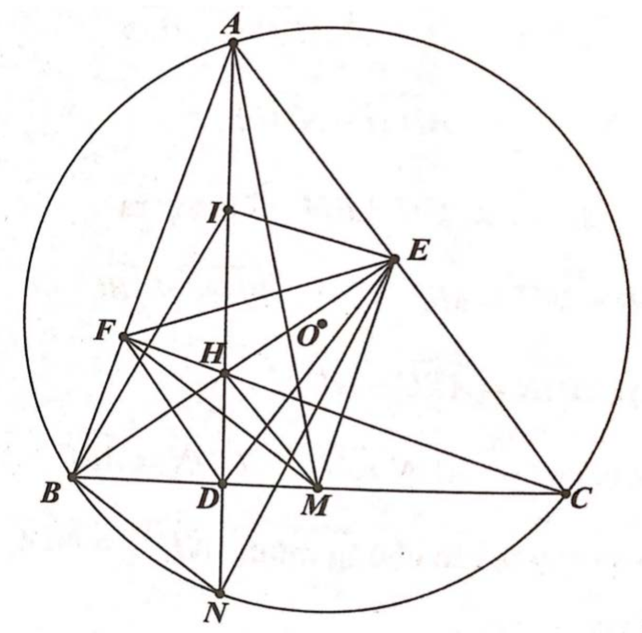
Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh : $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh : $MEFD$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi I là trung điểm của AH, đường thẳng AH kéo dài cắt đường tròn tại giao điểm thứ hai là $N(N \neq A)$. Chứng minh rằng : $BNEI$ là tứ giác nội tiếp.

Giải :



a) Do tứ giác BE, CF là các đường cao của ΔABC nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta dễ dàng chứng minh được: các tứ giác $BFHD.CEHD$ nội tiếp nên từ đó suy ra: $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ (1), $\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (2), mặt khác theo a) ta cũng có: $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FDE} = 2\widehat{EBF}$ (4). Lại có tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC nên $\widehat{EMF} = 2\widehat{EBF}$ (5) (Tính chất góc ở tâm bằng 2 lần số đo góc nội tiếp chắn cùng một cung). Từ (4), (5) suy ra $\widehat{EDF} = \widehat{EMF}$ nên tứ giác $EMDF$ nội tiếp.

Chú ý: Có thể chứng minh 4 điểm E, M, D, F nằm trên đường tròn Ơle của tam giác.

c) Ta có $\widehat{EIN} = 2\widehat{EAN}$ (6) (Tính chất góc ngoài tam giác cân AIE). Mặt khác ta cũng có: $\widehat{EBC} = \widehat{CAN} = \widehat{CBN}$ suy ra $\widehat{EBN} = 2\widehat{EBC} = 2\widehat{EAN}$ (7). Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{EIN} = \widehat{EBN}$ hay tứ giác $BNEI$ nội tiếp (Có hai đỉnh liên tiếp I, B cùng nhìn cạnh EN các góc bằng nhau).

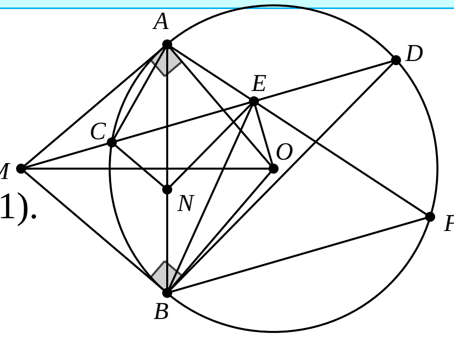
Ví dụ 2

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm), dựng cát tuyến MCD ($(MC < MD)$ sao cho tia MD nằm giữa hai tia MO, MA. Gọi E là trung điểm của CD.

a. Chứng minh: 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b. Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Chứng minh: $AENC$ là tứ giác nội tiếp.

c. Đường thẳng AE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F. Chứng minh $BF//CD$.



d) Giải

a. Do E là trung điểm CD nên $OE \perp CD$.

Suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MEO} = 90^\circ$ nên tứ giác $MAEO$ nội tiếp (1).

Lại có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$ nên $MAOB$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.

b. Do $EN//BD$ nên $\widehat{CEN} = \widehat{CDB}$ lại có: $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$ cùng chắn cung CB nên suy ra $\widehat{CEN} = \widehat{CAN}$ hay $AENC$ là tứ giác nội tiếp.

c. Ta có $\widehat{AFB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AOM}$ (3) (Tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm + Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau). Mặt khác do $AEOM$ nội tiếp nên $\widehat{AOM} + \widehat{AEM}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AFB}$, mà hai góc này đồng vị nên $EC//BF$.

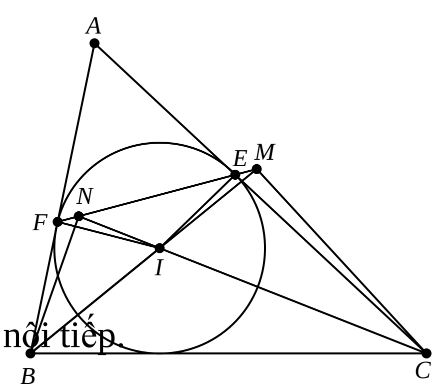
Ví dụ 3

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AC, AB. Đường thẳng BI, CI cắt EF lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh: E, M, C, I cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: 4 điểm B, C, N, M cùng nằm trên một đường tròn.

e) Giải:



a. Ta có: $\widehat{MIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ (1)

(Tính chất góc ngoài của tam giác BIC).

Ta cũng có: $\widehat{MEC} = \widehat{AEF} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{MEC} = \widehat{MIC}$ hay $MEIC$ là tứ giác nội tiếp.

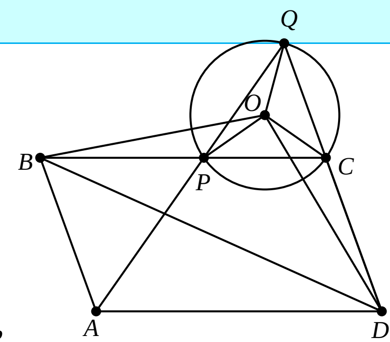
b. $MEIC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IEC} = \widehat{IMC} = 90^\circ$ (3).

Chứng minh tương tự câu a) ta có $BFNI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{INB}=\widehat{IFB}=90^\circ$ (4). Từ (3) và (4) ta suy ra $\widehat{BNC}=\widehat{BMC}=90^\circ$ nên $BNMC$ là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 4

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A}>90^\circ$. Đường phân giác trong góc A cắt cạnh BC tại P, cắt CD tại Q. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ. Chứng minh 4 điểm B,D,O,C cùng nằm trên một đường tròn.

f) Giải



Do $ABCD$ là hình bình hành và $\widehat{BAQ}=\widehat{DAQ}$ suy ra $\widehat{APB}=\widehat{DQA}=\widehat{CPQ}$ hay CPQ cân tại C suy ra ABP cân tại P hay $AB=BP=CD$ (4).

Ta cũng có

$\widehat{BPO}=180^\circ-\widehat{OPC}=180^\circ-\widehat{OCP}=180^\circ-\widehat{OCQ}=\widehat{OCD}$ (5),

chú ý rằng: $OP=OC$ (6).

Từ (4), (5),(6) suy ra $\Delta BPO=\Delta DCO\Rightarrow\widehat{OBC}=\widehat{ODC}$ hay 4 điểm B,D,O,C cùng nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 5

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O), hai đường chéo AC,BD cắt nhau tại P. Q,R là hai điểm bấy kỳ trên cung CD không chứa A,B. RA,RC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tại L,K khác R. PK,PL lần lượt cắt BC,AD tại M,N.

a. Chứng minh: P,Q,N,D cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: BC,AD cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN.

g) Giải

a. Các tứ giác $PQLR,ABQR,ABQD$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

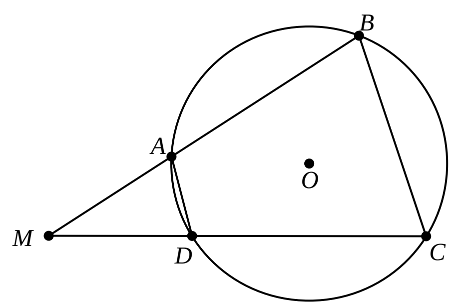
$\widehat{NPQ}=180^\circ-\widehat{QRL}=\widehat{ABQ}=180^\circ-\widehat{QDN}\Leftrightarrow\widehat{NPQ}+\widehat{QDN}=180^\circ$ nên $NPQD$ là tứ giác nội tiếp.

b. Gọi S là giao điểm của BC,AD. Ta chứng minh tứ giác $SMQN$ nội tiếp.

Thật vậy từ các tứ giác $NPQD,BCQR$ và $RQKP$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$\widehat{MBQ}=\widehat{QRK}=\widehat{QPK}$ nên $MBPQ$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra $\widehat{BMQ}=\widehat{QPD}=\widehat{QND}$ suy ra $SMQN$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra đpcm.



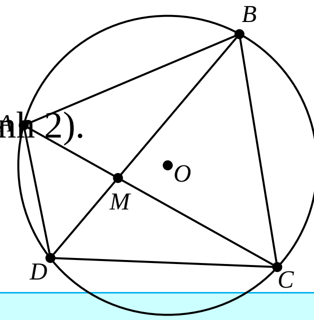
3. Tiêu chuẩn 3

Cho 2 đường thẳng cắt nhau tại M

+ Nếu $A,B\in(d_1);C,D\in(d_2)$ sao cho $MA.MB=MC.MD$

thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (Hình 1).

Hình 1



Thật vậy: $MA.MB=MC.MD\Leftrightarrow\Delta MAD\sim\Delta MCB$

$\Rightarrow\widehat{MAD}=\widehat{MCB}$ suy ra $ABCD$ nội tiếp.

+ Nếu $MA.MC=MB.MD$ thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (Hình 2).

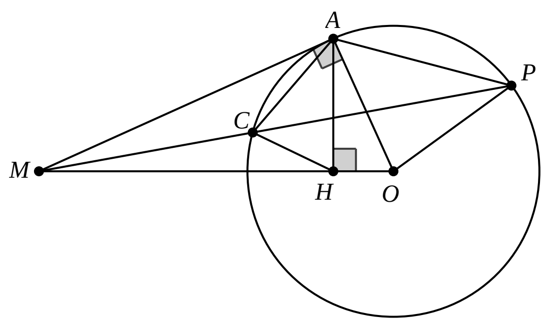
Thật vậy: $MA.MC=MB.MD\Rightarrow\Delta MAD\sim\Delta MBC$

$\Rightarrow\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$ suy ra $ABCD$ nội tiếp.

Ví dụ1

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ tiếp tuyến MA đến (O) và cát tuyến MCD sao cho $MC<MD$. Dựng $AH\perp MO$. Chứng minh: Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

Giải



Do MA là tiếp tuyến của (O) và $AH\perp MO$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO ta có: $MA^2=MH.MO$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ suy ra $\Delta MAC\sim\Delta MDA$ nên

$\frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MA}\Leftrightarrow MA^2=MC.MD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MC.MD=MH.MO$ hay $CHOD$ là tứ giác nội tiếp (tiêu chuẩn 3).

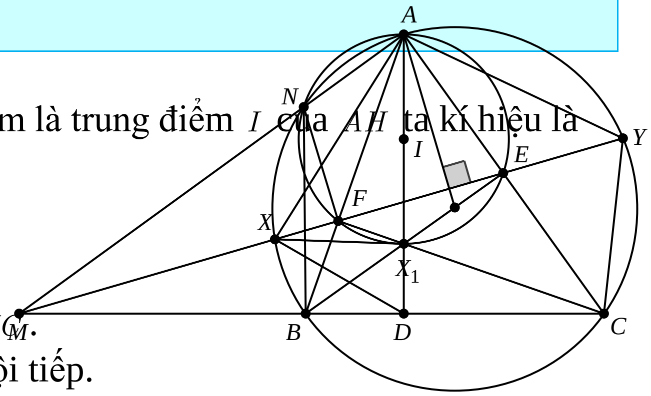
Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp (O), các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại điểm thứ 2 là N khác A,AN cắt BC tại M.

a. Chứng minh: M,E,F thẳng hàng.

b. Đoạn ME cắt (O) tại X. Chứng minh: AX là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác XHD.

Giải



a. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có tâm là trung điểm I của AH ta kí hiệu là (I).

Giả sử MF cắt (I) tại E_1 thì $ANFE_1$ nội tiếp nên suy ra $MN.MA = MF.ME_1$.

Mặt khác $ANBC$ nội tiếp nên $MN.MA = MB.MC$.

Từ đó suy ra $MF.ME_1 = MB.MC$ hay BFE_1C nội tiếp.

suy ra $E \equiv E_1$ (hai đường tròn cắt nhau tối đa tại 2 điểm)

hay M, E, F thẳng hàng.

b. ME cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là Y thì $OA \perp XY$ (Tính chất quen thuộc, dành cho hs) suy ra tam giác AXY cân tại A nên $\widehat{AYX} = \widehat{AXY}$ mặt khác $\widehat{AYX} = \widehat{ABX}$ nên $\widehat{AXF} = \widehat{ABX} \Rightarrow \Delta AXF \sim \Delta ABX$ suy ra $AX^2 = AF.AB$. Mặt khác $BDHF$ là tứ giác nội tiếp nên $AF.AB = AH.AD$ từ đó suy ra $AX^2 = AH.AD$ hay AX là tiếp tuyến của đường trong ngoại tiếp tam giác XHD.

Ví dụ 3

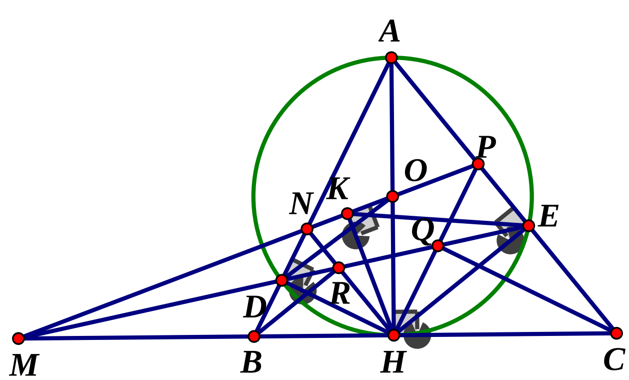
Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Đường tròn (O) đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng ED cắt BC tại điểm M. Đường thẳng MO cắt AB, AC tại N và P.

a. Chứng minh: $MH^2 = MB.MC$.

b. Chứng minh: $OP = ON$.

c. Đường thẳng DE cắt HN, HP lần lượt tại R, Q. Chứng minh: BR, CQ, AH đồng quy.

Giải



Vì 4 điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn (O) đường kính AH nên MH là tiếp tuyến của (O). Suy ra $MH^2 = MD.ME$ (1). Để chứng minh $MH^2 = MB.MC$ ta sẽ chứng minh $BDEC$ là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy: Ta có $\widehat{ECH} = \widehat{EHA}$ cùng phụ với $\widehat{EHC}$ mà $\widehat{EHA} = \widehat{EDA} \Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EDA}$ hay $BDEC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $MD.ME = MB.MC$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra $MH^2 = MB.MC$

b. Dựng $HK \perp MO$, mặt khác $MH^2 = MD.ME$ suy ra $MK.MO = MD.ME$ hay $DKOE$ tiếp suy ra $\widehat{OKE} = \widehat{ODE} = \widehat{OED} = \widehat{MKD}$ nên suy ra $\widehat{DKH} = \widehat{EKH}$. Lại có tứ giác $HKPE$ nội tiếp nên $\widehat{HPE} = \widehat{HKE}$, Suy ra $\widehat{HPE} = \frac{1}{2}\widehat{DKE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \widehat{DAC}$ suy ra $HP // AB$ nên

$\Delta POH = \Delta NOA \Rightarrow OP = ON$

c. Ta có $\widehat{PQE} = \widehat{DQH} = \widehat{QDA} = \widehat{ECH}$ nên $QECH$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{CQH} = \widehat{CEH} = 90^0$

hay $CQ \perp HP \Rightarrow CQ \perp AB$.Chứng minh tương tự ta cũng có $DR \perp AC$ hay BR, CQ, AH đồng quy.

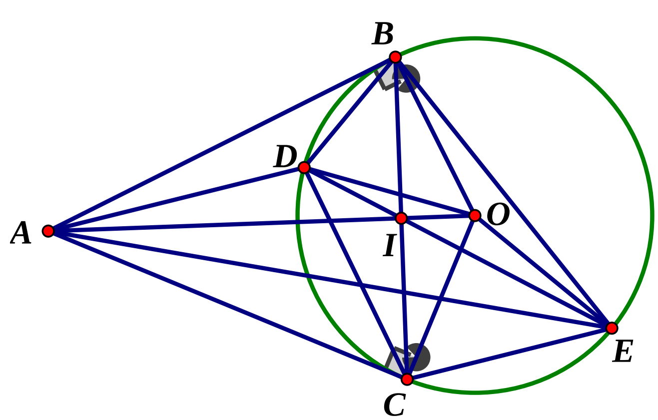
Ví dụ 4

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) qua I.

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

Giải



a) Ta thấy bốn điểm B,D,C,E cùng nằm trên đường tròn (O) nên $ID.IE = IB.IC = IB^2$ (1). Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO với BI là đường cao ta có : $IB^2 = IA.IO$ (2)

Từ (1) và (2) ta thu được $ID.IE = IA.IO$. Chứng tỏ 4 điểm A,D,O,E cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Từ câu a ta thấy $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$ (cùng chắn cung OE), $\widehat{OED} = \widehat{OAD}$ (cùng chắn cung OD). Do tam giác ODE cân tại O nên $\widehat{OAE} = \widehat{OAD}$ (3). Chú ý AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, từ (3) suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (4). Từ $(3),(4)$ suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

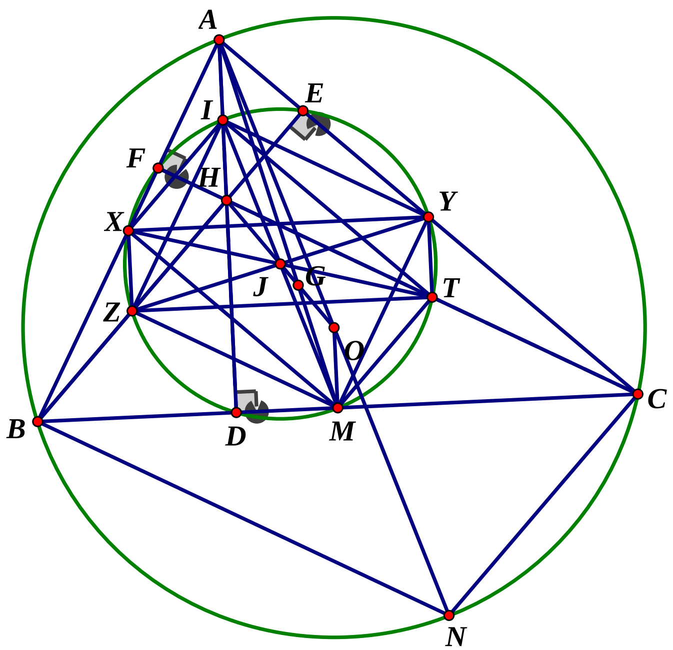
4. Đường tròn Ơ - Le của tam giác

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Gọi X,M,Y,I,Z,T lần lượt là trung điểm của AB,BC,AC,HA,HB,HC. Khi đó 9 điểm D,E,F,X,M,Y,I,Z,T nằm trên 1 đường tròn có tâm là trung điểm của OH (gọi là đường tròn Ơ – Le của tam giác ABC).

Chứng minh :

Ta có IZ là đường trung bình của tam giác $ABH \Rightarrow IZ // = \frac{1}{2}AB$, YM là đường trung bình tam giác ABC nên $YM // = \frac{1}{2}AB$. Từ đó suy ra $IZ // = YM \Rightarrow IZMY$ là hình bình hành. Lại có ZM là đường trung bình của tam giác BHC nên $ZM // CH$ mà $AB \perp CH$ suy ra $ZM \perp IZ$. Vậy tứ giác $IZMY$ là hình chữ nhật nên hai đường chéo IM,ZY cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường, Tương tự ta cũng chứng minh được các tứ giác $XITM, XYTZ$ là các hình chữ nhật nên suy ra các đường chéo IM,ZY,TX đồng quy tại trung điểm J của mỗi đường.

Chú ý rằng IDM,ZEY,TFX lần lượt vuông tại D,E,F nên tâm đường tròn ngoại tiếp chính là trung điểm J của cạnh huyền tương ứng. Suy ra 9 điểm cùng nằm trên đường tròn tâm J. Ta cũng có: $OM // = \frac{1}{2}AH \; // = IH$ nên tứ giác $IHMO$ là hình bình hành , suy ra hai đường chéo IM,HO cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Nói cách khác điểm J cũng chính là trung điểm của HO. Nếu A' là điểm đối xứng với A qua J thì $AHA'O$ là hình bình hành ta dễ dàng suy ra A' đối xứng với O qua M.



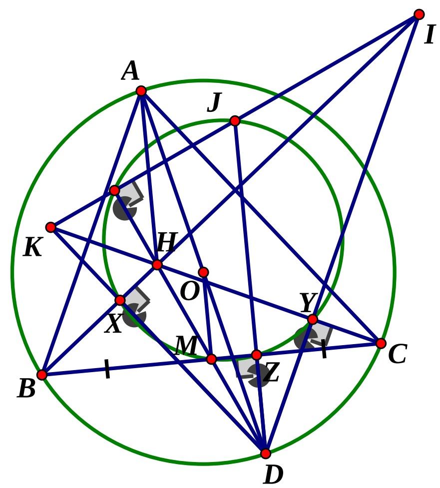
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) AD là đường kính của (O). M là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác. Gọi X,Y,Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB, HC, BC. Chứng minh 4 điểm X,Y,Z,M cùng thuộc 1 đường tròn.

Giải

Phân tích : M là trung điểm $BC \Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HD (bài toán quen thuộc). X,Y,Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB,HC,BC kết hợp tính chất điểm M làm ta liên tưởng đến đường tròn Ơle của 1 tam giác. Từ những cơ sở đó ta có lời giải như sau:

+ Giả sử HB cắt DY tại I, HC cắt DX tại K, J là trung điểm của IK. Ta dễ chứng minh được $BHCD$ là hình bình hành suy ra hai đường chéo HD, BC cắt nhau tại trung điểm M

của mỗi đường. Vì $DX \perp HY, DY \perp HC$ suy ra K là trọng tâm tam giác IHD nên



$\widehat{KDI} = \widehat{KHI} = \widehat{HCD}$ (

(chú ý $HI // CD$) và $\widehat{CHD} = \widehat{KID}$ (cùng phụ với góc $\widehat{HDI}$).

Từ đó suy ra $\Delta KID \backsim \Delta CHD$

+ Mặt khác CM, DJ là hai trung tuyến tương ứng của tam giác ΔCHD và ΔKID, như vậy ta có $\Delta DIJ \backsim \Delta CHM \Rightarrow \widehat{JDI} = \widehat{HCM}$ từ đó suy ra $DJ \perp BC$ tại Z hay Z thuộc đường tròn đường kính MJ. Ta thấy rằng đường tròn đường kính MJ là đường tròn Ơle của tam giác IHD. Từ đó ta có :

X, Y, Z, M đều cùng nằm trên đường tròn đường kính MJ.

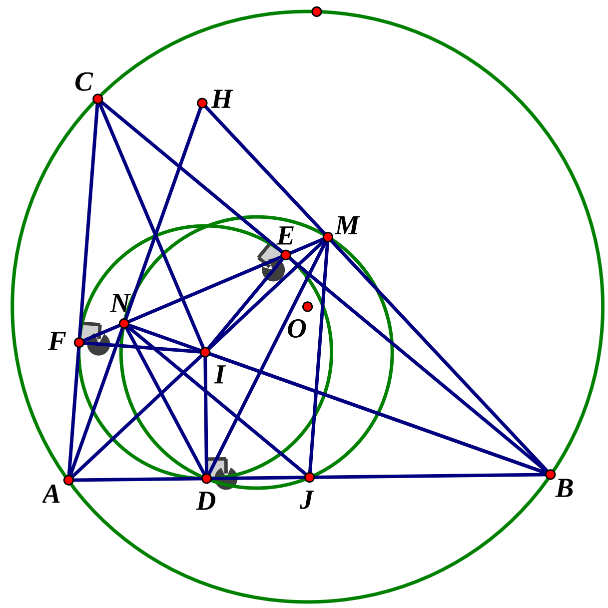
Ví dụ 2

Cho hai điểm A, B cố định và điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha (0 < \alpha < 180^0)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F . Các đường thẳng AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N. Chứng minh:

a) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm cố định. ($VMO - 2009$)

Giải



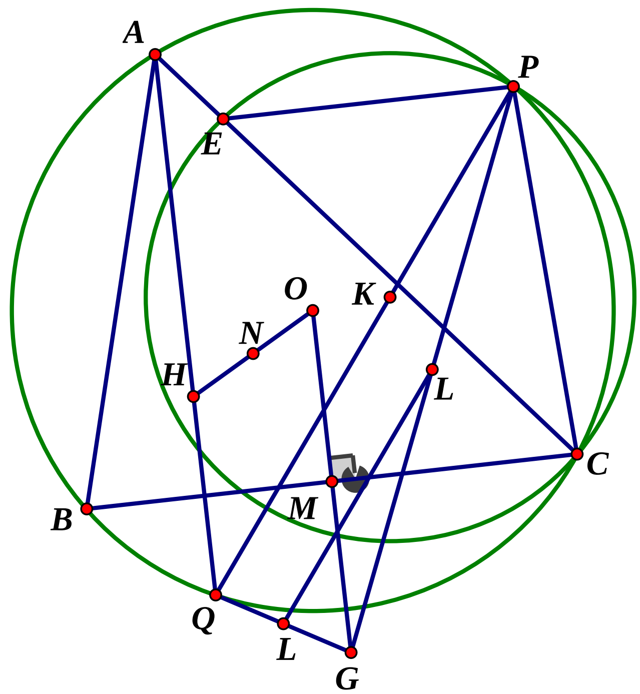
a) Xét tứ giác $IEMB$ ta có : $\widehat{MIB}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}=\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{B}}{2}=90^0-\frac{\widehat{C}}{2}$ (tính chất góc ngoài), ta cũng có $\widehat{MEB}=\widehat{CEF}=\frac{180^0-\widehat{C}}{2}=90^0-\frac{\widehat{C}}{2}$ .Từ đó suy ra $IEMB$ là tứ giác nội tiếp , do đó $\widehat{IMC}=\widehat{IEC}=90^0$.Tương tự ta cũng chứng minh được 4 điểm I,N,A,F cùng nằm trên 1 đường tròn suy ra $\widehat{INA}=\widehat{IFA}=90^0$. Từ đó suy ra $\widehat{BMA}=\widehat{BNA}=90^0$ hay 4 điểm B,C,M,N nằm trên đường tròn tâm J đường kính AB. Ta có : $\widehat{MJN}=2\widehat{MBN}=2\widehat{NEI}=2\widehat{ICF}=\widehat{ACB}=\alpha$. Ta có : $MN=2NJ.Sin\frac{\widehat{MJN}}{2}=AB.Sin\frac{\alpha}{2}$ không đổi.

b) Giả sử AN cắt BN tại H thì I là trực tâm tam giác ΔAHB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN chính là đường tròn Ơle của tam giác HAB. Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua trung điểm J của AB. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm cố định J.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và điểm P di chuyển trên (O). Đường thẳng đi qua P song song với BC cắt CA tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn Ơ le của tam giác PBC. Chứng minh: Đường thẳng qua L song song với PK luôn đi qua 1 điểm cố định khi P di chuyển trên đường tròn (O).

Giải



Gọi H, N lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC, M là trung điểm BC. G là điểm đối xứng với P qua L. Theo kết quả quen thuộc về tâm đường tròn Ơle thì G đối xứng với O qua BC. Gọi Q là giao điểm của AH với . Do nên suy ra nên thẳng hàng.

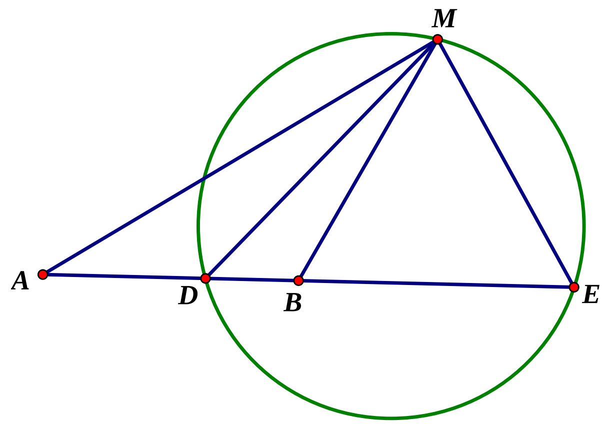
Đường thẳng qua song song với cắt tại thì là trung điểm QG, do đối xứng với qua nên là hình thang cân và là đường trung bình của hình thang.

Suy ra đối xứng với qua . Suy ra đường thẳng qua song song với luôn đi qua 1 điểm cố định là điểm đối xứng với tâm Ơle của tam giác qua .

5. Đường tròn Apolionius

Bài toán : Cho đoạn thẳng , là số cho trước (), là điểm chuyển động trong mặt phẳng sao cho .Tìm quỹ tích điểm M.

Giải



Phần thuận: Giả sử (). Dựng lần lượt là các phân giác trong và phân giác ngoài của thì . Theo tính chất phân giác ta có :

, tương tự .Suy ra các điểm cố định, , suy ra thuộc đường tròn đường kính .

Phần đảo : Lấy điểm trên đường tròn đường kính . Ta chứng minh là phân giác của góc . Qua kẻ các đường thẳng vuông góc với cắt và tại

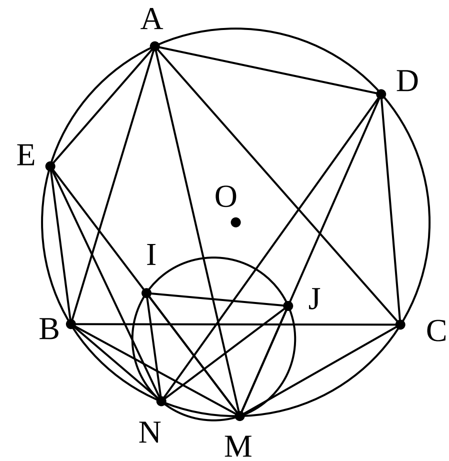
Mặt khác ta cũng có : , Suy ra cân

Suy ra là phân giác của góc là phân giác của góc

Ví dụ 1

Cho tam giác nội tiếp và điểm thay đổi trên cung không chứa . Gọi là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác . Chứng minh : Đường tròn ngoại tiếp tam giác luôn đi qua 1 điểm cố định.

Giải



Gọi N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MIJ với (O), MI cắt (O) tại E, MJ cắt (O) tại D.

Ta có EA = EB, DA = DC.

Mặt khác ta cũng có tính chất quen thuộc: EA = EB = EI và DA = DC = DJ.

Tam giác NIE và NJD có $\widehat{NEI} = \widehat{NDJ}$ (cùng chắn cung MN) và $\widehat{EIN} = 180^0 - \widehat{NIM} = 180^0 - \widehat{NJM} = \widehat{NJD}$ nên suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NJD \Rightarrow \frac{NE}{ND} = \frac{EI}{DJ} = \frac{AE}{AD}$ (không đổi).

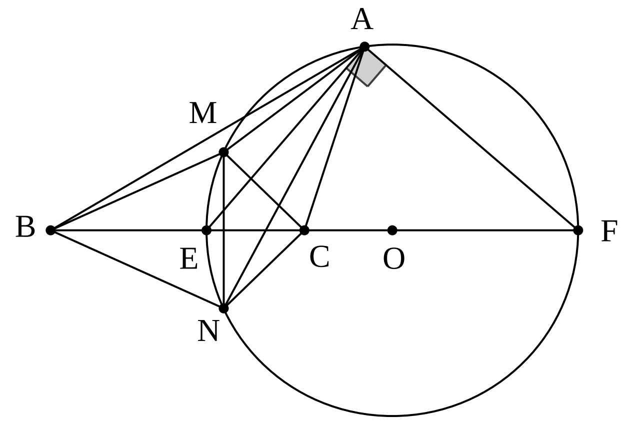
Suy ra N thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn ED với tỷ số $\frac{AE}{AD}$. Hay N là giao điểm của đường tròn Apollonius với đường tròn (O).

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC (AB > AC) và điểm M nằm trong tam giác sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh: $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

Giải

Gọi AE, AF lần lượt là các đường phân giác trong, phân giác ngoài góc A của tam giác ABC.



Theo giả thiết và tính chất của đường phân giác, ta có: $\frac{NB}{NC}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EC}=\frac{FB}{FC}$.

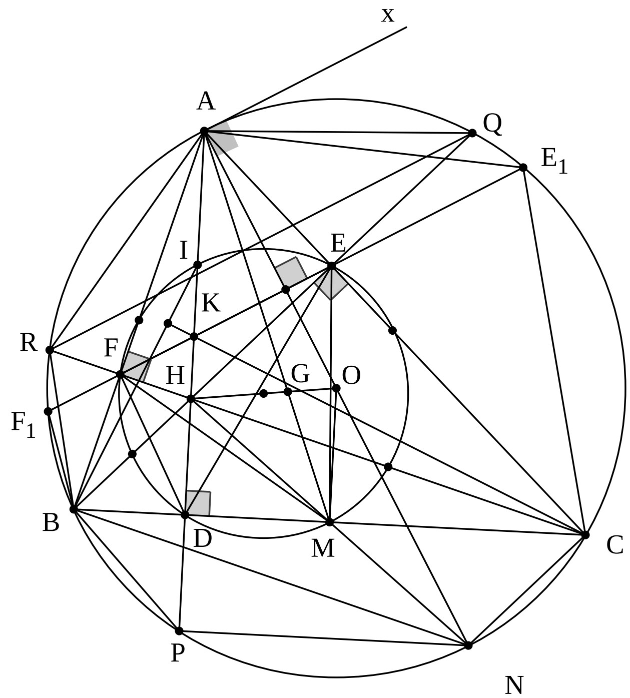
Suy ra 5 điểm M, N, A, E, F cùng nằm trên đường tròn Apollonius xác định bởi BC và tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

Vì M, N đối xứng nhau qua BC nên M, N đối xứng nhau qua đường kính EF của đường tròn nói trên. Do đó $\widehat{MAE}=\widehat{NAE}$ (1). Mặt khác AE là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE}=\widehat{NAE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$.

I. CHÙM BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG CAO VÀ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, các đường thẳng AH, BH, CH kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P, Q, R (P khác B, Q khác C, R khác A). Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH, đường thẳng EF cắt AH tại K.



1. Các tứ giác BFHD, CEHD, BFEC nội tiếp.

Chứng minh: Do AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{HDB} = \widehat{BFD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HDB} + \widehat{BFD} = 180^0$, suy ra tứ giác BFHD nội tiếp (tổng hai góc đối nhau bằng 180^0).

Tương tự ta cũng có tứ giác CEHD nội tiếp.

Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC}$ nên BFEC là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng nhau).

2. Các đường thẳng AD, BE, CF chứa các đường phân giác của góc $\widehat{EDF}; \widehat{DEF}; \widehat{EFD}$, từ đó suy ra trực tâm H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Chứng minh: Vì BFHD nội tiếp nên: $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FH}$) (1), CEHD nội tiếp nên $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EH}$) (2), tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{FBE} = \widehat{FCE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$) (3).

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $\widehat{FDH} = \widehat{EDH}$ hay AD là phân giác của góc $\widehat{EDF}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có: BE, CF chứa các đường phân giác của góc $\widehat{DEF}$; $\widehat{EFD}$

Từ đó suy ra trực tâm H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

3. Dựng đường kính của (O). Khi đó tứ giác BHCN là hình bình hành. Suy ra H, M, N thẳng hàng. H, G, O thẳng hàng và HO = 3GO.

Chứng minh: Vì AN là đường kính của (O) nên $NC \perp AC$, do $BH \perp AC \Rightarrow BH // NC$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có: CH // NB nên tứ giác BHCN là hình bình hành.

Suy ra, hai đường chéo NH, BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà M là trung điểm BC nên N, H, M thẳng hàng.

Ta có: MO là đường trung bình của tam giác AHN nên MO // = $\frac{1}{2}$AH.

Gọi G là giao điểm của AM và HO, do MO // AH (cùng vuông góc với BC).

Theo định lý Thales ta có: $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC và H, G, O thẳng hàng.

Do $\frac{GO}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO$. (Đường thẳng qua H, G, O gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

4. Các đường thẳng AH, BH, CH kéo dài cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P, Q, R khi đó: P, Q, R là các điểm đối xứng với H qua BC, CA, AB.

Chứng minh: Vì AN là đường kính của (O) nên $\widehat{APN} = 90^0 \Rightarrow PN // DM$.

Lại có M là trung điểm HN (chứng minh ở 3).

Suy ra DM là đường trung bình của tam giác HPN $\Rightarrow$ D là trung điểm của HP. Nói cách khác P là điểm đối xứng với H qua BC.

Chứng minh tương tự ta cũng có: Q, R là các điểm đối xứng với H lần lượt qua CA, AB.

5. $OA \perp EF$, tam giác ARQ cân.

Chứng minh: Dựng tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có Ax $\perp$ OA (4).

Ta cũng có: $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Mặt khác: tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$, từ đó suy ra $\widehat{xAC} = \widehat{AEF}$ hay EF // Ax (5).

Từ (4) và (5) suy ra $EF \perp OA$.

Chú ý rằng EF là đường trung bình của tam giác HQR nên QR // EF $\Rightarrow QR \perp OA$ suy ra $OA \perp QR$ tại trung điểm của QR nên tam giác AQR cân tại A.

6. Đường thẳng EF kéo dài cắt đường tròn (O) lần lượt tại $E_1; F_1$ (E nằm giữa E_1 và F). Khi đó: $AE_1; AF_1$ lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $CEE_1; BFF_1$.

Chứng minh:

Theo chứng minh ở 5 ta có: EF // QR $\Rightarrow E_1F_1$ // QR, suy ra tam giác AF_1E_1 cân tại A nên $\widehat{AF_1E_1} = \widehat{AE_1F_1}$.

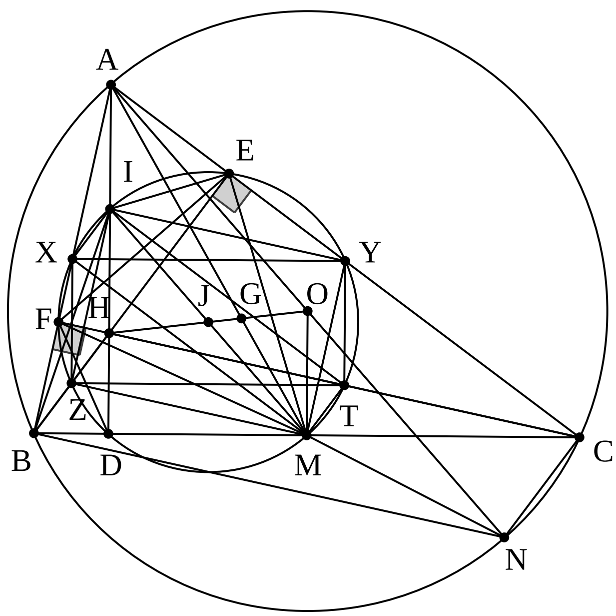
Mặt khác: $\widehat{AE_1F_1} = \widehat{AB_1E_1} \Rightarrow \widehat{AF_1E_1} = \widehat{ABF_1}$

Suy ra AF_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFF_1.

Chứng minh tương tự ta cũng có: AE_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEE_1.

Chú ý rằng: Từ chứng minh trên ta cũng có các hệ thức đẹp: $AF_1^2 = AF.AB = AH.AD;$

$AE_1^2 = AE.AC = AH.AD.$



7. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB, HC. Khi đó 9 điểm D, E, F, X, Y, M, I, Z, T nằm trên cùng một đường tròn có tâm là trung điểm của OH. (gọi là đường tròn Ơle của tam giác ABC).

Chứng minh: Ta có IZ là đường trung bình của tam giác ABH $\Rightarrow$ IZ // = $\frac{1}{2}AB$, YM là đường trung bình tam giác ABC nên YM // = $\frac{1}{2}AB$.

Từ đó suy ra IZ // = YM $\Rightarrow$ IZMY là hình bình hành.

Lại có: ZM là đường trung bình của tam giác BHC nên ZM // CH mà AB $\perp$ CH $\Rightarrow ZM \perp IZ$.

Vậy tứ giác IZMY là hình chữ nhật nên hai đường chéo IM, ZY cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường.

Tương tự ta cũng chứng minh được các tứ giác XITM, XYTZ là các hình chữ nhật nên suy ra các đường chéo IM, ZY, TX đồng quy tại trung điểm J của mỗi đường.

Chú ý rằng: IDM, ZEY, TFX lần lượt vuông tại D, E, F nên tâm vòng tròn ngoại tiếp chính là trung điểm J của các cạnh huyền tương ứng. Suy ra 9 điểm D, E, F, X, Y, M, I, Z, T cùng nằm trên đường tròn tâm J.

Ta cũng có: OM // = $\frac{1}{2}AH$ // = IH nên tứ giác IHMO là hình bình hành, suy ra hai đường chéo IM, HO cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Nói cách khác điểm J cũng chính là trung điểm của HO.

Chú ý rằng: Nếu chứng minh mỗi bộ 4 điểm trong số 9 điểm nêu trên nằm trên cùng một đường tròn thì ta có thể làm đơn giản hơn như sau:

Ví dụ: Chứng minh tứ giác DMEF nội tiếp.

Ta có: M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC nên $\widehat{EMF} = 2\widehat{EBF}$ (tính chất góc ở tâm và góc nội tiếp chắn cùng một cung).

Mặt khác theo 2) ta đã chỉ ra $\widehat{DEF} = 2\widehat{HDF} = 2\widehat{EBF}$ suy ra $\widehat{EMF} = \widehat{EDF}$ hay tứ giác DMEF nội tiếp (các đỉnh liên tiếp D, M cùng nhìn cạnh EF một góc bằng nhau).

8. K là trực tâm của tam giác IBC.

Chứng minh: Để chứng minh K là trực tâm của tam giác IBC ta chứng minh: $CK \perp IB$.

Ta sẽ chứng minh: $\widehat{IBC} + \widehat{KCB} = 90^0$

Ta có: $\widehat{IBC} = \widehat{IBE} + \widehat{EBC} = \widehat{IBE} + 90^0 - \widehat{ACB}$ (5)

Để ý rằng: 4 điểm A, E, F, H nằm trên đường tròn tâm I là trung điểm của AH nên $\widehat{EIH} = 2\widehat{EAH} = 2\widehat{PBC} = \widehat{PBE}$ (do H đối xứng với P qua D).

Suy ra tứ giác EIBP nội tiếp nên $\widehat{IBE} = \widehat{IPE}$ (6).

Ta cũng có: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{APC}$ nên tứ giác EKPC nội tiếp suy ra $\widehat{IPE} \equiv \widehat{KPE} = \widehat{KCE} = \widehat{ACB} - \widehat{KCB}$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{IBE} = \widehat{ACB} - \widehat{KCB}$ thay vào (5) ta có: $\widehat{IBC} = 90^0 - \widehat{KCB}$.

Từ đó suy ra: $\widehat{IBC} + \widehat{KCB} = 90^0$.

Vậy $KC \perp IB$, kết hợp $IK \perp BC$ suy ra K là trực tâm tam giác IBC.

Ngoài ra ta cũng có thể làm theo cách sau:

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC cắt IC tại K_1 theo tính chất quen thuộc về tiếp tuyến cát tuyến ta có:

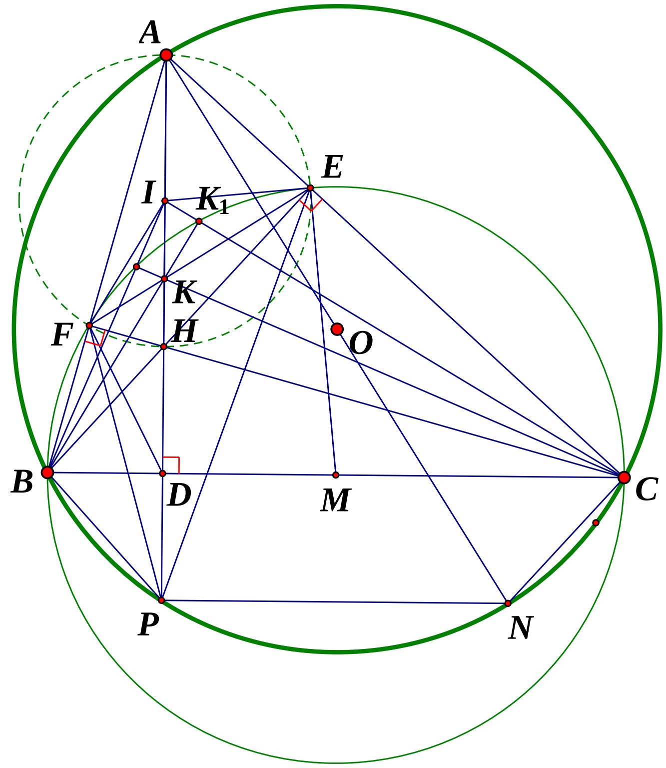
$IK_1.IC = IE^2$ (1’), mặt khác ta cũng có 5 điểm I, F, D, M, E nằm trên cùng một đường tròn nên $\widehat{IEF} = \widehat{IDF} = \widehat{IDE}$ suy ra $\Delta IEK \backsim \Delta IDE \Rightarrow IE^2 = IK.ID$ (2’)

Từ $(1^')$, $(2^')$ suy ra $IK_1.IC = IK.ID \Rightarrow DKK_1C$ nội tiếp. Nên góc $\widehat{KK_1C} = 90^0$

Lại có $\widehat{BK_1C} = 90^0$ (Do K_1 nằm trên đường tròn đường kính BC), từ đó suy ra B, K, K_1 thẳng hàng hay $BK \perp IC$ kết hợp với $BK \perp BC \Rightarrow$ đpcm.

9. ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Chứng minh

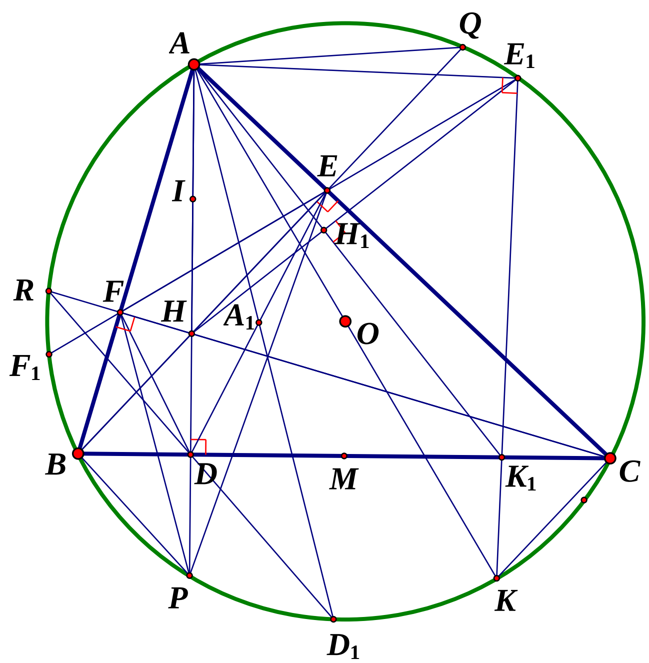


Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF có tâm là trung điểm I của AH . Ta có :
$\widehat{IAE}=\widehat{IEA}(8)$, tam giác MEC cân tại M nên $\widehat{MEC}=\widehat{MCE}(9);\widehat{IAE}+\widehat{MCE}=90^0(10)$.

Từ (8), (9), (10) suy ra $\widehat{IEA}+\widehat{MEC}=90^0$ *hay* $\widehat{IEM}=90^0$ tức là ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .Chứng minh tương tự ta cũng có MF là tiếp tuyến ngoại tiếp tam giác AEF .

10. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại T (T khác A)thì M,H,T thẳng hàng .

Chứng minh:



Ta thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHEF$ chính là (I) đường kính AH.

Vì đường tròn (O) cắt (I) tại giao điểm thứ 2 là T nên $\widehat{HTA}=90^0$ và $\widehat{NTA}=90^0 \Rightarrow N,H,T$ thẳng hàng .

Mặt khác theo 3) ta đã chứng minh: $N,H.M$ thẳng hàng. Từ đó suy ra M,H,T thẳng hàng.

11.Đường thẳng RD cắt đường tròn (O) tại D_1 thì AD_1 đi qua trung điểm của DE .

Chứng minh: Xét tam giác FHD và tam giác AED ta có :

$$\widehat{DFH}=\widehat{DAE},\widehat{FDH}=\widehat{ADE} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}RH}{HD}=\frac{AE}{2EA_1} \Leftrightarrow \frac{RH}{HD}=\frac{AE}{EA_1} \Rightarrow \Delta RHD \backsim AEA_1 \text{ nên } \widehat{DRH}=\widehat{A_1AE}$$

,mặt khác $\widehat{DRH}=\widehat{A_1AC}$ suy ra $\widehat{A_1AC}=\widehat{A_1AE}\, hay\, AA_1 \equiv AD_1$ tức là A,A_1,D_1 thẳng hàng .

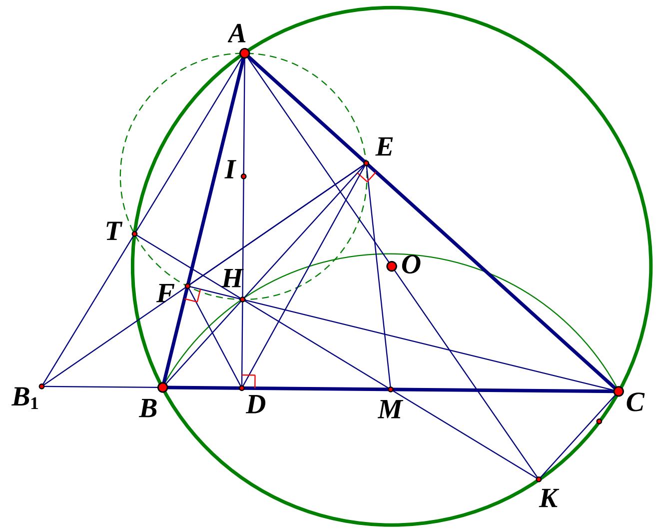
12.Đường thẳng KE_1 cắt BC tại K_1 thì $AK_1 \perp HE_1$.

Chứng minh: Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AK_1 tại giao điểm thứ 2 là $H_1\, suy\, ra\, \widehat{AH_1H}=90^0$ nên HH_1K_1D là tứ giác nội tiếp . Theo 6) cũng chứng minh được :

$AH_1.AK_1 = AH.AD = AE.AC = AE_1^2$. Tam giác AE_1K_1 vuông tại E_1 có $AE_1^2 = AH_1.AK_1$ nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta suy ra $E_1H_1 \perp AK_1$ (đpcm).

13.Đường thẳng AT cắt BC tại B_1 thì E, F, B_1 thẳng hàng.

Chứng minh



Cách 1: Ta có tứ giác $ATBC$ nội tiếp nên $B_1T.B_1A = B_1B.B_1C$, giả sử B_1F cắt (I) tại E' thì tứ giác $ATFA'$ nội tiếp, suy ra $E' \equiv E$. Suy ra E, F, B_1 thẳng hàng.

Cách 2:Ta có:$\widehat{TFB} = 360^0 - \widehat{TFE} - \widehat{EFB} = 180^0 - \widehat{TFE} + 180^0 - \widehat{EFB} = \widehat{TAC} + \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{AA_1B}$ nên $\widehat{TFB} + \widehat{AB_1B} = 180^0$ nên tứ giác $BFTB_1$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{TFB_1} + \widehat{TFE} = \widehat{TBB_1} + \widehat{TFE} = \widehat{TAE} + \widehat{TFE} = 180^0$ suy ra E, F, B_1 thẳng hàng.

14.Đường tròn ngoại tiếp tam giác $\mathrm{HEF}, \mathrm{HBC}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AM .

Chứng minh: Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cắt đường thẳng AM tại M_1 .Dễ thấy Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cũng chính là đường trong ngoại tiếp tứ giác AEHF nên ta có :

$\widehat{EM_1M} = 360^0 - \widehat{EM_1H} - \widehat{HM_1M} = 180^0 + 180^0 - \widehat{HM_1E} - \widehat{EMC} = 180^0 + \widehat{HAC} - \widehat{EMC}$

$=180^0+\widehat{HAC}-2\widehat{HBC}=180^0-\widehat{HBC}$ suy ra HM_1CB nội tiếp. Tức là: Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF, HBC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AM .

Cách 2: Giả sử Đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF, HBC cắt nhau tại M_1 .Làm tương tự như trên ta chứng minh được các tứ giác EM_1MC, FM_1MB nội tiếp. Từ đó ta có: $\widehat{AM_1E}+\widehat{EM_1M}=\widehat{AEF}+180^0-\widehat{ACB}=180^0$ suy ra A, M_1, M thẳng hàng.

15. Ba điểm B_1, H, M_1 thẳng hàng

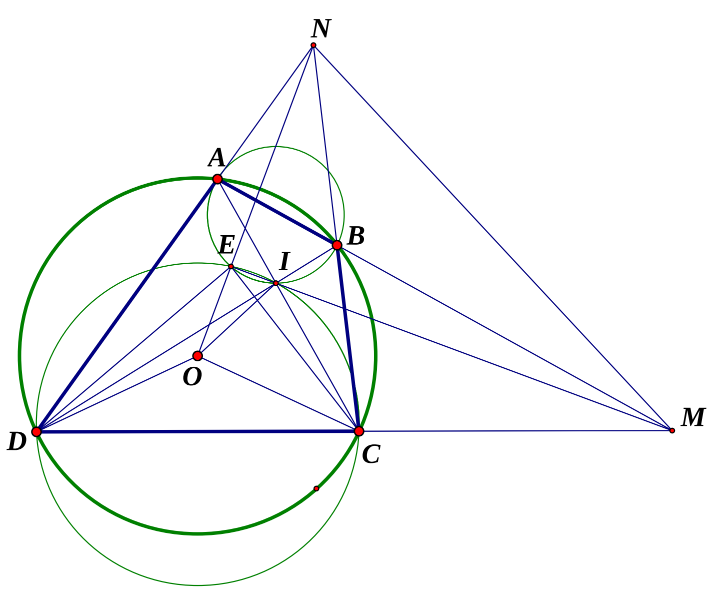
Chứng minh

Theo 10) ta có : $MH\perp AB$,ta cũng có $AH\perp B_1M$ suy ra H là trực tâm của tam giác AB_1M *suy ra* $B_1H\perp AM$ Theo 14) ta có $HM_1\perp AM$ từ đây suy ra B_1, H, M_1 thẳng hàng.

<u>**Chú ý:**</u> Các tính chất 13,14,15 có thể dễ dàng suy ra nhờ định lý Brocard sau đây:

Định lý Brocard: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là giao điểm của AB và CD ; N là giao điểm của AD và BC ; I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN .

Chứng minh



Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI và CDI .

Trước tiên ta chứng minh: E, I, M thẳng hàng:

Thật vậy, giả sử MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI tại E' thì $MI.ME' = MB.MA = MC.MD$ suy ra 4 điểm D, E', I, C nằm trên một đường tròn suy ra $E' \equiv E$ suy ra E, I, M thẳng hàng.

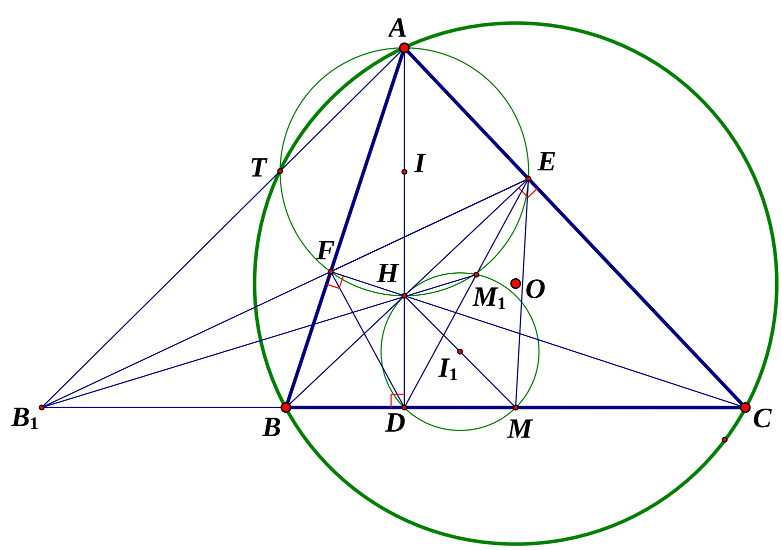
Ta có: $\widehat{AED} = 360^0 - \widehat{DEI} - \widehat{AEI} = 180^0 - \widehat{DEI} + 180^0 - \widehat{AEI} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \widehat{AOD}$ nên tứ giác $AEOD$ nội tiếp.

Ta cũng có: $\widehat{BEC} = \widehat{BEI} + \widehat{IEC} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BOC}$ nên tứ giác $BEOC$ nội tiếp.Từ đó ta cũng suy ra N, E, O thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{OEM} = \widehat{OEC} + \widehat{CEM} = \widehat{OBC} + \widehat{BDC} = \dfrac{180^0 - \widehat{BOC}}{2} + \widehat{BDC} = 90^0$ suy ra $ME \perp ON$ .Chứng minh tương tự ta cũng có: $NI \perp OM$ suy ra I là tực tâm tam giác OMN .

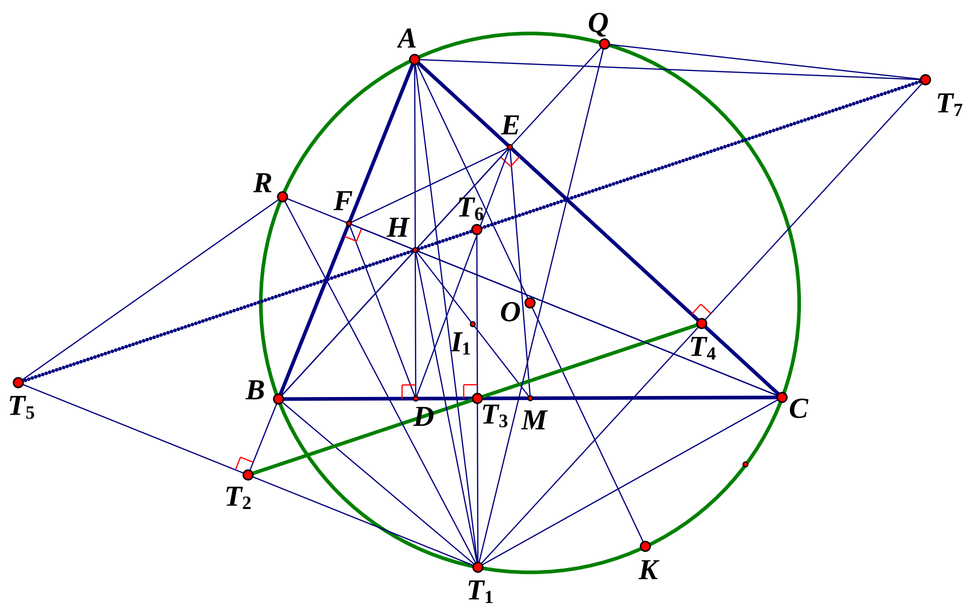
Trở lại bài toán : Ta thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC , có giao điểm hai đường chéo là H nên suy ra H là trực tâm tam giác AMB_1 .

Cũng có thể chứng minh: $B_1H \perp AM$ mà không dùng đến định lý Brocard như sau:Gọi I_1 là trung điểm HM thì I_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDM ,các điểm E, F nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH . Ta có:Tứ giác DEFM nội tiếp trong đường tròn Owle của tam giác ABC nên $B_1F.B_1E = B_1B.B_1M$ từ đó suy ra B_1H là trục đẳng phương của 2 đường tròn $\left(I;\dfrac{AH}{2}\right),\left(I_1;\dfrac{HM}{2}\right)$ suy ra $B_1H \perp II_1$ mà II_1 là đường trung bình của tam giác HAM suy ra $B_1H \perp AM$.



16.Gọi T_1 là một điểm nằm trên (O) ,T_2,T_3,T_4 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm T_1 lên các cạnh AB,BC,CA. khi đó các điểm T_2,T_3,T_4 nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Simson của điểm T_1 đối với đường tròn (O) . Từ đó suy ra các điểm đối xứng với T_1 qua AB,BC,CA. nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Steiner của điểm T_1 đối với tam giác ABC .Hãy chứng minh: Đường thẳng Steiner của điểm T_1 thì đi qua trực tâm H của tam giác ABC .

Chứng minh:



+Tứ giác $T_1T_2BT_3$ có $\widehat{BT_2T_1}+\widehat{BT_3T_1}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \widehat{T_2BT_1}=\widehat{T_2T_3T_1}$ (cùng chắn cung T_2T_1) , mà tứ giác ABT_1C nội tiếp nên $\widehat{T_2BT_1}=\widehat{ACT_1}$, do đó $\widehat{T_2T_3T_1}=\widehat{ACT_1}$.

Mặt khác tứ giác $T_1T_3T_4C$ nội tiếp nên $\widehat{T_1T_3T_4}+\widehat{T_4CT_1}=180^0 \Rightarrow \widehat{T_2T_3T_1}+\widehat{T_1T_3T_4}=180^0$.

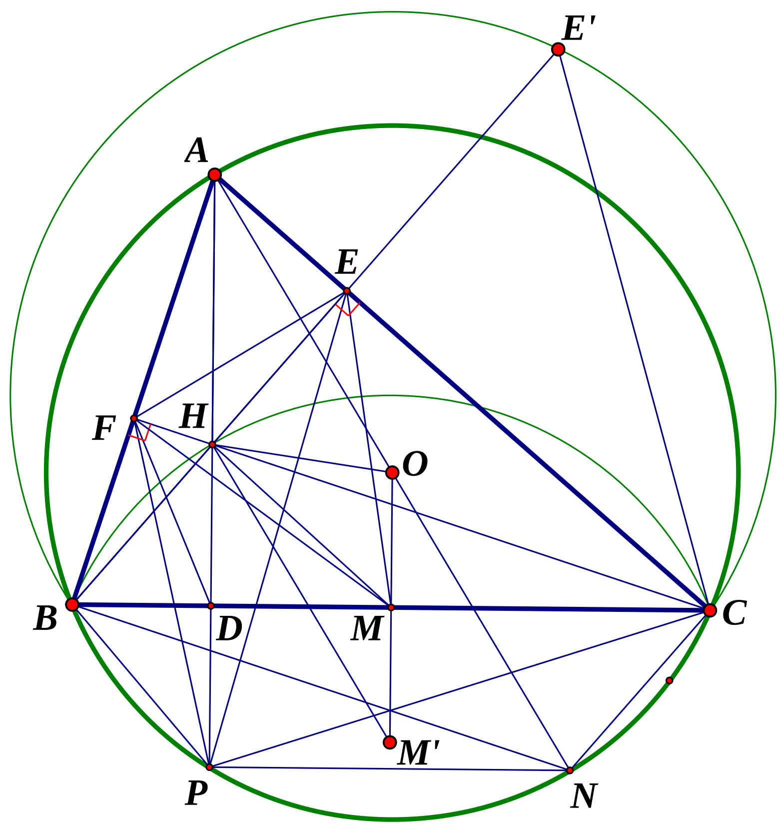
Vậy T_2,T_3,T_4 thẳng hàng.

+Ta có: T_2,T_3,T_4 thẳng hàng . Dễ thấy T_2T_3 là đường trung bình của tam giác $T_1T_5T_6$ nên $T_2T_3//T_5T_6$ .Tương tự $T_3T_4//T_6T_7$ .Theo tiên đề Ơ-clit và do T_2,T_3,T_4 thẳng hàng nên suy ra T_5,T_6,T_7 thẳng hàng.

+Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC .

Theo 4) ta chứng minh được R đối xứng với H qua AB ,Q đối xứng với H qua AC nên HRT_5T_1 là hình thang cân và các tứ giác $T_1T_2BT_3,T_1T_3T_4C$ nội tiếp nên ta có:

$\widehat{HT_5T_1} = \widehat{HRT_1} = \widehat{T_3BT_1} = \widehat{T_3T_2T_1}$ do đó $HT_5 // T_2T_3$. Tương tự ta cũng có: $HT_7 // T_3T_4$ mà T_2, T_3, T_4 thẳng hàng nên T_5, H, T_7 thẳng hàng. Nói cách khác: Đường thẳng Steiner của điểm T_1 đi qua trực tâm của tam giác ABC.



17. Giả sử *BC* cố định, điểm *A* chuyển động trên cung lớn *BC*. Chứng minh: Trực tâm *H* của tam giác *ABC* thuộc một đường tròn cố định.

Chứng minh: Do *B, C* cố định nên độ dài *BC* không đổi. Gọi *M'* là điểm đối xứng với với *O* qua *BC* theo 3) ta suy ra $OM' // AH$ và $OM' = AH$ nên tứ giác *AHM'O* là hình bình hành và *M'* là điểm cố định và $M'H = OA = OB = OC = M'B = M'C = R$ (Do *BC* là trung trực của *MM'*). Như vậy *M'* chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *HBC*. Hay điểm *H* thuộc đường tròn cố định $(M'; R)$

18. Giả sử *BC* cố định, điểm *A* chuyển động trên cung lớn *BC*. Tìm vị trí điểm *A* để $HA + HB + HC$ lớn nhất.

Chứng minh:

Theo 17) ta có H thuộc đường tròn cố định $(M';R)$ mà BC là dây cung cố định của $(M';R)$ nên $\widehat{BHC}$ không đổi suy ra $\widehat{EHC}=180^o-\widehat{BHC}=\varphi$ không đổi. Theo 3) ta cũng có: $AH=2OM$ suy ra HA có độ dài không đổi

Như vậy để tìm GTLN của $HA+HB+HC$ ta quy về tìm GTLN của $HB+HC$

Trên tia đối của tia HB ta lấy một điểm E' sao cho $HE'=HC\Rightarrow\Delta HE'C$ cân tại H

$\Rightarrow\widehat{HE'C}=180^o-2\widehat{CHE'}=180^o-2\varphi$ không đổi. Suy ra E' chuyển động trên cung chứa góc $180^o-2\varphi$ dựng trên đoạn BC.

Ta có: $HB+HC=BE'$ nên $HB+HC$ lớn nhất khi và chỉ khi BE' là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $180^o-2\varphi$ dựng trên đoạn BC tức là $BC\perp E'C$. Từ đó suy ra cách dựng điểm A như sau:

Dựng cung chứa góc $180^o-2\varphi$ trên đoạn BC, dựng tia $Cx\perp BC$ cắt cung chứa góc tại E'. Dựng đường thẳng qua B vuông góc với BE' cắt (O) tại A là vị trí cần tìm.

19. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $EF+FD+DE$ lớn nhất.

Chứng minh

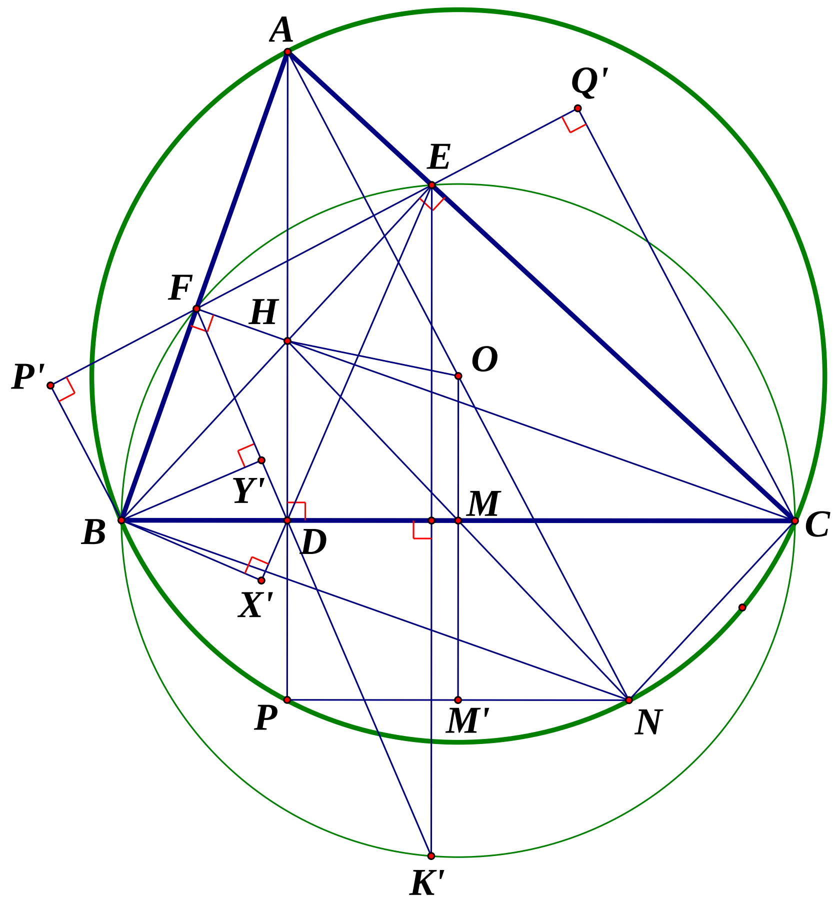
Chứng minh $OA\perp EF$ suy ra $S_{AEOF}=\frac{1}{2}OA.EF$, tương tự ta có:

$S_{BDOF}=\frac{1}{2}OB.DF;S_{CDOF}=\frac{1}{2}OC.DE$ từ đó suy ra $2S_{ABC}=R.(EF+FD+DE)$. Do R không đổi nên $EF+FD+DE$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ khoảng cách từ điểm A đến BC lớn nhất. Ta có $AH\le AM\le AO+OM=R+OM$ nên AH lớn nhất khi và chỉ khi A, O, M thẳng hàng. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Ngoài ra ta cũng có thể giải thích theo cách khác:

Ta thấy các điểm B, E, F, C nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC.

Do BC không đổi nên $\widehat{BAC}$ không đổi. Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ nên $\widehat{MFE}=\widehat{BAC}$ không đổi. Ta có $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=cos\widehat{BAC}$ không đổi. Suy ra độ dài EF không đổi.



Gọi K’ là điểm đối xứng với E qua BC thì $\widehat{EDC} = \widehat{K'DC}$

Ta lại có $\widehat{EDC} = \widehat{EHC} = \widehat{FHC} = \widehat{FDB}$. Suy ra $\widehat{EDB} = \widehat{KDM}$ nên F, D, K’ thẳng hàng

Ta có chu vi ΔDEF lớn nhất khi và chỉ khi $DE + DF$ lớn nhất. Từ các chứng minh trên ta có: $DE + DF = FK' \le 2R' = BC$. Suy ra $DE + DF$ lớn nhất khi và chỉ khi $D \equiv M$ hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Cũng có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác: Gọi P’, Q’ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên EF. Ta có các tính chất quen thuộc FH, DH lần lượt là phân giác trong các góc $\widehat{EFD}, \widehat{FDE}$ suy ra FB, FD lần lượt là các đường phân giác ngoài của $\widehat{EFD}, \widehat{FDE}$. Hạ $BX' \perp DE; BY' \perp DF$ thì suy ra $FP' = FY', DX' = DY', EP = EX'$ (tính chất một điểm nằm trên phân giác cách đều hai cạnh). Ta có: Chu vi tam giác DEF là $2p = DF + EF + DE = Y'F + DX' + EF + DE = FP' + EF + EX' = 2EP'$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $2p = 2FQ'$. Suy ra $4p = 2\left(EP' + FQ'\right) = 2\left(PQ' + 2EF\right) \Rightarrow 2p = P'Q' + 2EF$ suy ra $DE + DF = P'Q'$. Mặt khác $P'Q' \le BC$ nên chu vi tam giác DEF lớn nhất bằng $EF + BC$ khi và chỉ khi $P'Q' // BC$ hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.

20. Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $DH.DA$ lớn nhất.

Chứng minh: Ta dễ dàng chứng minh được: $\Delta BHD \backsim \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{BD}{HD} = \dfrac{AD}{CD} \Leftrightarrow DH.DA = BD.CD$

Theo bất đẳng thức Cô – si ta cũng có $BD + CD \ge 2.\sqrt{BD.CD} \Leftrightarrow BC \ge 2\sqrt{BD.CD}$ suy ra $BD.CD \le \dfrac{BC^2}{4}$. Vậy $DH.DA \le \dfrac{BC^2}{4}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BD = CD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của BC, suy ra A là điểm chính giữa cung lớn BC.

21. Chứng minh: $HA.HB.HC \ge 8.HD.HE.HF$ và $3R \ge HA + HB + HC$

Để giải quyết câu hỏi này ta cần kiến thức bổ trợ là bài toán nổi tiếng sau:

Bất đẳng thức Erdoss – Mordell

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, b_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức:

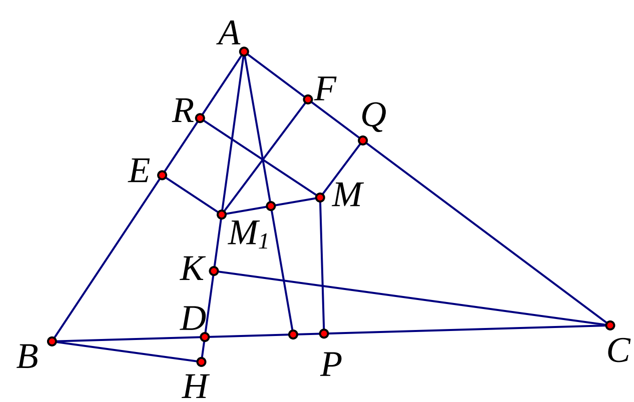
a) $R_a + R_b + R_c \ge 2(d_a + d_b + d_c)$ b) $R_a.R_b.R_c \ge 8d_a.d_b.d_c$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác

Hướng dẫn giải

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

a) Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Dựng $BH \perp AM_1$ và $CK \perp AM_1$



Giả sử AM_1 cắt BC tại D. Khi đó $BD \ge BH, CD \ge CK$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD \perp BC$ hay $AM_1 \perp BC$. Từ đó ta có: $a \ge BH + CK \Leftrightarrow a.R_a \ge 2S_{ABM_1} + 2S_{ACM_1}$ (chú ý rằng $AM_1 = AM = R_a$) hay $a.R_a \ge cd_b + bd_c$. Từ đó

$R_a \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1). Tương tự ta có $R_b \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$(2); $R_c \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3). Cộng vế với vế của các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta thu được

$$R_a + R_b + R_c \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c + \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a + \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a \ge d_a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$$

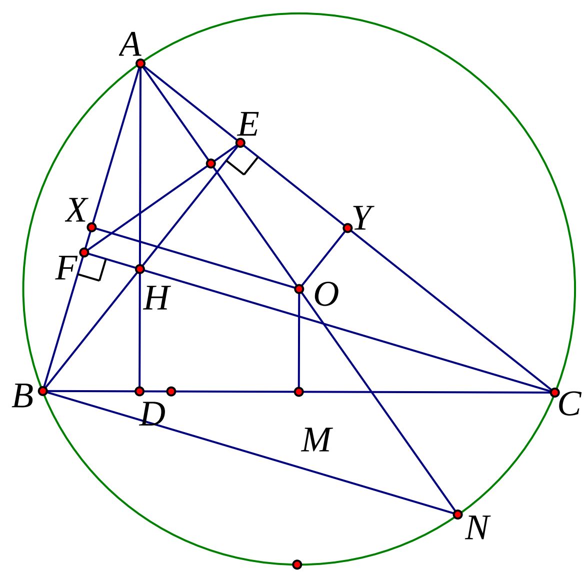
(sử dụng bất đẳng thức Cô – si $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ với $x, y > 0$ cho các biểu thức trong ngoặc). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác ABC. Nói cách khác, M_1 (và do đó cả M) là tâm của tam giác đều ABC.

b. Từ cách chứng minh bất đẳng thức Erdos – Mordell ở câu a) ta có:

$R_a \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1) $R_b \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$(2); $R_c \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3). Nhân theo vế của ba bất đẳng thức trên ta có:

$$R_a.R_b.R_c \ge \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right).\left(\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a\right).\left(\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a\right) \ge 2.\sqrt{\frac{c}{a}d_b.\frac{b}{a}d_c}.2.\sqrt{\frac{a}{b}d_c.\frac{c}{b}d_a}.2.\sqrt{.\frac{a}{c}d_b.\frac{b}{c}d_a} = 8.d_a.d_b.d_c$$

Trở lại bài toán:



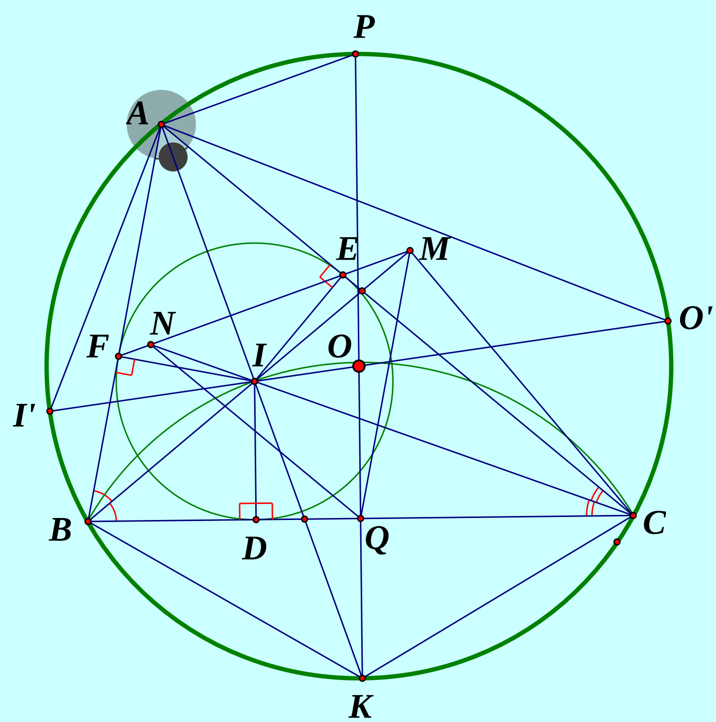
+ Áp dụng bất đẳng thức Erdoss – Mordell dạng tích cho trực tâm H của tam giác ABC ta có ngay: $HA + HB + HC \ge 8.HD.HE.HF$

+ Áp dụng bất đẳng thức Erdoss – Mordell dạng tổng cho tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có: $OA + OB + OC \ge 2\left(OM + +OY\right)$

Theo (3) ta có: $HA = 2OM$, tương tự $HB = 2OY, HC = 2OX$. Suy ra $3R \ge HA + HB + HC$

II. CHÙM BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

1. Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp (O), gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng AJ kéo dài cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là K (K khác A). Ta có các tính chất, bài toán sau:



a) $KB = KC = KI$ (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC)

Chứng minh:

Vì AI là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa của cung BC suy ra $KB = KC$. Bây giờ ta chứng minh, tam giác KBI cân tại I:

Ta có $\widehat{BIK} = \widehat{IBA} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \widehat{IAC} = \widehat{IBC} + \widehat{CBK} = \widehat{IBK}$ nên tam giác KBI cân tại K. Từ đó suy ra $KB = KI = KC$

b) Đường thẳng BI, CI cắt EF lần lượt tại M, N. Khi đó 4 điểm I, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn, 4 điểm I, N, F, B cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:

Xét tứ giác $IEMC$ ta có: $\widehat{MIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2} = 90^o - \dfrac{\widehat{A}}{2}$ (tính chất góc ngoài)

Ta cũng có : $\widehat{MEC}=\widehat{AEF}=\dfrac{180^\circ-\widehat{A}}{2}=90^\circ-\dfrac{\widehat{A}}{2}$. Từ đó suy ra *IEMC* là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{IMC}=\widehat{IEC}=90^\circ$. Tương tự ta cũng chứng minh được 4 điểm *I, N, B, F* cùng nằm trên một đường tròn suy ra $\widehat{INB}=\widehat{IFB}=90^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{BMC}=\widehat{BNC}=90^\circ$. Hay 4 điểm *B, C, N, M* nằm trên đường tròn tâm *Q* đường kính *BC.*

Chú ý rằng: Tam giác *QBM* cân tại *Q* nên $\widehat{QMB}=\widehat{QBM}$, lại có $\widehat{IBA}=\widehat{QBM}$ (Tính chất phân giác). Nên $\widehat{QMB}=\widehat{IBA}$ suy ra *QM // AB* hay đường thẳng *QM* chứa đường trung bình song song với cạnh *AB* của tam giác *ABC.*

c) Kí hiệu *R, r* lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp , nội tiếp tam giác *ABC*. Khi đó ta có $R^2-2R.r=OI^2$ (công thức Ole).

Chứng minh:

Dựng đường kính *PK* của *(O)* và đường kính *I'O'* qua *O.I* của *(O)* (*I'* thuộc cung nhỏ *AB*). Ta có : *II'.IO'* = *IA.IK* $\Leftrightarrow (R-OI)(R+OI)=IA.IK \Leftrightarrow R^2-OI^2=IA.IK$ (*). Chú ý rằng $\Delta IFA \sim \Delta KCP$ nên $\dfrac{IA}{IF}=\dfrac{KP}{KC}\Rightarrow IA=\dfrac{IF.KP}{KC}=\dfrac{r.2R}{KC}$ thay vào (*) ta có $R^2-OI^2=\dfrac{r.2R}{KC}.IK$ (theo 1) ta đã chứng minh *KI* = *KC* = *KB* nên suy ra $R^2-2R.r=OI^2$ (đpcm).

Chú ý: Do $OI^2\ge 0\Rightarrow R^2-2R.r\ge 0\Rightarrow R^2\ge 2R.r\Rightarrow R\ge 2r$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $O\equiv I$ hay tam giác *ABC* là tam giác đều.

d) Xét đường tròn tâm *K'* là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc *A* (đường tròn tiếp xúc *BC* và tiếp xúc phần kéo dài các cạnh *AB, AC*). Khi đó ta có *KK'* = *KI* = *KB* = *KC.*

Chứng minh:

K' là tâm đường tròn bàng tiếp góc *A* nên *K'* nằm trên đường phân giác trong góc *A*, mặt khác (*K'*) tiếp xúc *BC* và phần kéo dài của cạnh *AB* nên *K'* nằm trên phân giác ngoài góc *B*, suy ra $K'B\perp IB$ hay tam giác *IBK'* vuông tại *B*. Mặt khác theo (1) ta chứng minh được *KI* = *KB* =*KC* nên suy ra *K* là trung điểm của *IK'* hay *KK'* = *KI* = *KB* = *KC.*

2) Các đường thẳng *BI, CI* kéo dài cắt *(O)* tại giao điểm thứ 2 là *X, Y* (*X* khác *A, Y* khác *B*). Đường thẳng *KY* cắt *AB, BC, BI* lần lượt tại B_1, B_2, B_3.

Đường thẳng *KX* cắt *AC*, *BC*, *CI* lần lượt tại C_1, C_2, C_3.

Khi đó ta có:

+) BB_1B_2, CC_1C_2 là các tam giác cân.

+) B_1, I, C_1 thẳng hàng.

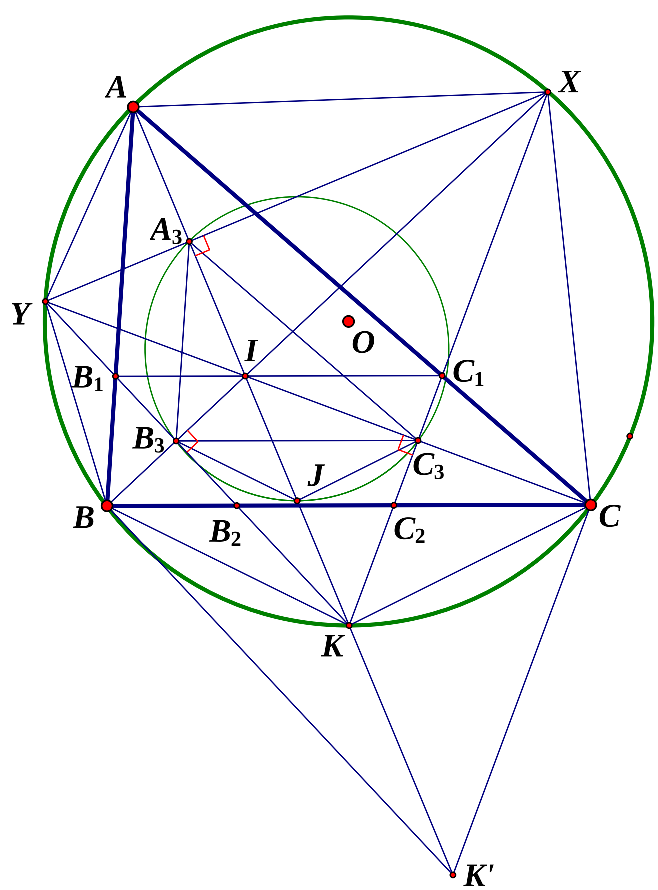
+) $\dfrac{KI}{KA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.

+) $B_3C_3 // BC$

+) *I* là trực tâm tam giác *KXY*

+) Gọi *J* là trung điểm *IK* thì bốn điểm A, B_3, C_3, J cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh



+) Ta có $\widehat{KC_1C}=\frac{1}{2}$ sđ $\left(\overset\frown{AX}+\overset\frown{KC}\right)$, $\widehat{CC_2X}=\frac{1}{2}$ sđ $\left(\overset\frown{CX}+\overset\frown{BK}\right)$mà $\overset\frown{AX}=\overset\frown{XC}$ và $\overset\frown{KC}=\overset\frown{BK}$. Suy ra $\widehat{KC_1C}=\widehat{CC_2X}$ hay tam giác CC_1C_2 cân tại C. Chứng minh tương tự cho trường hợp tam giác BB_1B_2.

+) Ta có : $\widehat{IAC_1}=\widehat{IXC_1}=\frac{1}{2}$ sđ $\overset\frown{BC}$ suy ra tứ giác $IAXC_1$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{XIC_1}=\widehat{XAC}=\widehat{XBA}$ suy ra $IC_1//BC$, chứng minh tuong tự ta cũng có $IB_1//BC\Rightarrow B_1,I,C_1$ thẳng hàng và $B_1C_1//BC$.

+) Theo (1) ta có *: KI = KB = KC. n*

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp : ABKC ta có AB.KC + AC.BK =AK.BC suy ra $KI\left(AB+AC\right)=KA.BC\Leftrightarrow\frac{KI}{KA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

+) Theo tính chất đường tròn nội tiếp tam giác ta có :

$$\widehat{BIC}+\widehat{B_3KC_3}=\widehat{BIC}+\widehat{FDE}=180^\circ-\frac{\widehat{B}}{2}-\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{B_3KC_3}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}+\frac{1}{2}\widehat{BKC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ.$$

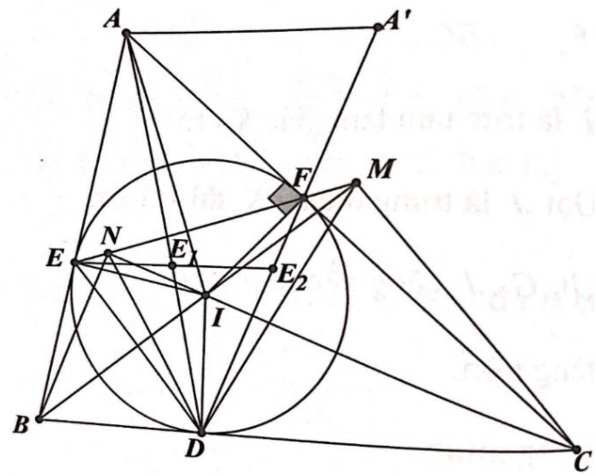
Suy ra tứ giác KB_3IC_3 nội tiếp. Suy ra $\widehat{IB_3C_3}=\widehat{IKC_3}=\widehat{ABX}=\widehat{XBC}\Rightarrow B_3C_3//BC$.

+) Ta có : $\widehat{KC_3C}=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{KC}+\overset\frown{XY}\right)=\frac{1}{4}\left(\overset\frown{AB}+\overset\frown{BC}+\overset\frown{CA}\right)=90^\circ$ nên $KX\perp CY$, chứng minh tương tự ta cũng có : $KY\perp BX$ suy ra I là trực tâm tam giác *KXY*.

+) Theo trên ta chừng minh : $\widehat{IC_3K}=\widehat{IB_3K}$, nên 4 điểm I,B_3,K,C_3 nằm trên đường tròn tâm I đương kính *IK*, chứng minh tương tự phần $B_3C_3//BC$ ta suy ra $A_3B_3//AB$, $A_3C_3//AC$. Từ đó ta có : $\widehat{B_3A_3C_3}+\widehat{B_3JC_3}=\widehat{BAC}+2\widehat{B_3KC_3}=\widehat{BAC}+\widehat{BKC}=180^\circ$ suy ra 4 điểm B_3,A_3,C_3,J cùng nằm trên một đường tròn.

3. Đường thẳng qua *E* song song với *BC* cắt *AD, DF* lần lượt tại E_1,E_2 thì E_1 là trung điểm EE_2 .

Chứng minh



Dựng đường thẳng qua *A* song song *BC* cắt *DF* tại *A'*. Ta dễ chứng minh được các tam giác *AEF*, *AFA'* cân tại *A* nên *AE* = *AF* =*AA'* .

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{E_1E_2}{AA'}=\frac{DE_1}{DA}=\frac{BE}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{EE_1}{EA}=\frac{EE_1}{AA'}$.

Suy ra $E_1E_2=EE_1$ hay E_1 là trung điểm EE_2 .

4) *DI* là phân giác của góc *MDN*

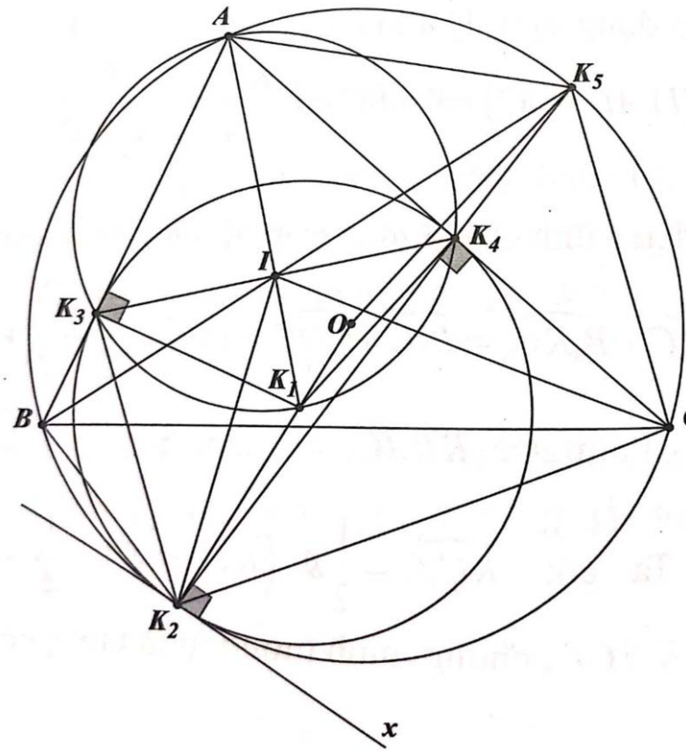
Chứng minh

Theo 1 ta đã chứng minh được *BENI*, *CMFI*, *BMNC* là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BNI}=\widehat{CMI}=90^\circ$ suy ra các tu giác *CMID*, *BNID* nội tiếp nên $\widehat{IDN}=\widehat{IBN}=\widehat{ICM}=\widehat{IDM}$ hay *ID* là phân giác của góc $\widehat{MDN}$.

5) Đường tròn tâm K_1 tiếp xúc trong với (*O*) Tai K_2 và tiếp xúc với các cạnh *AB, AC* lần lượt tại K_3,K_4. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là trung điểm của K_3K_4

(Đường tròn (K_1) gọi là đường tròn Mixtilinear ứng với góc *A* của tam giác *ABC*).

Chứng minh



Ta có O, K_1, K_2 thẳng hàng, dựng tiếp tuyến chung K_2x của *(O)* và (K_1) . Giả sử K_2K_4 cắt *(O)* tại K_5. Các tam giác $K_1K_2K_4, OK_2K_5$ cân tại $K_1; O$ nên $K_1K_4 // OK_5$ mà $K_1K_4 \perp AC$ suy ra $OK_5 \perp AC$ suy ra K_5 là điểm chính giữa của cung AC suy ra B, I, K_5 thẳng hàng.

Giả sử BK_5 cắt K_3K_4 tại *I*. Ta chứng minh : *CI* là phân giác của góc *ACB*.

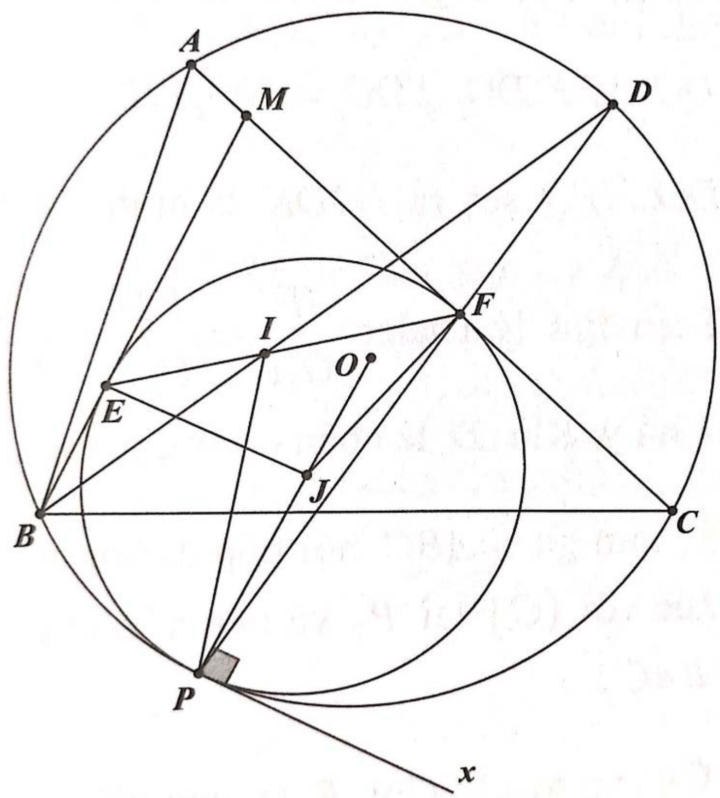
Ta có : $\widehat{K_5BK_2} = \widehat{K_4K_3K_2} = \widehat{K_5K_2x}$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) . Suy ra tứ giác IK_3BK_2 nội tiếp . Ta cũng có $\widehat{IK_2C} = \widehat{BK_2C} - \widehat{BK_2I} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{AK_3K_4}$ $= 180^\circ - \left(180^\circ - 2\widehat{AK_4K_3}\right) - \widehat{AK_4K_3} = \widehat{AK_4K_3}$ nên tứ giác IK_4CK_2 nội tiếp . Từ đó ta tính được :

$\widehat{ACI} = \widehat{IK_2K_4} = \widehat{BK_2C} - \widehat{BK_2I} - \widehat{K_5K_2C} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{AK_3K_4} - \widehat{ABK_5}$

$= 180^\circ - \widehat{BAC} - \dfrac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} - \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{ABC}}{2} - \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$. Điều đó chứng tỏ CI là phâ giác của góc ACB. Hay tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* là trung điểm của K_3K_4.

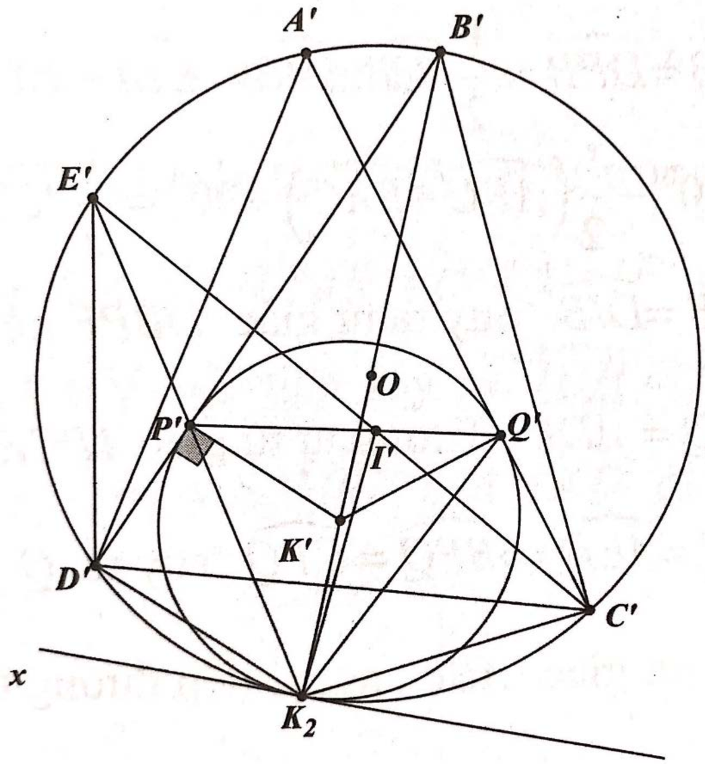
6) Tam giác *ABC* nội tiếp *(O)* điểm *M* trên cạnh *BC*. Đường tròn *(J)* tiếp xúc với *MA*, *MC* lần lượt tại *E* và *F* đồng thời tiếp xúc với *(O)* tại *P* . Khi đó tân I đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* nằm trên đường thẳng *EF* (Bổ đề Sawayama – Thebault)

Chứng minh



Đường thẳng *PF* cắt *(O)* tại *D*. Đường tròn *(J)* tiếp xúc với *(O)* tại *P* suy ra *P, J, O* thẳng hàng . Tam giác PJF, POD là tam giác cân nên $\widehat{ODP} = \widehat{JFP}$. Suy ra *OD // JF* . $JF \perp BC \Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{DB}$ hay *AD* là phân giác của góc *BAC*. Goi *I* là giao điểm của AD và EF thì $\widehat{IAP} = \widehat{FPx}, \widehat{FEP} = \widehat{FPx} \Rightarrow \widehat{IEP} = \widehat{IAP}$ nên tứ giác IEAP nội tiếp . Suy ra $\widehat{AEP} = \widehat{AIP}, \widehat{EFP} = \widehat{AEP} \Rightarrow \widehat{AIP} = \widehat{EFP}$ suy ra $\widehat{DIP} = \widehat{DFI} \Rightarrow \Delta DIF \sim \Delta DIP$ suy ra $DI^2 = DP.DF$. Vì $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \Delta CDF \sim \Delta PDC \Rightarrow DC^2 = DF.DP \Rightarrow DI = DC$. Theo chứng minh 1) ta suy ra tâm *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *ABC*.

Áp dụng bổ đề ta có bài toán sau

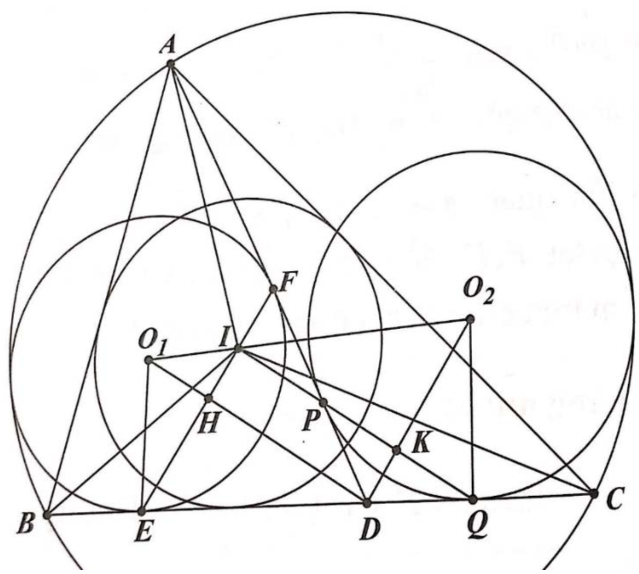


Đường tròn tâm *K’* tiếp xúc trong với (*O*) tại K_2 . Xét hai điểm *P’, Q’* nằm trên đường tròn *(K’)* qua *P’* kẻ tiếp tuyến với (*K’*) cắt (*O)* tại *B’,D’* qua *Q*’ kẻ tiếp tuyến với *(K’)* cắt *(O)* tại *A’,C’*. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác .

Khi đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $A'C'D'$ và $B'C'D'$nằm trên *P’Q’* .

7) Cho tam giác *ABC* nội tiếp *(O*) , Ngoại tiếp đường tròn *(I)* . *D* là điểm bất kỳ trên cạnh *BC* , gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc với *AB, BC* và *(O)* , (O_2) là đường tròn tiếp xúc với *AD, BC* và *(O)* . Khi đó I, O_1, O_2 thẳng hàng.

Chứng minh



Gọi *E, F* lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) với *BC, AD. P, Q* là tiếp điểm của (O_2) với *AD, BC.*

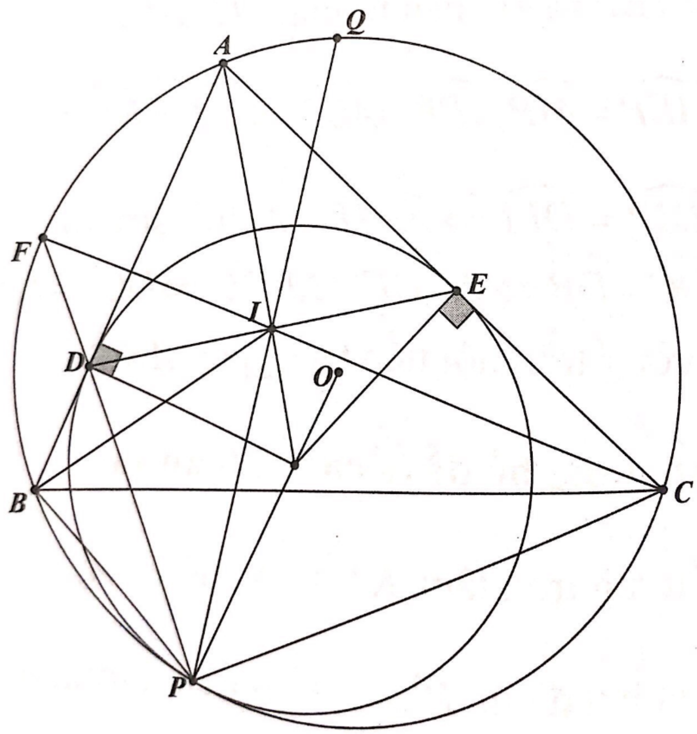
Theo 6) ta có $EF \cap PQ = I$ là tâm đường tròn nội tieepd tam giác *ABC* . Gọi *H* là giao điểm của DO_1 với *EF* , *K* là giao điểm của DO_2 với *PQ* thì $DO_1 \perp EF; DO_2 \perp DO_1 \Rightarrow DO_2 // EF$, tương tự ta có $DO_1 // PQ$ suy ra *IHDK* là hình chữ nhật.

Theo định lý Thales $\frac{IH}{O_2D} = \frac{KD}{O_2D} = \frac{O_1H}{O_1D} \Rightarrow O_1, I, O_2$ thẳng hàng .

Chú ý: Khi *D* là chân đường vuông góc trong góc *A* thì $(O_1);(O_2)$ tiếp xúc nhau tại *I.*

8) Tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)* và ngoại tiếp đường tròn *(I)* . Đường tròn *(K)* tiếp xúc *(O)* tại *P* và tiếp xúc với *AB, AC* tại *D, E* . Khi đó *PI* đi qua điểm chính giữa cung *BAC.*

Chứng minh



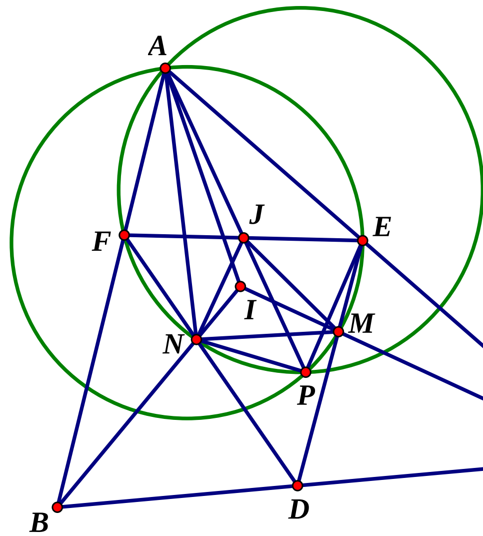
Gọi *F* là giao điểm của *CI* với *(O)* , *Q* là giao điểm *PI* với *(O)* theo 5) ta có *I* là trung điểm của *DE* . Ta cũng có : $\widehat{FPB}=\widehat{DPB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB};\widehat{DIB}=\widehat{BIA}-90^\circ$

$=180^\circ-\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{BAC}\right)-90^\circ=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ nên $\widehat{DPB}=\widehat{DIB}$ suy ra tứ giác *DBPI* nội tiếp suy ra $\widehat{BPQ}=\widehat{ADE}$. Tương tự tứ giác IPCE nội tiếp nên $\widehat{IPC}=\widehat{AED}\Rightarrow\widehat{BPQ}=\widehat{CPQ}$. Suy ra *Q* là điểm chính giữa cung *BAC.*

9) Tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn *(I)* . *AI* cắt *BC* tại *D* . Gọi *E, F* là điểm đối xứng.

của D qua CI,BI . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của DE,DF . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A. Khi đó AP chia đôi BC.

Chứng minh



Theo tính chất đối xứng của phân giác. Ta có: E,F lần lượt thuộc AC,AB.

Ta có: $\frac{BF}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CA}\Rightarrow EF//BC$. Gọi J là trung điểm của EF ta có:

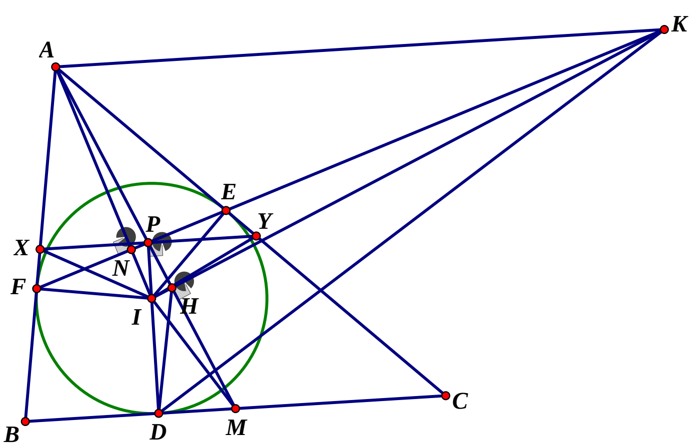
$\widehat{MPN}=\widehat{MPA}+\widehat{NPA}=\widehat{MEC}+\widehat{NFB}=\widehat{MDC}+\widehat{NDB}=180^o-\widehat{MDN}=180^o-\widehat{MJN}$.

Suy ra $MJPN$ nội tiếp. Từ đó ta có: $\widehat{MPJ}=\widehat{MNJ}=\widehat{MEJ}=\widehat{EDC}=\widehat{DEC}=\widehat{MPA}$ suy ra A,J,P thẳng hàng hay AP chia đôi EF, suy ra AP chia đôi BC.

10.

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại K, gọi M là trung điểm BC.

Chứng minh.



$MI\perp DK$.

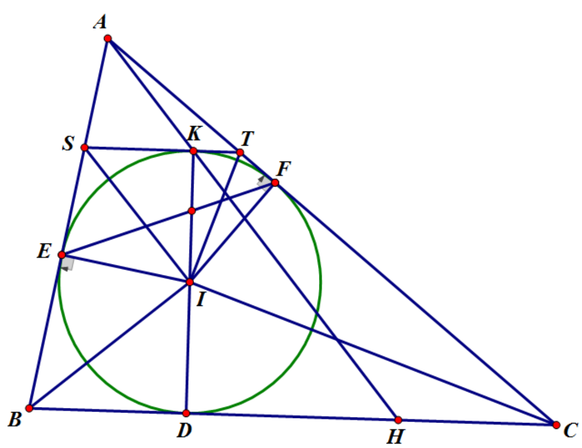
Gọi P là giao điểm của ID và EF. Vì AE, AF là các tiếp tuyến của (I) tại E, F nên $IA \perp EF$. Vì $IP \perp BC$ suy ra $IP \perp AK$. Từ đó suy ra P là trực tâm của tam giác $AIK \Rightarrow AP \perp IK$ tại H suy ra tứ giác $ANHK$ nội tiếp.

Kẻ đường thẳng qua P song song với BC cắt AB, AC tại X, Y. Từ các tứ giác $IPXF, IPEY$ nội tiếp ta suy ra $\widehat{PXI} = \widehat{PFI} = \widehat{PEI} = \widehat{PYI}$ dẫn tới tam giác IXY cân tại I nên P là trung điểm của XY. Theo định lí thales ta dễ suy ra điểm A, P, M thẳng hàng.

Lại có $IH.IK = IN.IA = IF^2 = ID^2 \Rightarrow \dfrac{IH}{ID} = \dfrac{ID}{IK}$ suy ra $\Delta IHD \backsim \Delta IDK(\text{c.g.c})$. Tứ giác $IDMH$ nội tiếp suy ra $\widehat{IDH} = \widehat{IMH}$, $\Delta IHD \backsim \Delta IDK$ $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IKD} \Rightarrow \widehat{IMH} = \widehat{IKD}$ mà $\widehat{IMH}$ phụ với $\widehat{MIH}$ nên $\widehat{IKD}$ phụ với $\widehat{MIH} \Rightarrow IM \perp DK$.

11. Dựng đường kính DK của đường tròn (I), đường thẳng AK cắt BC tại H. Chứng minh : $BD = HC$

Chứng minh



Dựng đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại S, T suy ra ST là tiếp tuyến của (I), theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có :

$SK = SE, \text{BD} = \text{BE}$,lại có : $\widehat{SIE} + \widehat{BIE} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{KIE} + \widehat{DIE}\right) = 90^0$ nên ΔSIB vuông tại I , suy ra:

$SK.BD = SE.EB = IE^2 = r^2$. Tương tự ta cũng có: $KT.CD = IF^2 = r^2$ suy ra $SK.BD = KT.CD \Leftrightarrow \dfrac{SK}{CD} = \dfrac{KT}{BD}$ áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta suy ra :

$\frac{SK}{CD}=\frac{KT}{BD}=\frac{SK+TK}{CD+BD}=\frac{ST}{BC}$, mặt khác theo định lý Thales ta cũng có : $\frac{SK}{BH}=\frac{SA}{AB}=\frac{ST}{BC}$ từ đó suy ra $\frac{SK}{DC}=\frac{SK}{BH}\Leftrightarrow DC=BH$

III. CHÙM BÀI TOÁN CÁT TUYẾN, TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại I, H. Khi đó các tính chất hình học sau có liên quan đến nhau:

1. 5 điểm M, A, O, E, B nằm trên một đường tròn.

2. ME là tia phân giác của góc $\widehat{AEB}$.

3. $MA^2 = MC.MD$.

4. $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$.

5. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

6. Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

7. AB chứa đường phân giác của góc $\widehat{CHD}$.

8. $\widehat{CAD}=\widehat{BHD}$.

9. OE kéo dài cắt AB tại K thì KC, KD là tiếp tuyến của (O).

10. AE cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là F (F khác với A). Khi đó $BF // CD$.

11. Tia CH cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là P (khác C) thì $DP // AB$.

12. Đường thẳng qua E song song với BD cắt AB tại N. Khi đó $CN \perp OB$.

13. Vẽ đường kính AQ, các đường thẳng QC, QD cắt đường thẳng MO lần lượt tại X, Y thì O là trung điểm của XY.

14. Đường thẳng qua trung điểm E của CD song song với AD cắt AB tại F, DF cắt AM tại N_1, thì N_1 là trung điểm AM.

15. Qua M dựng cát tuyến thứ 2 của (O) là MC_1D_1. Chứng minh: CD_1, C_1D cắt nhau tại 1 điểm nằm trên AB.

16. Giả sử MC cắt AB tại K. Gọi L là trung điểm MK ta có các hệ thức sau tương đương nhau:

$\frac{KC}{KD} = \frac{MC}{MD}$ (*); $LM^2 = LK^2 = LC.LD$ (Hệ thức Niu tơn) (**); $ME.MK = MC.MD$ (hệ thức Maclaurin) (***).

17. Kẻ đường kính CC' của (O), đường thẳng đi qua trung điểm của BD song song với BC' cắt $C'D$ tại J' thì J' nằm trên một đường tròn có bán kính không đổi.

18. Giả sử M cố định, chứng minh: khi cát tuyến MCD thay đổi, trọng tâm G của tam giác BCD thuộc một đường tròn cố định.

19. Giả sử M cố đinh, chứng minh: Tia BO cắt O tại giao điểm thức 2 là L (L khác B).

Đường thẳng ML cắt (O) tại điểm thứ 2 là T (khác L). Chứng minh rằng: đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

20. Giả sử M thuộc đường thẳng cố định (d). MO cắt AB tại H. Chứng minh: H thuộc đường tròn c định.

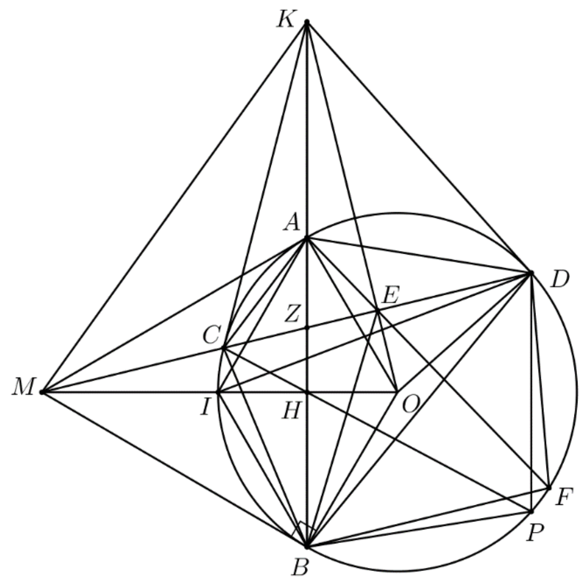
21. Giả sử M cố định nằm ngoài (O) cát tuyến MCD thay đổi quanh điểm M. Đường thẳng BE cắt đường tròn (O) tại giao điểm thức 2 là B_1 (khác B). Tìm vị trí cát tuyến MCD để diện tích tam giác MB_1D lớn nhất.

22. Giả sử M thay đổi ở ngoài (O). Đường thẳng qua O vuông góc với MO cắt các tia MA, MB tại S, W. Khi nào thì diện tích tam giác MSW nhỏ nhất.

23. Giả sử $MO = 2R$, cát tuyến MCD thay đổi quanh Tìm vị trí của cát tuyến để $EA + EB + EM$ lớn nhất.

24. Giả sử $MO = 2R$, cát tuyến MCD thay đổi quanh M. tìm vị trí của cát tuyến để $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ nhỏ nhất.

CHỨNG MINH CÁC BÀI TOÁN.



1. Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$, E là trung điểm của CD nên $OE \perp CD \Rightarrow \widehat{MEO} = 90^{\circ}$ (Tính chất đường kính đi qua trung điểm một dây cung). Từ đó suy ra 5 điểm M, A, O, E, B nằm trên đường tròn đường kính MO.

2. Vì tứ giác $MAEB$ nội tiếp và $MA = MB \Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MA} \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{BEM}$ (Góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau thì có số đo bằng nhau). Tứ đó suy ra ME là phân giác của góc $\widehat{AEB}$.

3. Vì MA là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAC} = \widehat{ADC}$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyền và dây cung). Xét hai tam giác MAC và MDA ta có: $\widehat{MAC} = \widehat{ADC}$, $\widehat{AMD}$ chung nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$

(g.g) suy ra $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC \cdot MD$.

4. Từ chứng minh $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) suy ra $\dfrac{CA}{AD} = \dfrac{MC}{MA}$ (1), chứng minh tương tự ta cũng

có: $\Delta MCB \backsim \Delta MBD \Rightarrow \dfrac{CB}{BD} = \dfrac{MC}{MB}$ (2), từ (1) và (2) chú ý rằng $MA = MB$ $\Rightarrow \dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MC}{MB}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{CA}{AD} = \dfrac{CB}{BD}$.

5. Do I nằm trên MO nên MI là phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ (3). Lại có MO là trung trực của AB và I nằm trên MO nên $IA = IB$ suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{IBA}$. Mặt khác ta cũng có $\widehat{MAI} = \widehat{IAB}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) từ đó suy ra $\widehat{MAI} = \widehat{IAB}$ hay chính là phân giác của góc $\widehat{MAB}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

6. Theo chứng minh ở 3) ta có $MA^2 = MC.MD$ (5), áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO, $AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $MH.MO = MC.MD$ hay $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$. Xét tam giác MCH, MOD ta có: $\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$ và $\widehat{OMD}$ chung nên

$\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (g.g) suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MDC}$ => tứ giác $CHOD$ nội tiếp (góc ngoài đỉnh H bằng góc trong đối diện đỉnh H).

7. Từ 6) ta có $\widehat{MHC} = \widehat{MDO}$ (7) mà $\widehat{MDO} = \widehat{OCD}$ (8) (do tam giác COD cân tại O). Mặt khác ta có $\widehat{OCD} = \widehat{OHD}$ (9) (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OD}$). Từ (7), (8), (9) suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{OHD}$. Các góc

$\widehat{CHA}, \widehat{DHA}$ phụ với các góc $\widehat{MHC}, \widehat{OHD}$ tương ứng nên suy ra $\widehat{CHA} = \widehat{DHA}$ hay AH là phân giác của góc $\widehat{CHD}$.

Chú ý: Từ việc chứng minh: AH là phân giác của $\widehat{CHD}$ nếu gọi ta có Z là giao điểm của AH và CD ta có: $\frac{HC}{HD} = \frac{ZC}{ZD}$ do đó $MH \perp ZH$ nên MH là phân giác ngoài của góc $\widehat{CHD}$ từ đó ta cũng có

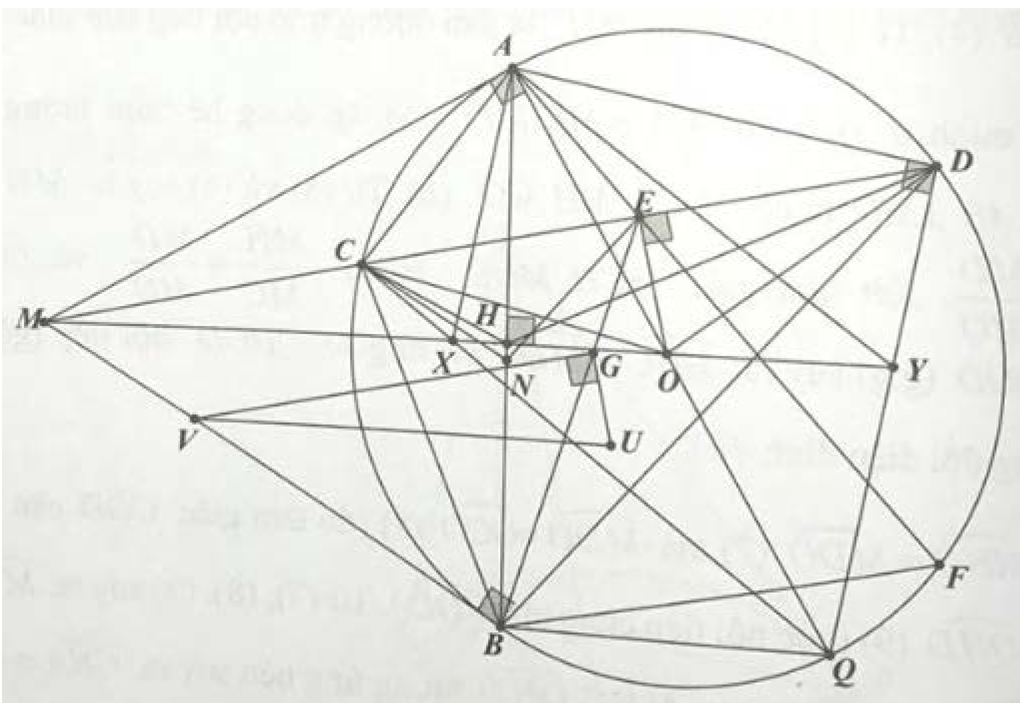
$\frac{HC}{HD} = \frac{MC}{MD}$ suy ra $\frac{MC}{MD} = \frac{ZC}{ZD} \Leftrightarrow \frac{MC}{MD} \cdot \frac{ZD}{ZC} = 1$ (đây là hệ thức rất hay gặp trong các

8. Ta có $\widehat{BHD} = 180^0 - \widehat{DHA} = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{CHD} = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{COD}$ (10) (Do AH là phân giác của góc $\widehat{CHD}$ và tứ giác $CHOD$ nội tiếp đã chứng minh ở trên). Mà $\frac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CBD}$ (11) (tính chất góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm chắn cùng một cung) và $\widehat{CBD} = 180^0 - \widehat{CAD}$ (12). Từ (10), (11) ,(12) suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{CAD}$.

Chú ý rằng: ΔACD và ΔHBD có $\widehat{BHD} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{ACD} = \widehat{HBD}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ nên $\Delta ACD \backsim \Delta HBD(g.g)$ suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{HDB}$. Từ đó cũng suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{CDB}$ ...

9. Giả sử tiếp tuyến tại C, D cắt nhau ở K thì $\widehat{KCO} = \widehat{KDO} = 90^0$ nên tứ giác $KCOD$ nội tiếp. Mặt khác theo 6) ta có tứ giác $CHOD$ nội tiếp. Từ đó suy ra 5 điểm K, C, H, O, D cùng nằm trên đường tròn đường kính KO suy ra $\widehat{KHO} = 90^0$, mặt khác ta cũng có $\widehat{AHO} = 90^0 \Rightarrow K, A, H$ thẳng hàng, hay K nằm trên đường thẳng AB.

10. Theo chứng minh ở 1) thì 4 điểm A, E, O, M nằm trên đường tròn đường kính MO nên ta có $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AFB}$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm). Mà hai góc $\widehat{AEM}, \widehat{AFB}$ đồng vị nên suy ra $EM // BF$.



11. Theo chứng minh ở 6) ta có tứ giác $CHOD$ nội tiếp kết hợp với 7) AH chứa đường phân giác của góc $\widehat{CHD}$ nên $\widehat{CHA} = \frac{1}{2}\widehat{CHD} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CPD}$ mà hai góc $\widehat{CHA}, \widehat{CPD}$ đồng vị nên $HA // DP$.

12. Để chứng minh: $CN \perp OB$ ta chứng minh $CN // MB$.

Thật vậy theo cách dựng điểm N ta có : $\widehat{CEN} = \widehat{CDB}$ (đồng vị). Mặt khác $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$ cùng chắn cung $\widehat{BC}$ suy ra $\widehat{CEN} = \widehat{CAB} \equiv \widehat{CAN} \Rightarrow$ tứ giác $CEAN$ nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp A, E cùng nhìn cạnh CN một góc bằng nhau). Từ đó suy ra $\widehat{ECN} = \widehat{EAN} \equiv \widehat{EAB}$ (13) mặt khác tứ giác $EAMB$ nội tiếp (chứng minh ở 1) nên $\widehat{EAB} = \widehat{EMB}$ (14). Từ $(13),(14)$ suy ra $\widehat{ECN} = \widehat{EMB}$ suy ra $CN // MB$ mà $MB \perp OB \Rightarrow CN \perp OB$.

13. Do AQ là đường kính của (O) nên $\widehat{ADQ}=90^0 \Rightarrow ADYH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{AYD}=\widehat{AHD}$. Mặt khác theo 6,7) ta có $CHOD$ nội tiếp và AH là phân giác của góc $\widehat{CHD}$ suy ra $\widehat{AHD}=\frac{1}{2}\widehat{CHD}=\frac{1}{2}\widehat{COD}=\widehat{CQD} \Rightarrow \widehat{AYD}=\widehat{CQD}$ suy ra $AY//CQ$. Xét hai tam giác AOY, QOX ta có: $OA=OQ, \widehat{AOY}=\widehat{QOX}, \widehat{YAO}=\widehat{XQO}$ nên $\Delta AOY=\Delta QOX\,(g.c.g)$ suy ra $OX=OY$.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh theo cách khác như sau: Tứ giác $AEOM$ nội tiếp nên :

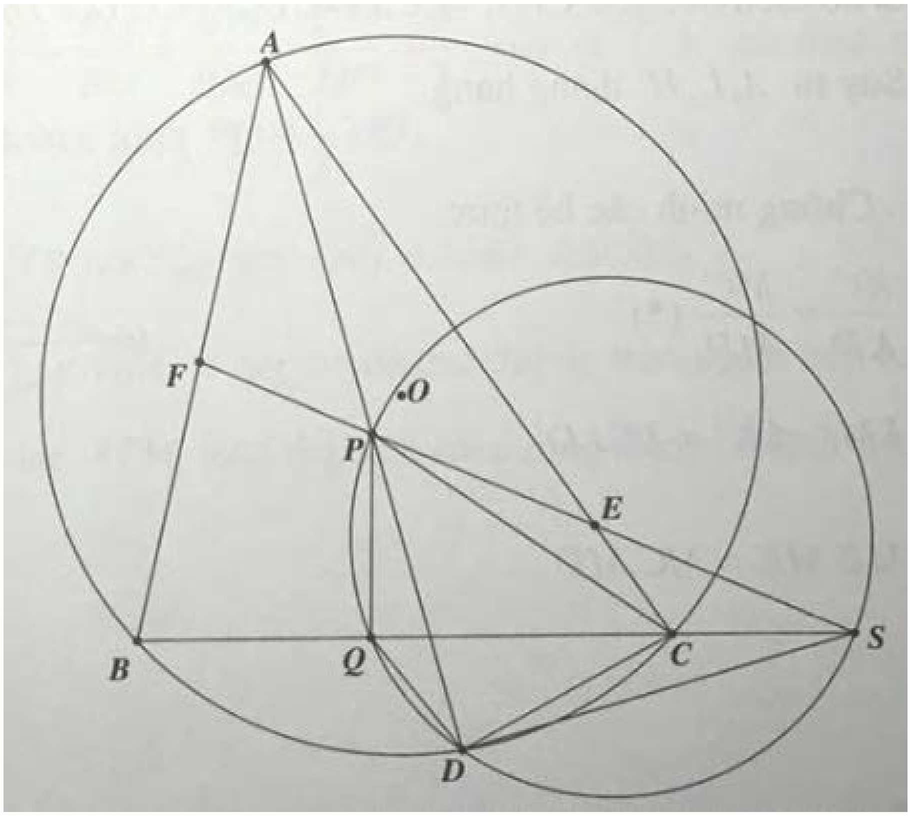
$\widehat{AEC}\equiv\widehat{AEM}=\widehat{AOM}=\widehat{QOY}, \widehat{YQO}=\widehat{DQA}=\widehat{DCA}\equiv\widehat{ECA}$ nên $\Delta OYQ \backsim \Delta EAC \Rightarrow \frac{QY}{QO}=\frac{CA}{CE}$ hay

$\frac{QY}{\frac{1}{2}QA}=\frac{CA}{\frac{1}{2}CD} \Leftrightarrow \frac{QY}{QA}=\frac{CA}{CD} \Rightarrow \Delta QYA \backsim \Delta CAD(c.g.c)$ nên $\widehat{YAQ}=\widehat{ADC}=\widehat{ECA}=\widehat{AQC}$

$\Rightarrow AY//QX$ nên tứ giác $AXQY$ là hình bình hành suy ra $OX=OY$.

Tính chất này là 1 trường hợp đặc biệt của bài toán:

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) và điểm P nằm trong tam giác, đường thẳng AP cắt BC, (O) lần lượt tại Q, D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQD cắt S, SO cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Khi đó ta có: $\frac{PE}{PF}=\frac{QE}{QF}$.



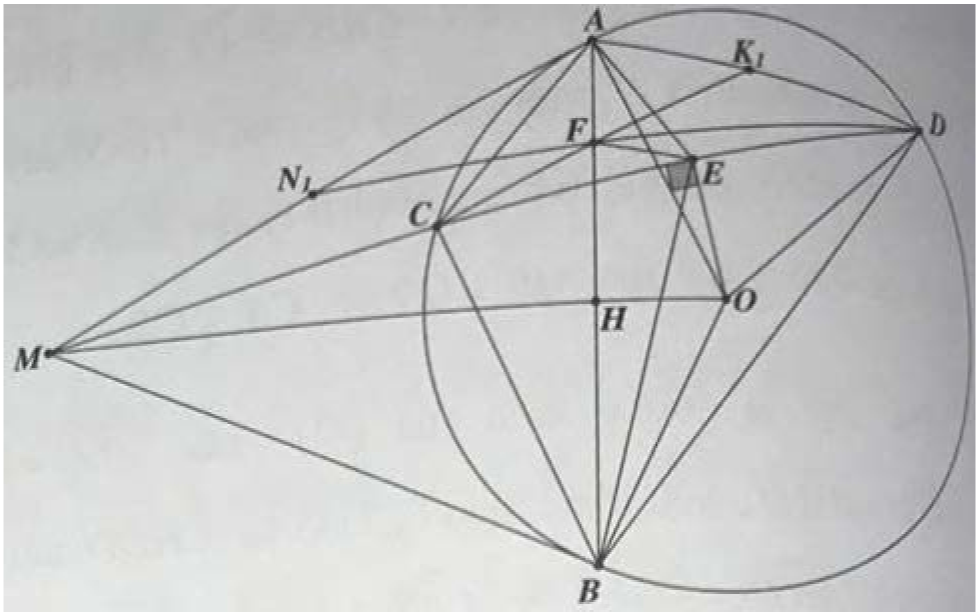
Ta có thể chứng minh bài toán này như sau:

Ta có: $\widehat{DQC} = \widehat{DPS} = \widehat{APF}$ và $\widehat{PAF} = \widehat{QCD}$ nên $\Delta QCD \backsim \Delta PAF$

Tương tự ta cũng có: $\Delta QBD \backsim \Delta PAE$

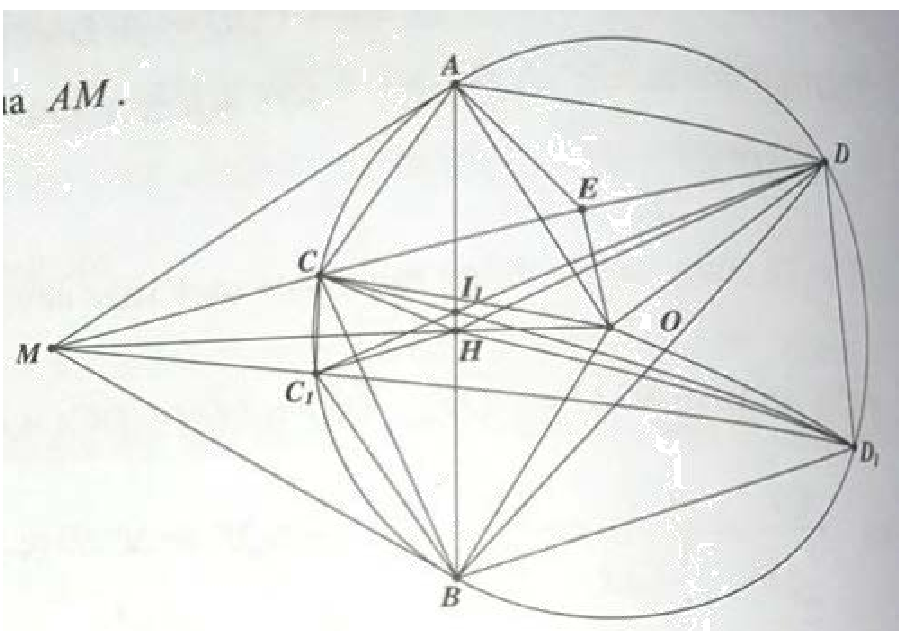
Nên $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{AP}.\frac{AP}{PF} = \frac{QD}{QB}.\frac{QC}{QD} = \frac{QC}{QB}$đpcm. Khi $P \equiv Q$ ta có bài toán ở trên.

14. Đường thẳng qua trung điểm E của CD song song với AD cắt AB tại F, DF cắt AM tại N_1 thì N_1 là trung điểm AM.



Ta có biến đổi góc: $\widehat{FEC}=\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$ Suy ra $EFCB$ nội tiếp. Giả sử CF cắt AD tại K_1 thì EF là đường trung bình của tam giác CDK_1 hay F là trung điểm của CK_1. Theo bổ đề hình thang ta suy ra N_1 là trung điểm của AM .

15. Ta có $CHOD$ là tứ giác nội tiếp, và AH là phân giác của góc $\widehat{CHD}$. Tương tự cũng có: C_1HOD_1 cũng là tứ giác nội tiếp và HB là phân giác của góc $\widehat{C_1HD_1}$.



Ta có: $\widehat{CI_1C_1}=\dfrac{1}{2}$ sđ$\left(\widehat{CC_1}+\widehat{DD_1}\right)\widehat{CHC_1}=\widehat{CHM}+\widehat{MHC_1}=\widehat{ODC}+\widehat{OD_1C_1}$

$=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{COD}+180^0-\widehat{C_1OD_1}\right)=\frac{1}{2}\left(360^0-sd\overset{\frown}{CD}-sd\overset{\frown}{C_1D_1}\right)=\frac{1}{2}sd\left(\overset{\frown}{CC_1}+\overset{\frown}{DD_1}\right)$

hay $\widehat{CI_1C_1}=\widehat{CHC_1}$ tức là tứ giác CI_1HC_1 nội tiếp, tương tự ta cũng có DD_1HI_1 nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc $\widehat{CHI_1}=\widehat{CC_1D}=\widehat{CD_1D}=\widehat{CC_1D}=\widehat{DHI_1}$ hay I_1H cũng là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Suy ra A, I_1, H thẳng hàng.

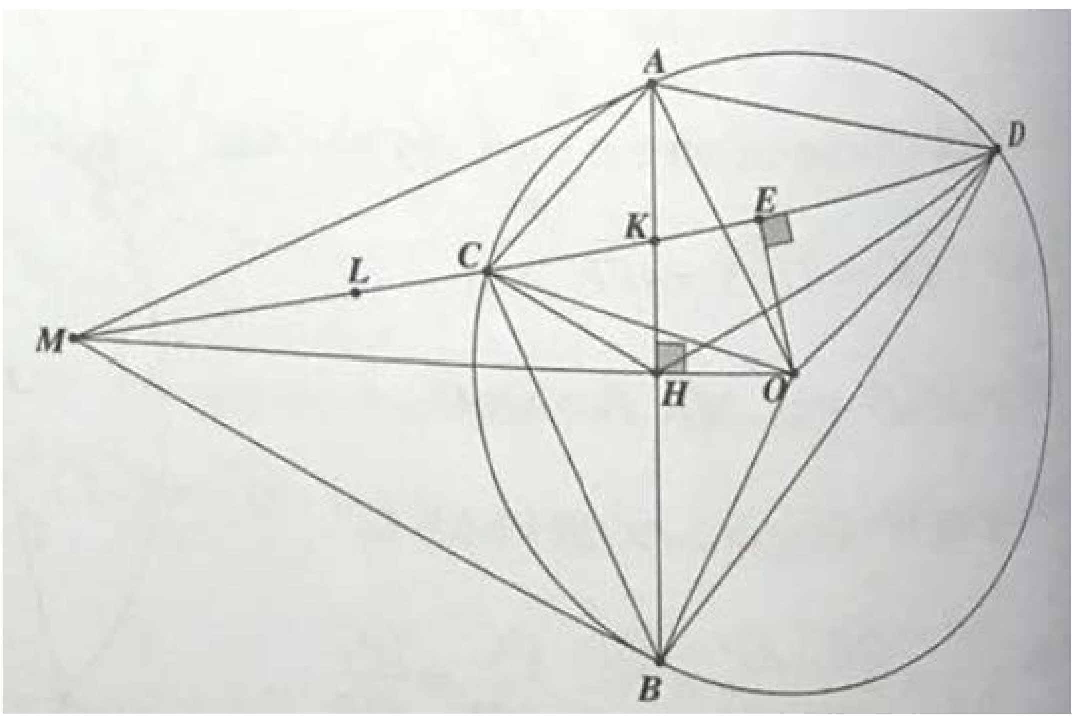
16. Chứng minh các hệ thức:

+ $\frac{KC}{KD}=\frac{MC}{MD}(*)$

+ $LM^2=LK^2=LC.LD$

+ $ME.MK=MC.MD$

Giải:



+ Trước tiên ta chứng minh các hệ thức trên tương đương với nhau:

Thật vậy ta có: $LM^2=LC.LD\Leftrightarrow LM^2=(MC-ML)(MD-ML)\Leftrightarrow$

$LM^2=MC.MD-ML(MC+MD)+ML^2\Leftrightarrow MC.MD=ML(MC+MD)$

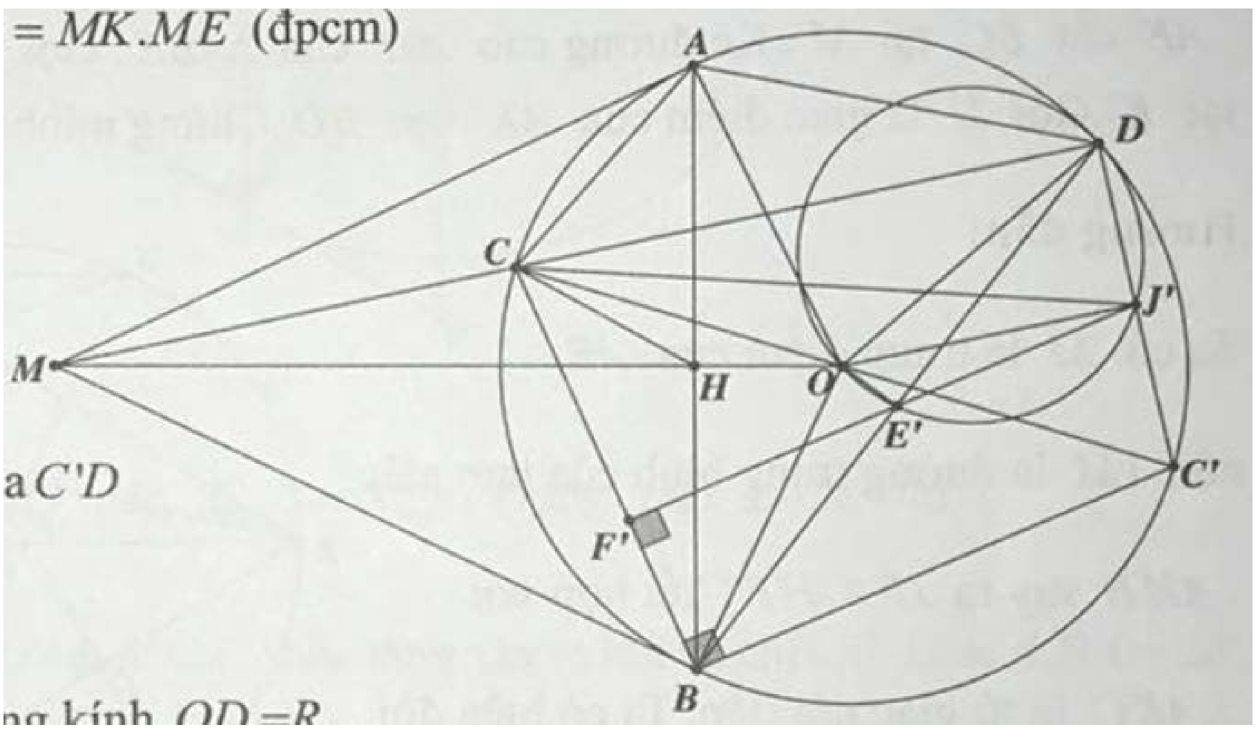
$\Leftrightarrow MC.MD = \dfrac{MK}{2}\left(MC + MD\right) = \dfrac{MK}{2}.2ME = MK.ME$ như vậy $(**)$ và $(***)$ tương đương nhau.

+ Ta cũng có:

$\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{MC}{MD} \Leftrightarrow MD.KC = MC.KD \Leftrightarrow MD\left(MK - MC\right) = MC\left(MD - MK\right) \Leftrightarrow 2MC.MD = MK\left(MC + MD\right)$
$2MC.MD = MK.2ME \Leftrightarrow MC.MD = MK.ME$ vậy $(*)$ và $(***)$ tương đương nhau.

Bây giờ ta chứng minh $(***)$. Gọi H là giao điểm của AB, MO thì $CHOD$ và $KHOE$ là các tứ giác nội tiếp nên $MC.MD = MH.MO = MK.ME$ (đpcm)

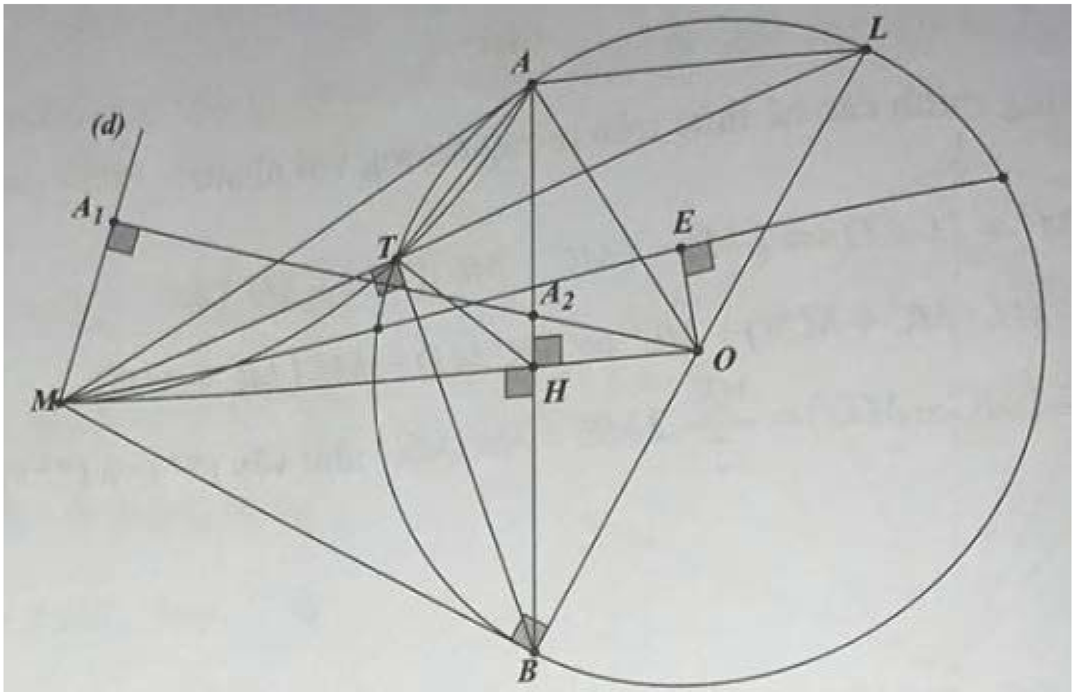
17. Gọi E' là trung điểm của BD, Do $E'J'$ song song với BC' nên $E'J'$ là đường trung bình của DBC' dẫn tới J' là trung điểm của $C'D$ suy ra $\widehat{OJ'D} = 90^0$ nên 4 điểm $OE'J'D$ nằm trên đường tròn đường kính $OD = R$.



18. Qua G kẻ các đường thẳng song song với EO, MD cắt OB, MB lần lượt là U, V.

Ta có các điểm B, O, M cố định và $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BU}{BO} = \dfrac{BV}{BM} = \dfrac{UV}{MO} = \dfrac{2}{3}$, suy ra U, V cố định và $\widehat{UGV} = 90^0$. Suy ra G thuộc đường tròn đường kính $PQ = \dfrac{2}{3}MO$.

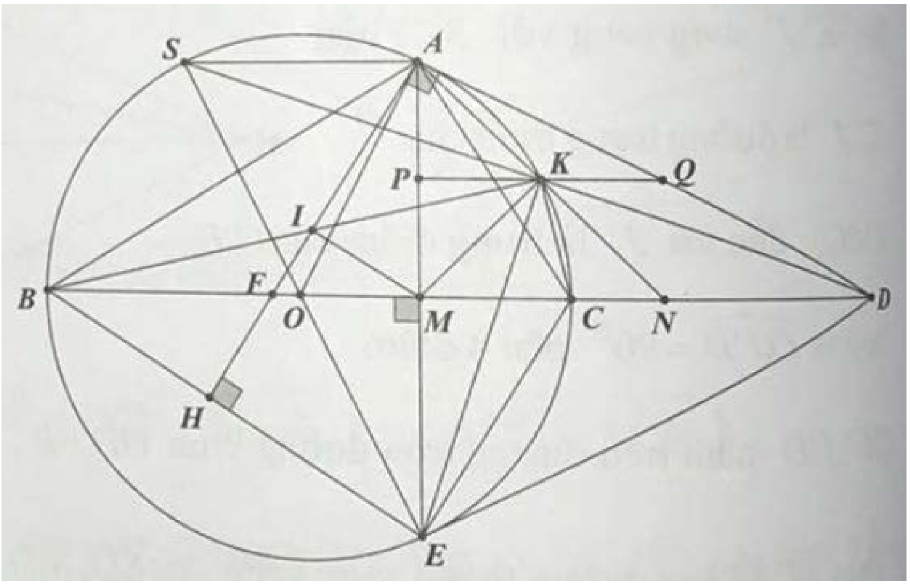
19. Do $\widehat{MTB}=\widehat{MHB}=90^0$ nên tứ giác $MTHB$ nội tiếp nên $\widehat{TBH}=\widehat{TMH}$ mặt khác $\widehat{TBH}\equiv\widehat{TBA}=\widehat{TAM}$ suy ra $\widehat{TMH}=\widehat{TAM}$ hay HM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ATM luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định MO.



Một bài toán tương tự của tính chất này.

Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. Một điểm A di chuyển trên (O) sao cho $AB>AC$.Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC, AE cắt BC tại M. Kẻ đường cao AH của ΔABE. Gọi I là trung điểm của AH, BI cắt (O) tại K. Gọi N là giao điểm của AK và BD. Chứng minh: N là trung điểm MD.

Hướng dẫn:



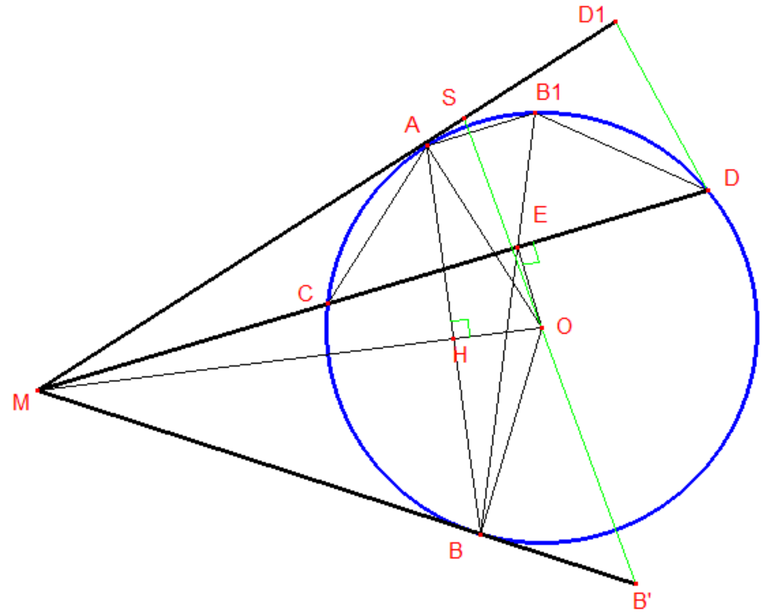
Ta có M là trung điểm của AE nên IM là đường trung bình của tam giác AHE suy ra $IF//HE$, kết hợp với $BAKC$ là tứ giác nội tiếp. Ta có biến đổi góc: $\widehat{AMI}=\widehat{AEB}=\widehat{ACB}=\widehat{AKI}$ suy ra tứ giác $AIFK$ nội tiếp. Chú ý rằng: $IM\perp AH$ (do $AH\perp BE$) nên tứ giác $AIMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM. Gọi S là giao điểm của DK với (O). Ta có $\widehat{KMD}=\widehat{KAE}$ (cùng phụ với $\widehat{KMA}$) mà $\widehat{KAE}=\widehat{KED}\Rightarrow\widehat{KMD}=\widehat{KED}$ hay $KMED$ nội tiếp. Dẫn đến $\widehat{KDM}=\widehat{KEM}=\widehat{KEA}=\widehat{KSA}$ suy ra $AS//BD$. Ta có: $\widehat{KDN}=\widehat{KSA}=\widehat{KAD}$. Suy ra $\Delta KND\backsim\Delta DNA\Rightarrow NK.NA=ND^2$.Trong tam giác vuông NMA ta có : $MN^2=NK.NA$ từ đó suy ra $MN=ND$.

20. Dựng $OA_1\perp(d)$, do (d), O cố định nên OA_1 không đổi, giả sử OA_1 cắt AB tại A_2.

Ta có $\Delta MA_1O\backsim\Delta A_2HO\Rightarrow\dfrac{OA_1}{OH}=\dfrac{OM}{OA_2}\Leftrightarrow OA_1.OA_2=OH.OM$.

Trong tam giác vuông MOA ta cũng có: $OH.OM=OA^2=R^2$ suy ra $OA_1.OA_2=R^2\Rightarrow OA_2=\dfrac{R^2}{OA_1}$ không đổi, suy ra A_2 cố định.

Mặt khác $\widehat{A_2HO}=90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính OA_2



21. Theo tính chất ở 10) ta có $AB_1 // CD$ nên $S_{MB_1D} = S_{MAD}$.

Dựng $DD_1 \perp$ AM thì $S_{MAD} = \frac{1}{2}DD_1.MA \le \frac{1}{2}DA.MA \le \frac{1}{2}.2R.MA \le R.MA$

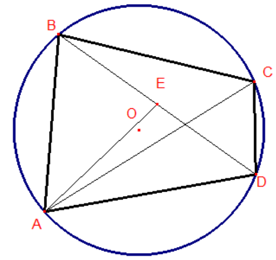
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $D_1 \equiv A,\ DA = 2R$. Hay D đối xứng A qua O. Từ đó xác định được vị trí cát tuyến MCD như sau: Dựng đường kính AD, nối MD ta được cát tuyến MCD cần tìm.

22. Ta có: $S_{\Delta MWS} = S_{\Delta MOS} = OA.MS = OA(MA + AS)$. Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ ta có $MA + AS \ge 2\sqrt{MA.AS}$. Mặt khác theo hệ thức lượng trong tam giác vuông MOS ta có $MA.AS = OA = R^2$ suy ra $MA + AS \ge 2R$. Do đó $S_{\Delta MWS} \ge 2R^2$. Dấu bằng xảy ra khi $MA = AS \Leftrightarrow \Delta MOS$ vuông cân tại O hay $MO = 2R$.

Để giải các câu hỏi 19, 20 ta cần biết bài toán nổi tiếng sau:

ĐỊnh lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Chứng minh



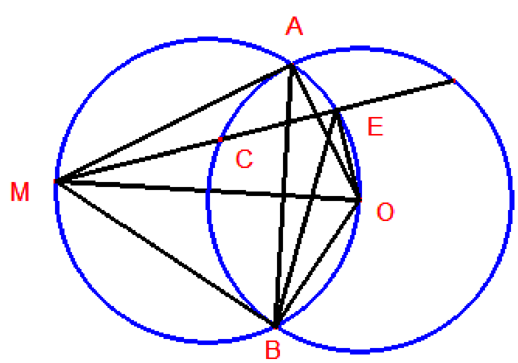
Trên đường chéo BD lấy điểm D sao cho $\widehat{DAE}=\widehat{BAC}$ ta có $\widehat{DAE}=\widehat{BAC}$ và $\widehat{DAE}=\widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) nên $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{\text{AD}}{\text{AC}}=\frac{\text{DE}}{\text{BC}} \Rightarrow \text{AD.BC}=\text{AC.DE}(1)$. Do $\widehat{DAE}=\widehat{BAC}$ nên $\widehat{DAC}=\widehat{EAB}$, lại có $\widehat{ABE}=\widehat{ACD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \Delta\text{ABE} \backsim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD=AC.BE(2)$

Từ (1) và (2) ta có $AB.CD+AD.BC=AC(BE+DE)=AC.BD$

23. Khi $MO=2R \Leftrightarrow MO=2OA \Rightarrow \widehat{AMO}=30^0 \Rightarrow \widehat{AMB}=60^0$, ΔMAB nên $MA=MB=AB$

Mặt khác tứ giác $MEOB$ nội tiếp (chứng minh ở định lý (1)). Áp dụng định lý Potolemy cho tứ giác $MEOB$ ta có $EA.MB+EB.MA=EM.AB$. Mà $MA=MB=AB$ suy ra $EA+EB=EM$. Do đó $EA+EB+EM=2EM$. Vì vậy tổng $EA+EB+EM$ lớn nhất khi và chỉ khi EM lớn nhất, hoặc $EM \le MO=2R \Leftrightarrow M \equiv O$. Nói cách khác cát tuyến MCD đi qua O



24. Với mọi số thực dương x,y ta có $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}}=4$. Nên ta suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$. Áp dụng vào bài toán ta có $\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC} \ge \frac{4}{EB+EC}=\frac{4}{EM}$. Do $EM \le MO=2R$

nên ta suy ra $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}\geq\frac{4}{2R}=2R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $E\equiv O$. Nói cách khác cát tuyến MCD đi qua O

CHƯƠNG V: THẲNG HÀNG, ĐIỂM ĐỒNG QUY, ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

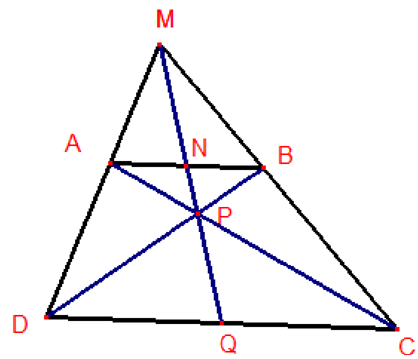
THẲNG HÀNG, ĐỒNG QUY

Những điểm đặc biệt

1. Bổ đề hình thang

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD khi đó trung điểm của hai đáy và giao điểm của hai cạnh bên nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh



Giả sử các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại M AC, BD cắt nhau tại P, đường thẳng MP cắt AB, CD tại N, Q. Ta chứng minh N, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD

Thật vậy: do $AB//CD$, theo định lý thales ta có $\frac{AN}{QD} = \frac{NB}{QC}(1)$, $\frac{AN}{QC} = \frac{NB}{QD}(2)$.

Lấy (1) nhân với (2) ta có $\frac{AN^2}{QC.QD} = \frac{NB^2}{QC.QD} \Rightarrow AN = NB$ thay vào (1) ta có $QD = QC >$ Hay N, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ví dụ 1

Cho ta giác nhọn ABC đường cao AH phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tạ O. Qua O dựng các đường thẳng OM vuông góc với AB và ON vuông góc với AC.

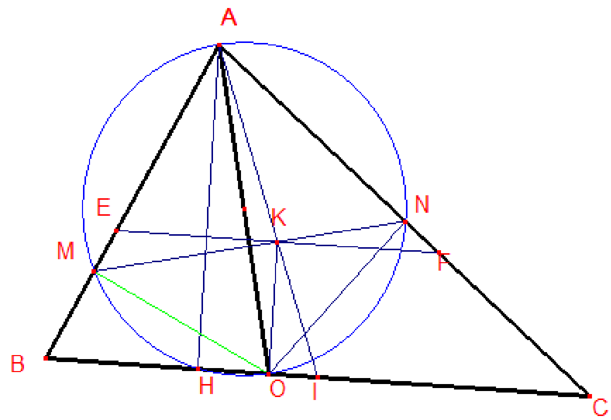
a) Chứng minh 5 điểm A, M, H, O, N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh AH là phân giác góc $\widehat{MHN}$.

c) Đường thẳng đi qua O vuông góc với BC cắt MN tạ K. Chứng minh $KN.AC = KM.AB$.

d) Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh A, K, I thẳng hàng.

Giải



Do $AO \perp MN$ nên ta có $\widehat{ONK} = \widehat{NAO}$ (cùng phụ với $\widehat{NOA}$), ta cũng có $\widehat{ONK} = 90^0 - \widehat{NOC} = \widehat{OCA}$

Từ đó suy ra $\Delta OKN \backsim \Delta COA$ (g-g) dẫn đến $\frac{KN}{OA} = \frac{ON}{CA}$, tương tự ta cũng có $\frac{KM}{OA} = \frac{OM}{CA}$.

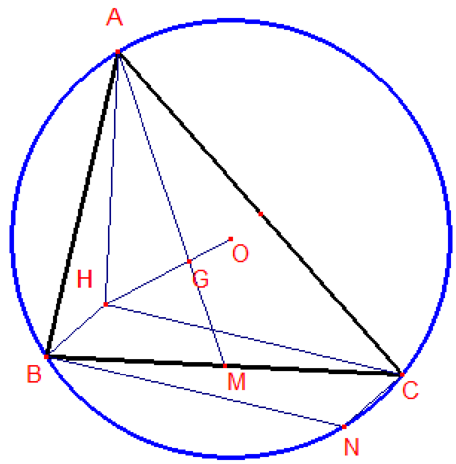
Do $OM = ON$ suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{AC}{AB}$ hay $KM.AB = KN.AC$

Dựng đường thẳng qua K song song BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F ta dễ dàng chứng minh được: $KEMO, KNFO$ nội tiếp, kết hợp $\widehat{ONK} = \widehat{OMK}$ ta có biến đổi gọc $\widehat{OEK} = \widehat{OMK} = \widehat{ONK} = \widehat{OFK}$ suy ra tam giác OEF cân tại O, dẫn tới $KE = KF$ theo bổ đề hình thang suy ra A, K, I thẳng hàng.

2. Đường thẳng ơle

Trong một tam giác: Trực tâm *H*, trọng tâm *G*, tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng ơle của tam giác đồng thời $HO = 3GO$

Chứng minh



Dựng đường kinh *AN* của *(O).* Vì AN là đường kính của *(O)* nên $NC \perp AC$, do $BH \perp AC \Rightarrow BH // NC$

Chứng minh tương tự ta có: $CH // NB$ nên tứ giác $BNCH$ là hình bình hành, suy ra hai đường chéo *NH, BC* cắt nhau tại trung điểm *M* của mỗi đường nên *N, H, M* thẳng hàng .

Ta có *MO* là đường trung bình của tam giác *AHN* nên $MO // AH, MO = \frac{1}{2}AH$. Gọi *G* là giao điểm của *AM* và *HO*, do *MO//AH* (cùng vuông góc với *BC*) . Theo định lý thales ta có: $\frac{AG}{AH} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}$ suy ra *G* là trọng tâm tam giác *ABC* và *G, H, O* thẳng hàng . Do $\frac{GO}{GH} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO$. (đường thẳng đi qua *G, H, O* gọi là đường thẳng Ơle của tam giác *ABC.*

3. Đường thẳng Simson, đường tẳng Steiner

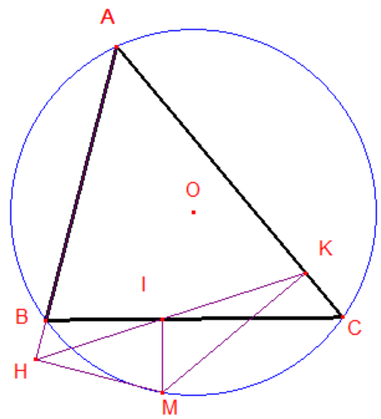
Đường thẳng Simson: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, BC, CA . Chứng minh ba điểm *H, I, K* thẳng hàng

Chứng minh

Tứ giác $MIBH$ có $\widehat{BHM} + \widehat{BIM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MIH} = \widehat{MBH}$ (cùng chắn cung HM) , mà tứ giác $ABMC$ nên $\widehat{MBH} = \widehat{KCM}$, do đó $\widehat{MIH} = \widehat{KCM}$. Mặt khác tứ giác $KCMI$ (vì $\widehat{MIC} = \widehat{MKC} = 90^0$)

Nên $\widehat{MIK} + \widehat{KCM} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MIH} + \widehat{MIK} = 180^0 \Rightarrow \widehat{HIK} = 180^0$. Vậy H, I, K thẳng hàng.

Đường thẳng H, I, K được gọi là đường thẳng Simson qua điểm M.



Chú ý: Ta có bài toán đảo về bài toán Simson như sau: cho tam giác ABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của điểm M trên ba cạnh của tam giác ABC là ba điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ví dụ 1

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại A của (O) cắt CB tại K, kẻ tiếp tuyến KD với (O). Gọi E, G, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, BC, CA.

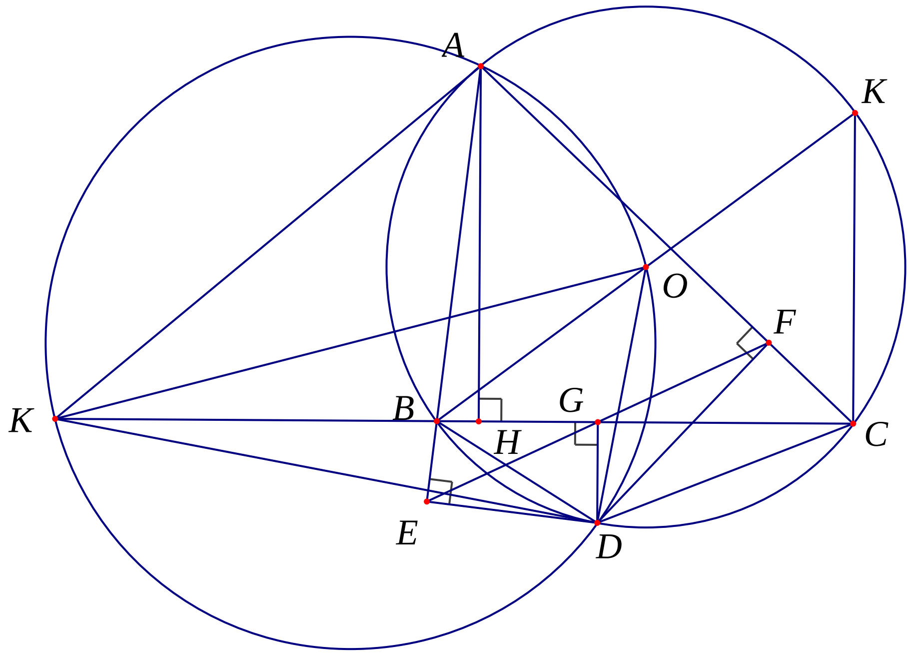
a) Chứng minh: $KA^2 = KB.KC$.

b) Chứng minh: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$

c) Chứng minh: $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

d) Chứng minh: G là trung điểm của EF.

Giải:



a) Học sinh tự chứng minh.

b) Từ chứng minh câu a ta suy ra:

$\Delta KBA \backsim \Delta KAC$ suy ra $\dfrac{KA}{KC}=\dfrac{AB}{AC}$,

Tương tự $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{BD}{BC}$ mà $KA=KB$ suy ra $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$.

c) Kẻ đường kính BK của (O) ta có: $\widehat{BCK}=90^0$, lại có $\widehat{BAC}=\widehat{BKC}$, suy ra

$\sin\widehat{BAC}=\sin\widehat{BKC}=\dfrac{BC}{BK}\Leftrightarrow BC=BK.\sin\widehat{BAC}$, hay $BC=2R\sin A.$

d) Áp dụng câu c ta có: Tứ giác $BGDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $GE=BD.\sin\widehat{GDE}=BD.\sin\widehat{ABC}$, tương tự ta cũng có: $GF=CD.\sin\widehat{FCG}=CD.\sin\widehat{ACB}$

Từ đó suy ra $\dfrac{GE}{GF}=\dfrac{BD.\sin\widehat{ABC}}{CD.\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AB.\sin\widehat{ABC}}{AC.\sin\widehat{ACB}}$, dựng đường cao AH của tam giác ABC thì ta có: $\dfrac{GE}{GF}=\dfrac{BD.\sin\widehat{ABC}}{CD.\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AB.\sin\widehat{ABC}}{AC.\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AH}{AH}=1$ suy ra $GE=GF$. Mặt khác từ các tứ giác $BGDE,CFGD,ABCD$ nội tiếp ta có biến đổi góc: $\widehat{EGD}=\widehat{EBD}=\widehat{ACD}=180^0-\widehat{DGF}$

$\Rightarrow\widehat{EGD}+\widehat{DGF}=180^0$ hay E,G,F thẳng hàng. Nói cách khác G là trung điểm của EF .

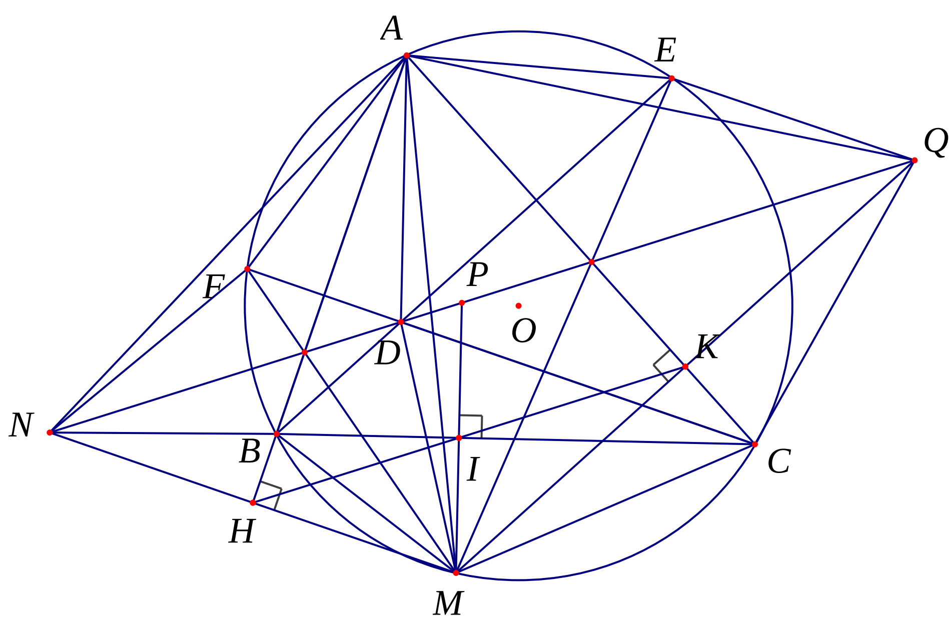
(Đường thẳng qua E,G,F chính là đường thẳng Simson của D với tam giác ABC

Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn. Gọi N,P,Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB,BC,CA. Chứng minh rằng N,P,Q thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi H,I,K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB,BC,CA; thế thì H,I,K thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy IH là đường trung bình của tam giác MNP nên $IH//NP$. Tương tự $IK//PQ$. Theo tiên đề Ơ-clit và do H,I,K thẳng hàng nên suy ra N,P,Q thẳng hàng. Đường thẳng đi qua N,P,Q được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.



Chú ý:

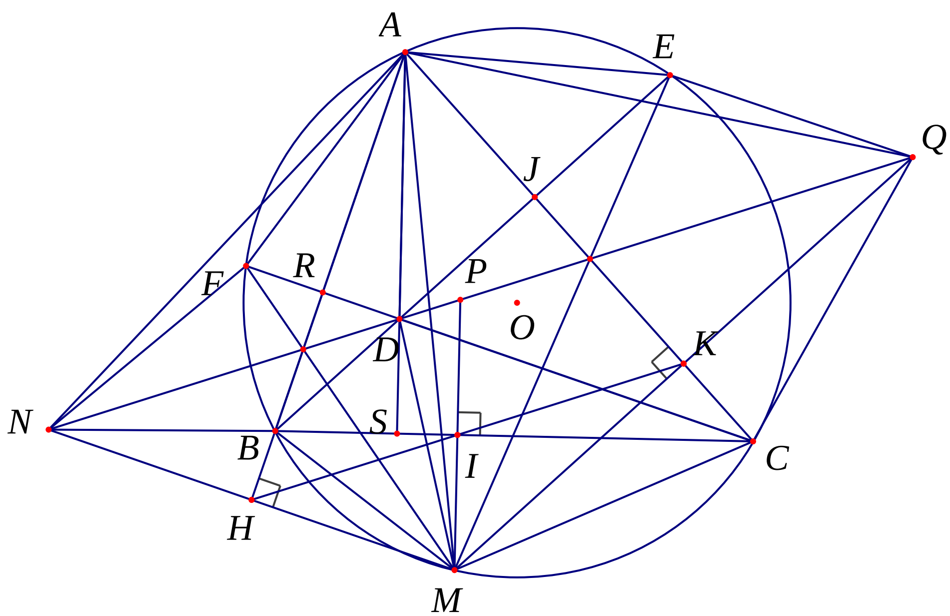
a) Ta có thể chứng minh ba điểm N,P,Q thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự: Các điểm N,P,Q lần lượt là ảnh của H,I,K trong phép vị tự tâm M tỉ số 2, mà H,I,K thẳng hàng nên N,P,Q cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm M tỉ số 2.

Ngoài ra liên quan đến đường thẳng Simson, Steiner ta cũng có kết quả sau:

"Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm tam giác ABC".

Thật vậy, gọi D là trực tâm của tam giác $ABC; BD,CD$ cắt (O) lần lượt ở E,F. Dễ dàng chứng minh được E đối xứng với D qua AC,F đối xứng với D qua AB. Ta có $FDMN$ là hình thang cân và các tứ giác $IBHM,MBFC$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{DFM}=\widehat{DNM}=\widehat{MBC}=\widehat{IHM}$ do đó $ND//IK$ mà H,I,K thẳng hàng nên N,P,Q thẳng hàng. Nói cách khác: Đường thẳng Steiner của điểm M đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Cách khác:



Gọi AS, BJ, CR là các đường cao của tam giác ABC, D là trực tâm. Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng). Lại có $\widehat{AMB} = \widehat{ADJ}$ (cùng bù với $\widehat{SDJ}$).

Suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{ADJ}$ nên $ADBN$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{NAB} = \widehat{NDB}$. Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{NDB} = \widehat{MAB}.$

Chứng minh tương tự $\widehat{CDQ} = \widehat{CAM}$. Ta có $\widehat{NDB} + \widehat{CDQ} = \widehat{MAB} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{NDQ} = \widehat{NDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDQ} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^0$. Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Ví dụ 1

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có trực tâm là điểm H. Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC , gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác ODE cắt AD tại G . Gọi J là giao điểm thức 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO với AH .

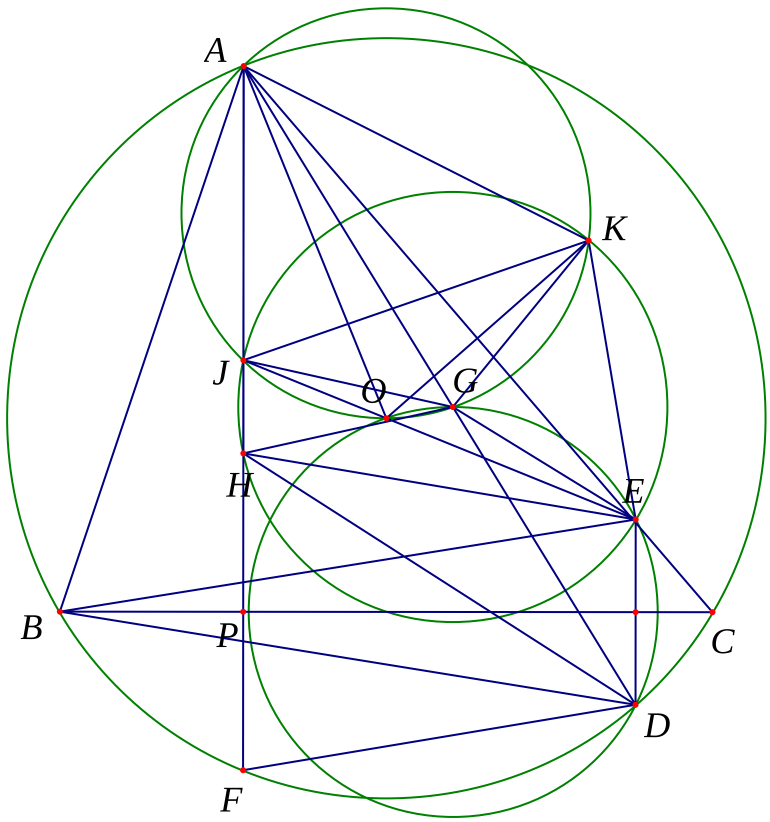
Chứng minh:

a) J, O, E thẳng hàng

b) Chứng minh: G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.

c) Chứng minh: Trực tâm tam giác AGO nằm trên đường thẳng HE.

Giải



a) Ta có: $\widehat{GOE} = \widehat{GDE} = \widehat{GAJ} = 180^0 - \widehat{GOJ}$

Suy ra $\widehat{GOE} + \widehat{GOJ} = 180^0$ hay J, O, E thẳng hàng.

b) Từ các tứ giác $AJOG, ODEG$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$\widehat{GJO} = \widehat{GAO} = \widehat{GDO} = \widehat{GEO}$

Suy ra tam giác GJE cân tại G.

Gọi F là giao điểm thức 2 của AH với (O) thì F đối xứng với H qua BC nên tứ giác $HEDF$ là hình thang cân. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO tại giao điểm thứ 2 là K. Suy ra $\widehat{JGE} = \widehat{AOD} = 2.\widehat{ABD} = 2.\widehat{AFD} = 2\left(180^0 - \widehat{JHE}\right) = 2.\widehat{JKE}$

Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.

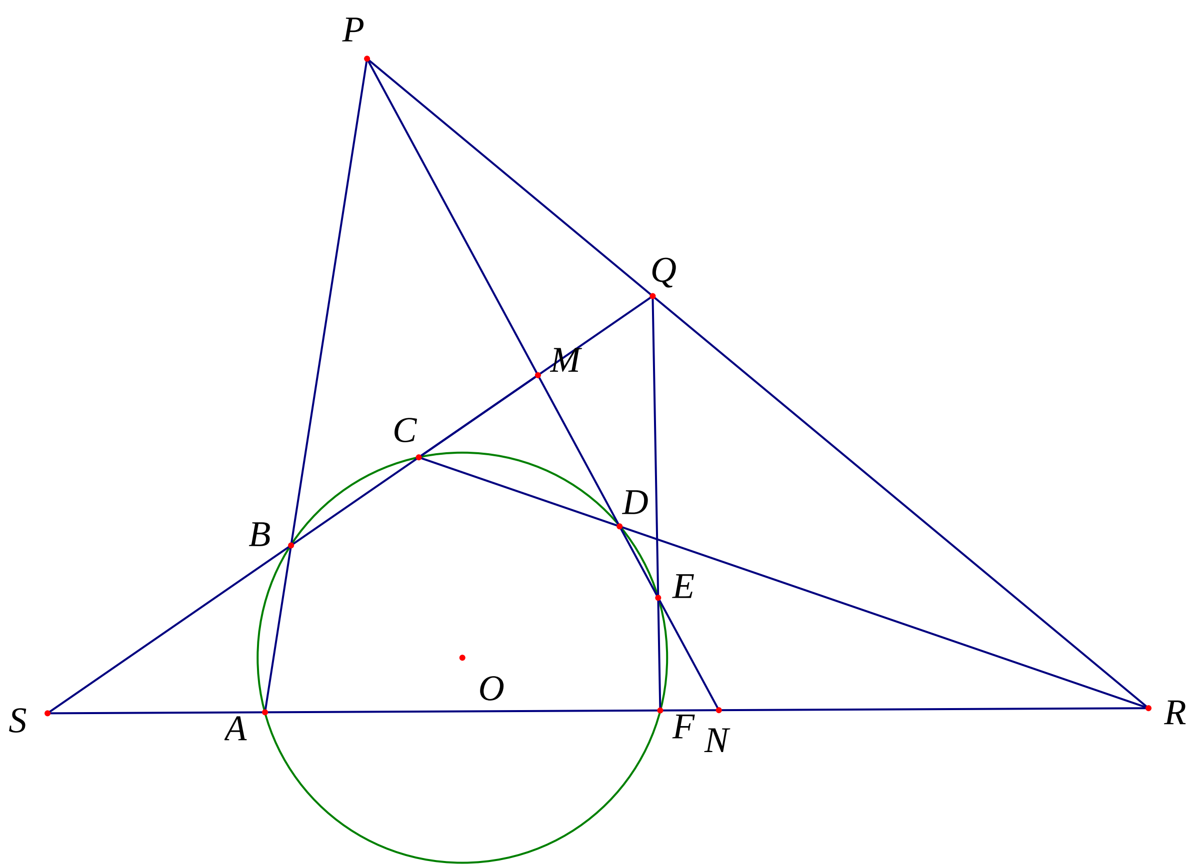
c) Ta có: $\widehat{GOE} = \widehat{GDE} = \widehat{GAJ} = \widehat{GKJ} = \widehat{GJK} = \widehat{GOK}$ lại có $\widehat{GKO} = \widehat{GJO} = \widehat{GEO}$ suy ra $\Delta GOK = \Delta GOE$ hay OG là trung trực của KE hay E là điểm đối xứng với K qua OG. Do $GK = GJ$ và tứ giác $AJGK$ nội tiếp nên AG là phân giác của $\widehat{HAK}$ mà

$\widehat{GKA} = \widehat{GJH} = \widehat{GHJ}$ suy ra H, K đối xứng nhau qua AG. Suy ra HE là đường thẳng Steiner của K trong tam giác AGO. Theo tính chất vừa chứng minh thì HK đi qua trực tâm của tam giác AGO.

4. Đường thẳng Pascal

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F dùng thuộc một đường tròn (có thể hoán đổi thứ tự). Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$. Khi đó 3 điểm P, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Pascal.

Chứng minh:



Giả sử DE cắt BC tại M, cắt AF tại N, BC cắt AF tại S.

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến : ABP ta có:

$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{AN}{AS} \cdot \frac{BS}{BM} = 1$ hay $\frac{PM}{PN} = \frac{AS}{AN} \cdot \frac{BM}{BS} (1)$.

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔSMN

và cát tuyến : CDR ta có: $\frac{RN}{RS} \cdot \frac{CS}{CM} \cdot \frac{DM}{DN} = 1$ suy ra $\frac{RN}{RS} = \frac{CM}{CS} \cdot \frac{DN}{DM} (2)$.

Áp dụng định lí Menelaus cho ΔSMN

và cát tuyến : QEF ta có: $\frac{QM}{QS}\cdot\frac{FS}{FN}\cdot\frac{EN}{EM}=1$ suy ra $\frac{QS}{QM}=\frac{FS}{FN}\cdot\frac{EN}{EM}(3)$.

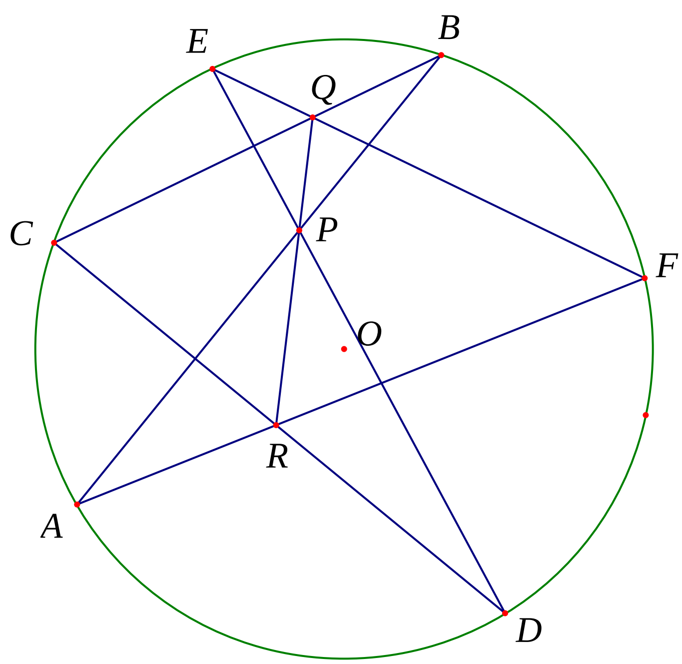
Mặt khác các tứ giác $ABCF, BCDE, AFED$ nội tiếp nên:

$SB.SC = SA.SF$; $MC.MB = MD.ME$; $NF.NA = ND.NE\,(4)$

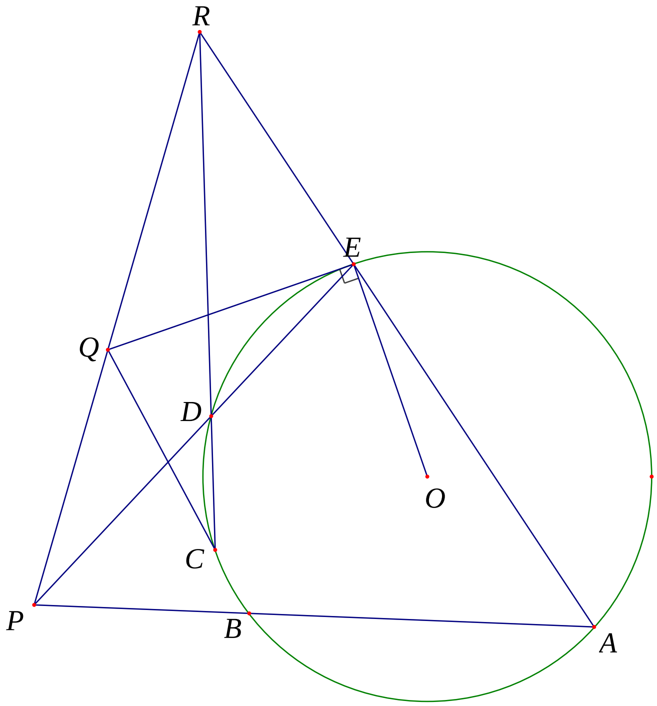
Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta suy ra $\frac{PM}{PN}\cdot\frac{RN}{RS}\cdot\frac{QS}{QM}=1$. Theo định lí đảo Menelaus ta suy ra P,Q,R thẳng hàng.

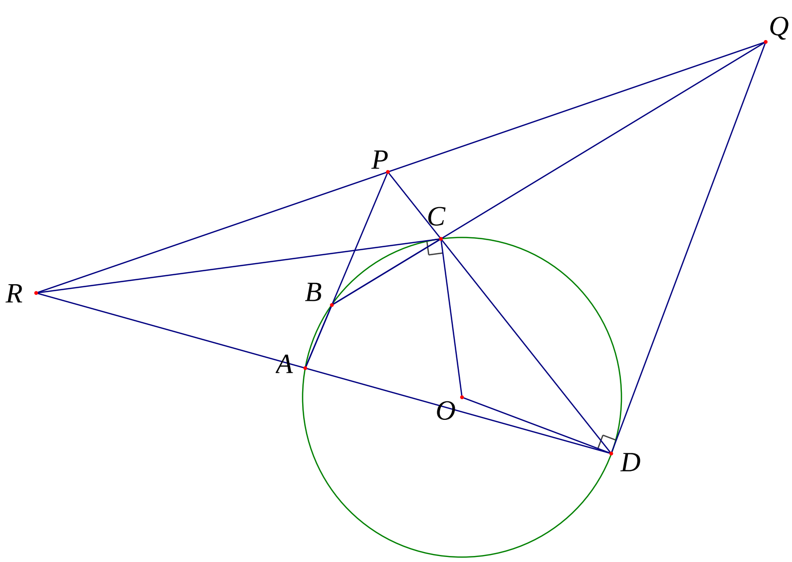
Đường thẳng PRQ ở trên được gọi là đường thẳng Pascal ứng với bộ điểm A,B,C,D,E,F. Bằng cách hoán vị các điểm A,B,C,D,E,F ta thu được rất nhiều đường thẳng Pascal khác nhau, cụ thể ta có tới 60 đường thẳng Pascal.

Chẳng hạn hình vẽ bên minh họa trường hợp các điểm $ACEBFD$.



Ngoài ra khi cho các điểm trùng nhau (khi đó lục giác suy biến thành tam giác, tứ giác, ngũ giác), ví dụ $E\equiv F$ thì cạnh EF trở thành tiếp tuyến của đường tại E, ta còn thu thêm được rất nhiều các đường thẳng Pascal khác nữa. Hình vẽ dưới đây minh họa trường hợp các điểm $ABCDEE$, $ABCCDD$.

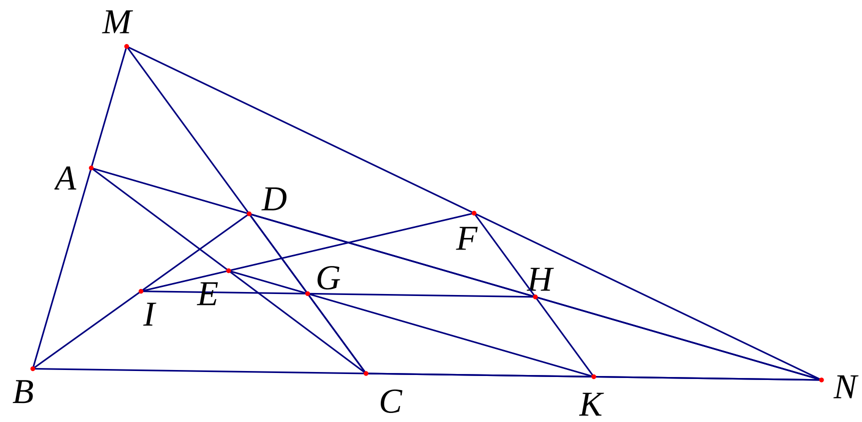




5. Đường thẳng Gauss

Cho tứ giác $ABCD$ có AB, CD cắt nhau tại M AD, BC cắt nhau tại N. Khi đó trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, MN nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh



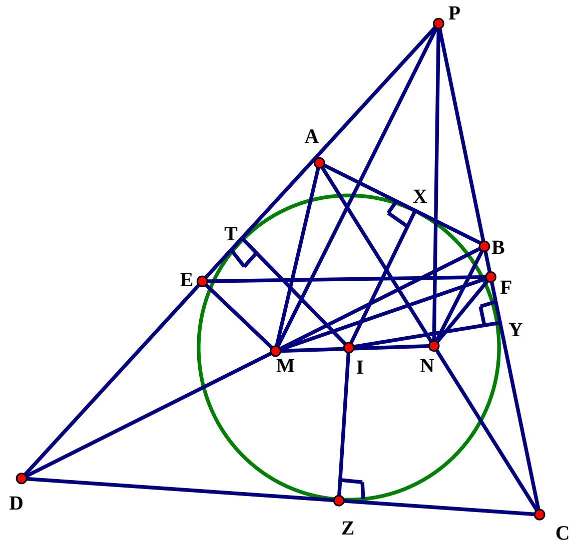
Gọi I, E, F lần lượt là trung điểm của BD, AC, MN và K, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CN, CD, DN . Dễ thấy các điểm F, H, K thẳng hàng. E, G, K thẳng hàng. I, G, H thẳng hàng.

Ta có: $FK // MC$, $IH // BC$, $EK // DN$ nên $\frac{IG}{IH} = \frac{BC}{BN}, \frac{FH}{FK} = \frac{MD}{MC}, \frac{EK}{EG} = \frac{AN}{AD}$ nhân 3 đẳng thức ta có: $\frac{IG}{IH} \cdot \frac{FH}{FK} \cdot \frac{EK}{EG} = \frac{BC}{BN} \cdot \frac{MD}{MC} \cdot \frac{AN}{AD}$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác CDN và đường thẳng đi qua B, A, M ta có: $\frac{BC}{BN} \cdot \frac{MD}{MC} \cdot \frac{AN}{AD} = 1$, suy ra $\frac{IG}{IH} \cdot \frac{FH}{FK} \cdot \frac{EK}{EG} = 1$. Theo định lí Menelaus đảo ta suy ra I, E, F thẳng hàng.

6. Đường thẳng Niutơn

Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I), gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC . Khi đó 3 điểm I, M, N thẳng hằng. Đường thẳng đi qua I, M, N gọi là đường thẳng Niutơn của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh



(Ta chỉ xét trường hợp AB không song song với CD)

Gọi các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA lần lượt

là X,Y,Z,T thì $IX = IY = IZ = IT = r$.

Giả sử: AD, BC cắt nhau tại P, Trên PD lấy E sao cho

$PE = AD$, trên PC lấy F sao cho $PF = BC$ thế thì:

$$S_{MAD} + S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{DAB} + \frac{1}{2}S_{DBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

$$S_{NAD} + S_{NBC} = \frac{1}{2}S_{CAD} + \frac{1}{2}S_{NBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Từ đó suy ra: $S_{MAD} + S_{MBC} = S_{NAD} + S_{NBC}$. Theo cách xác định

E, F ta có: $S_{MAD} = S_{\text{MEF}}, S_{MBC} = S_{\text{MPF}}, S_{NAD} = S_{NPE}$,

$S_{NBC} = S_{NPF}$ suy ra: $S_{MPE} + S_{\text{MPF}} = S_{NPE} + S_{\text{NPF}}$ hay $S_{EPF} + S_{\text{NEPF}}\ (1)$.

Lại có: $S_{IAD} = S_{\text{IPE}}, S_{IPF} = S_{\text{IPE}} \Rightarrow S_{IAD} + S_{\text{IBC}} = S_{IPE} + S_{\text{IPF}} = S_{IEPF}$ nhưng

$S_{IAD} + S_{IBC} = \frac{1}{2}S_{AXYT} + \frac{1}{2}S_{DZYT} + \frac{1}{2}S_{IZCY} + \frac{1}{2}S_{XIYB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ Suy ra $S_{MEPF} = S_{\text{IEPF}}\ (2)$. Từ (1) và (2)

Ta suy ra $S_{MEPF} = S_{\text{NEPF}} = S_{IEPF}$ hay $S_{MEF} = S_{\text{NEF}} = S_{IEF} \Leftrightarrow MN$//EF,MI//E$F$

suy ra I, M, N thẳng hàng.

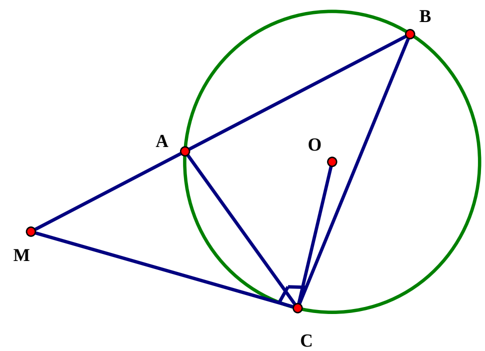
7. Trục đẳng phương của hai đường tròn

Khi đó đại lượng: $P_{M/(O)} = MA.MB$ gọi là phương tích của điểm M với đường tròn (O)

+ Nếu M nằm ngoài (O) thì $P_{M/(O)} = MA.MB = MO^2 - R^2$.

+ Nếu M nằm trong (O) thì $P_{M/(O)} = MA.MB = R^2 - MO^2$.

+ Nếu M nằm trên (O) thì $P_{M/(O)} = 0$.

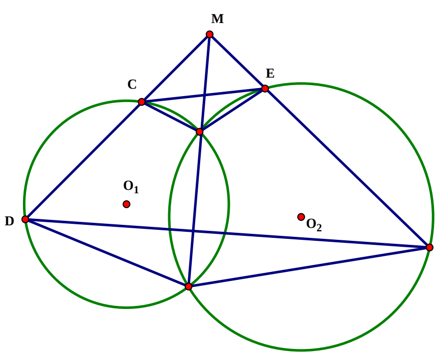


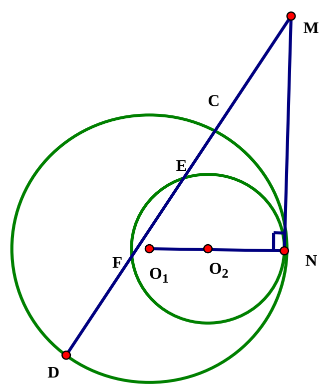
Ta cũng có kết quả: Khi M nằm ngoài (O) và MC là tiếp tuyến của tại C thì $P_{M/(O)} = MA.MB = MC^2$

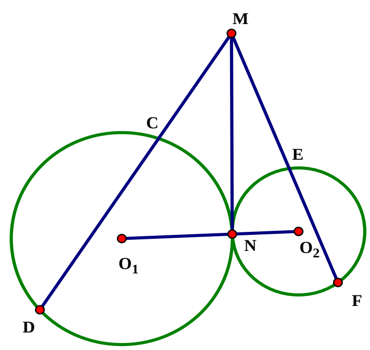
(Đây là những kết quả quen thuộc đã được chứng minh trong phần cát tuyến, tiếp tuyến).

b, Các điểm có cùng phương tích với hai đường tròn phân biệt $(O_1;R_1);(O_2;R_2)$ nằm trên một đường thẳng gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

Trong phạm vi THCS ta cần chú ý đến các trường hợp là:







+ Nếu $(O_1;R_1);(O_2;R_2)$ cắt nhau theo dây AB, lấy điểm M trên đường thẳng AB (M nằm ngoài 2 đường tròn) cát tuyến qua M cắt đường tròn (O_1) tại C, D, cát tuyến qua M cát đường tròn (O_2) tại E, F thì $MC.MD = ME.MF = MA.MB$ (Hình 1)

+ Nếu $(O_1;R_1);(O_2;R_2)$ tiếp xúc nhau tại N thì trục đẳng phương là đường thẳng qua N vuông góc với O_1O_2. (Hình 2,3)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CHỨNG MINH THẲNG HÀNG , ĐỒNG QUY

1. Một số tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

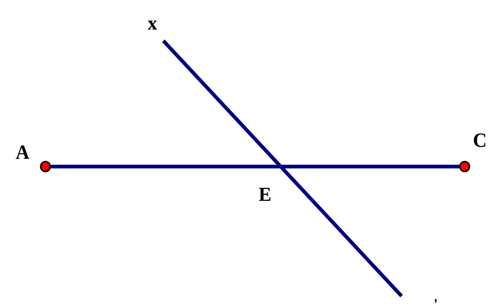
Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự, thực chất của các phương pháp cơ bản là chứng minh hai đường thẳng AB và AC trùng nhau.

Trong phần này chúng ta đưa ra một số tiêu chuẩn để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 1: Ba điểm phân biệt A, B, C theo thứ tự nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi $\widehat{ABC} = 180^0$.

Xét một đường thẳng xx' qua B

Để chứng minh A, B, C thẳng hàng ta quy về chứng minh:



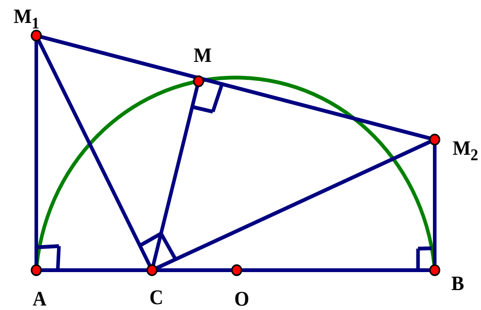
+ $\widehat{ABx} + \widehat{xBC} = 180^0$ hoặc $\widehat{ABx} = \widehat{x'BC}$

Ví dụ 1:

Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C thuộc AB sao cho $CA < CB$ và điểm M thuộc nửa đường tròn đó. Đường thẳng đi qua M vuông góc với MC cắt tiếp tuyến tại A tại M_1. Đường thẳng qua C vuông góc với M_1C cắt tiếp tuyến qua M tại M_2. Chứng minh rằng M, M_1, M_2 thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\widehat{CAM} = \widehat{CM_1M}$ (tứ giác $ACMM_1$ nội tiếp).



$\widehat{CAM} = \widehat{MBM_2}$ (góc giữa hai tiếp tuyến và dây cung).

$\widehat{CM_1M} = \widehat{MCM_2}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MCM_1}$)

$\Rightarrow \widehat{MCM_2} = \widehat{MBM_2}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BCMM_2$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CMM_2} = 90^0$.

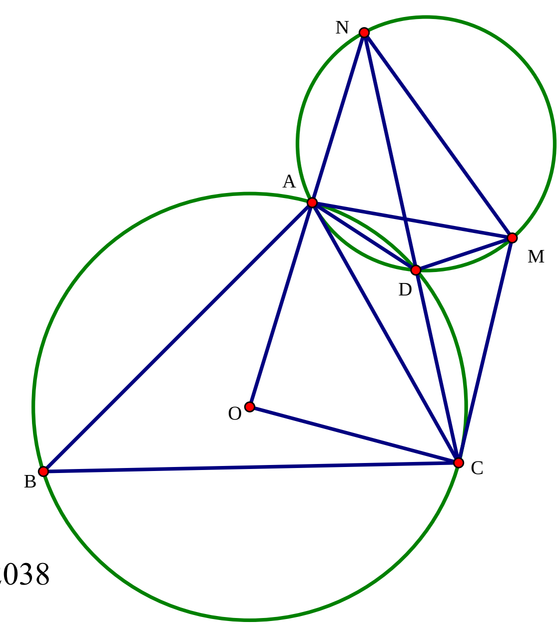
Do đó ta có: $\widehat{M_1MM_2} = \widehat{M_1MC} + \widehat{M_2MC} = 180^0$ (đpcm).

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến qua A, C cắt nhau tại M. Vẽ hình bình hành $ACMBN$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường tròn (O) ở D. Chứng minh N, C, D thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{ADN}$ (tứ giác $ADMN$ nội tiếp).



$\widehat{AMN} = \widehat{CAM}$ (hai góc so le trong).

$\widehat{ACM} = \widehat{ABC}$ (góc giữa tiếp tuyến

Và dây cung) $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ABC}$ (1)

Mặt khác tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ (2).

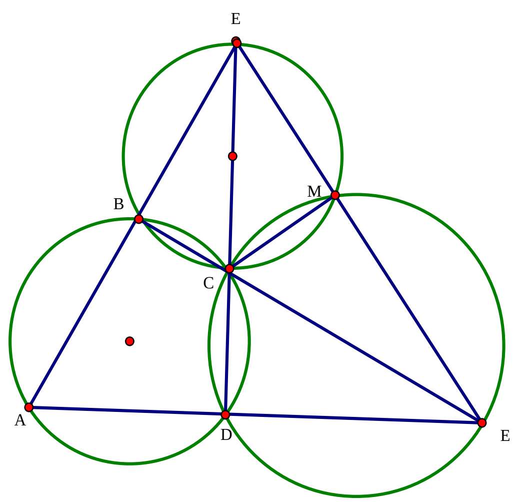
Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{ADN}+\widehat{ADC}=180^0$

Suy ra (đpcm).

Ví dụ 3

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) các tia AB,CD cắt nhau ở E. AD cắt BC tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai khác C của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE,CDF. Chứng minh E,M,F thẳng hàng.

Giải



Để chứng minh E,M,F thẳng hàng ta chứng minh: $\widehat{CAE}+\widehat{CMF}=180^0$.

Vì vậy ta cần quy về hai góc này về hai góc đối trong một tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $\widehat{EMC}=180^0-\widehat{EBC}$ do $EBCM$ nội tiếp. $\widehat{FMC}=180^0-\widehat{CDF}$ do $FMCD$ nội tiếp. Từ đó ta có: $\widehat{EMC}=360^0-\widehat{CDF}-\widehat{EBC}$.

Để ý rằng: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{CDF}+\widehat{ABC},\widehat{EBC}=\widehat{CDA}$ mà $\widehat{ABC}+\widehat{CDA}=180^0$

Nên $\widehat{CME}+\widehat{CMF}=180^0$. Do đó ba điểm E,M,F thẳng hàng.

Ví dụ 4

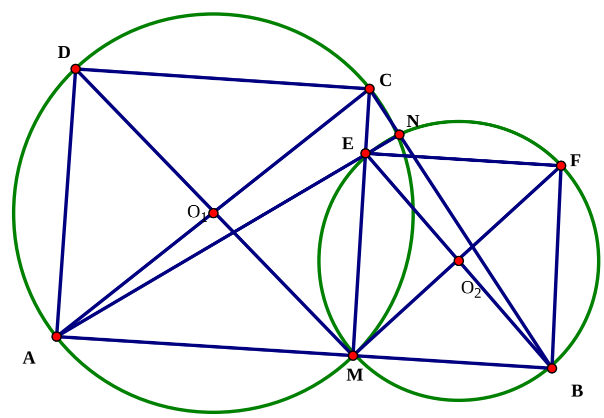
Cho ba điểm thẳng hàng theo thứ tự A, M, B về cùng một phía của đường thẳng AB vẽ hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoại tiếp hai hình vuông đó cắt nhau tại M và N. Chứng minh rằng:

a) B, C, N thẳng hàng.

b) A, E, N thẳng hàng.

Giải

a) Ta có:



$\widehat{ANC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{MNE} = \widehat{MEF} = 45^0$ (góc nội tiếp).

$\widehat{MNB} = \widehat{MEB} = 45^0$ (góc nội tiếp).

$\Rightarrow \widehat{ANB} = 90^0$.

Vậy $\widehat{ANC} + \widehat{ANB} = \widehat{CNB} = 180^0$ (đpcm)

b) Từ kết quả câu trên, ta có:

$\Delta MBC = \Delta MEA(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MEA}$

Mặt khác tứ giác $BMEN$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{MBN} + \widehat{MEN} = 180^0 \Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MEA} = 180^0$

Suy ra (đpcm).

Ví dụ 5 : Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC $(P \neq B, C, H)$ và nằm trong tam giác ABC. PB cắt đường tròn (O) tại M khác B. PC cắt (O) tại N khác C, BM cắt AC tại E, CN cắt AB tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q khác A. Chứng minh M, N, Q thẳng hàng.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên – Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội – năm 2013)

Giải

Để chứng minh: M, N, Q thẳng hàng ta chứng minh: $\widehat{MQA}+\widehat{NQA}=180°$

Ta có $\widehat{BPC}=\widehat{BHC}=180°-\widehat{BAC}$ nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BFC}=\widehat{BEA}$.

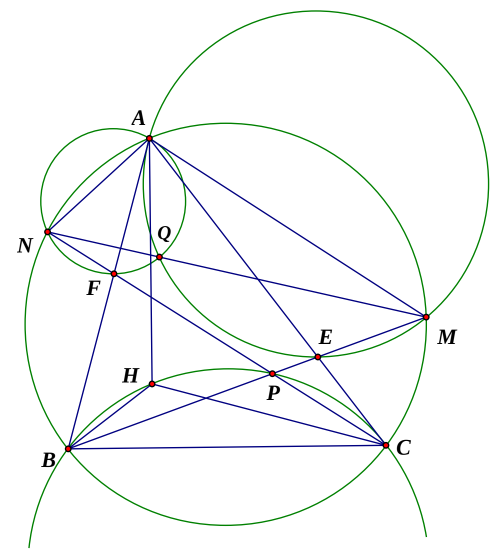
suy ra $\widehat{BFC}+\widehat{BEC}=180°$

Từ các tứ giác $AQFN$, $AQEM$ nội tiếp

ta có $\widehat{MQN}=\widehat{MQA}+\widehat{NQA}$

$=\widehat{MEA}+\widehat{NFA}=\widehat{BFC}+\widehat{BEC}=180°$.

Vậy 3 điểm M, N, Q thẳng hàng.



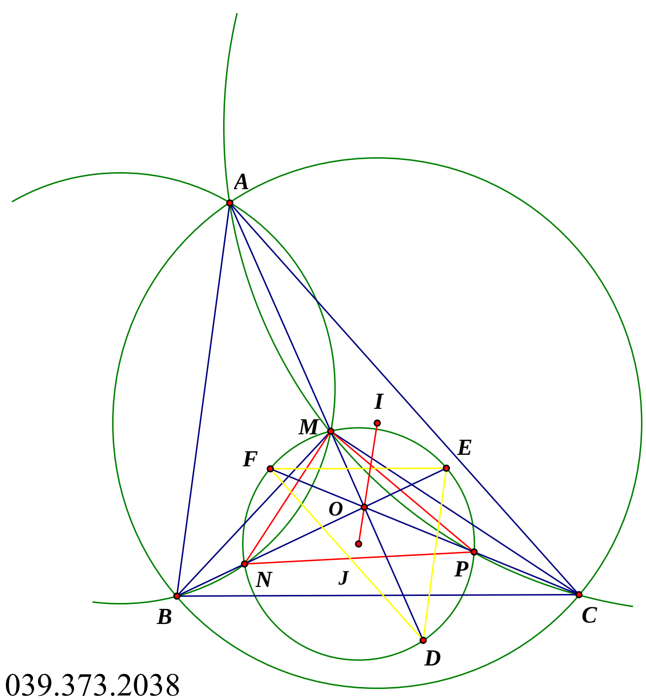
Ví dụ 6: Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác đó (O không nằm trên các cạnh tam giác). Điểm M nằm trên tia OA (M khác O, A) sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt tia OB tại giao điểm thứ hai là N, đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt tia OC tại giao điểm thứ hai là P. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, MNP. Chứng minh: O, I, J thẳng hàng.

(Trích đề thi vào lớp 10 – Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu- Năm 2012).

Giải

Phân tích định hướng giải

Giả sử đường tròn (J) cắt OA, OB, OC lần lượt tại D, E, F. Để chứng minh O, I, J thẳng hàng ta chứng minh :



$\widehat{AOJ}+\widehat{DOJ}=180°$. Điều này cũng tương đương với $\widehat{AOI}=\widehat{DOJ}$. Ta cần tìm liên hệ của các góc này với các góc của tứ giác nội tiếp. Thật vậy ta có :

$\widehat{JDO}=\widehat{JDE}-\widehat{ODE}$, $\widehat{IAO}=\widehat{IAB}-\widehat{OAB}$

Lại có : $\widehat{JDE}=\dfrac{180°-\widehat{EJD}}{2}$, $\widehat{EIB}=\dfrac{180°-\widehat{AIB}}{2}$, mặt khác $\widehat{EJD}=2\widehat{DFE}$, $\widehat{AIB}=2\widehat{ACB}$.

Bây giờ ta quan tâm đến hai ΔABC, ΔDEF. Nếu hai tam giác này đồng dạng với nhau thì bài toán sẽ được giải quyết.

Từ định hướng trên ta có thể giải bài toán như sau :

+ Để ý rằng do các tứ giác $AMNB$, $AMPC$ là tứ giác nội tiếp nên ta dễ chứng minh được $OM.OA=ON.OB=OP.OC$ suy ra $\Delta OBC\backsim\Delta OPN$

mà $\widehat{OPN}=\widehat{OEF}$, $\Delta OBC\backsim\Delta OEF$ $\Rightarrow\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{OC}{OF}$. Hoàn toàn tương tự ta có : $\Delta OAB\backsim\Delta ODE$

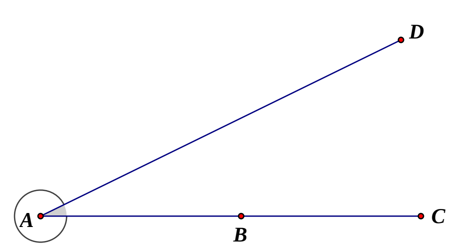
$\Rightarrow\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OB}{OE}$, $\Delta OAC\backsim\Delta ODF\Rightarrow\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OC}{OF}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$ do đó $\Delta ABC\backsim\Delta DEF$ suy ra $\widehat{DFE}=\widehat{ACB}$ dẫn đến : $\widehat{AIB}=\widehat{EJD}$ $\Rightarrow\widehat{JDE}=\widehat{EIB}$ mặt khác $\widehat{ODE}=\widehat{OAB}$ nên $\widehat{JDO}=\widehat{IAO}$.

+ Tam giác IAB cân tại I, ΔJDE cân tại J mà $\widehat{AIB}=\widehat{EJD}$ nên hai tam giác này đồng dạng với nhau, dẫn đến $\dfrac{IA}{JD}=\dfrac{AB}{DE}$ suy ra $\dfrac{IA}{JD}=\dfrac{OA}{OD}$ từ đó ta có : $\Delta AOI\backsim\Delta DOJ$ suy ra $\widehat{AOI}=\widehat{DOJ}$.

Tiêu chuẩn 2. A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ đường thẳng AB và AC cùng song song hoặc cùng vuông góc với một đường thẳng.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo hướng : $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}$ thì A, B, C thẳng hàng.

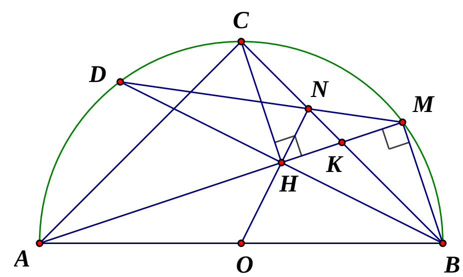


Ví dụ 1 : Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB. Gọi C là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$, K là trung điểm đoạn BC, AK cắt (O) tại M. Kẻ CH vuông góc với AM; OH cắt BC tại N, MN cắt (O) tại D. Chứng minh B, H, D thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\widehat{AMB} = 90°$ (góc chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HC // BM$ (cùng vuông góc với AM).

Mà K là trung điểm của BC nên K là trung điểm của HM $\Rightarrow BM = HC \Rightarrow BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow BH // MC$ (1)



Mặt khác, $\widehat{AMC} = 45°$ (góc chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) $\Rightarrow \Delta HCM$ vuông cân tại $H \Rightarrow HC = HM$

Lại có $OC = OM$ (bán kính đường tròn (O))

$\Rightarrow OH$ là phân giác của $\widehat{COM} \Rightarrow NC = NM$

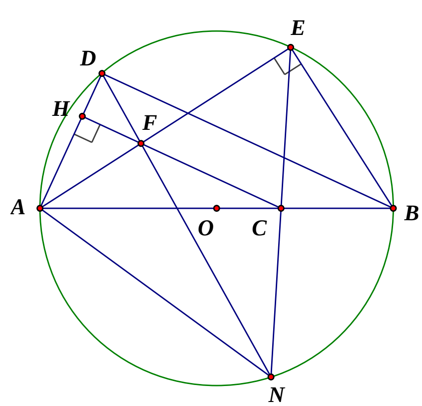
$\Rightarrow \Delta NCM$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{NCM} = \widehat{NMC}$ mà $\widehat{CMD} = \widehat{CBD}$(góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$), do đó $\widehat{BCM} = \widehat{CBD} \Rightarrow BD // MC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Ví dụ 2 : Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm D khác A sao cho $\widehat{DAB} > 60°$. Trên đường kính AB lấy điểm C khác A, B và dựng $CH \perp AD$ tại H. Phân giác trong góc $\widehat{DAB}$ cắt đường tròn tại E và cắt CH tại F. Đường thẳng DF cắt đường tròn tại giao điểm thứ 2 là N. Chứng minh : Tứ giác $AFCN$ nội tiếp và N, C, E thẳng hàng.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 – Trường chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm 2013)

Giải



Ta có : $\widehat{ACH}=\widehat{ABD}$ (đồng vị). $\widehat{ABD}=\widehat{AND}$ (cùng chắn cung AD) suy ra $\widehat{ACH}=\widehat{ANF}$

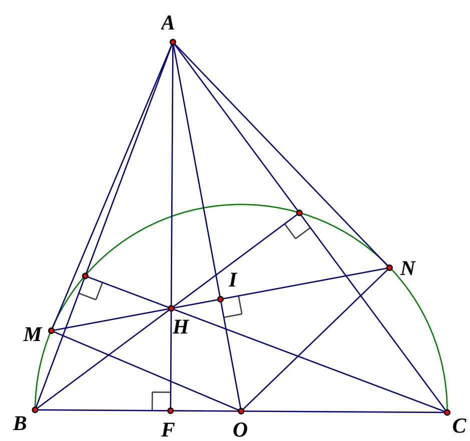
Hay tứ giác $AFCN$ nội tiếp.

Ta có : $\widehat{CND}=\widehat{BAE}$ và $\widehat{BAE}=\widehat{DAE}=\widehat{DNE}$

Vậy $\widehat{CND}=\widehat{DNE}$ hay 3 điểm N, C, E thẳng hàng.

Ví dụ 3 : Cho đường tròn (O) đường kính $BC=2R$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) (M, N là hai tiếp điểm). Gọi H là trực tâm tam giác ABC, F là giao điểm của BC và AH. Chứng minh M, H, N thẳng hàng.
(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 –Trường chuyên Bắc Ninh năm 2014)

Giải



Để chứng minh M, H, N thẳng hàng ta chứng minh: $\widehat{ANH}=\widehat{ANM}$.

Ta có : $\widehat{ANM}=\widehat{AFM}=\widehat{AFN}$ (Do 5 điểm A, M, N, O, F cùng nằm trên một đường tròn và $AM=AN$).

Như vậy ta cần chứng minh : $\widehat{AFN}=\widehat{ANH}$.

Xét tam giác ΔANH, ΔAFN

Ta có : $\widehat{NAH}$ chung, $AH.AF=AI.AO=AN^2$ (Tính chất quen thuộc của tiếp tuyến, cát tuyến)

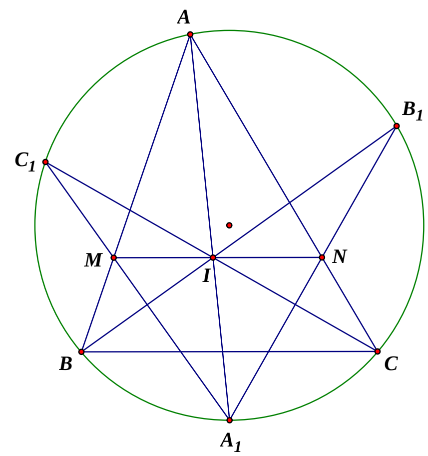
suy ra $\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AN}{AF}$ hay $\Delta ANH\backsim\Delta AFN$ suy ra $\widehat{AFN}=\widehat{ANH}$.

Ví dụ 4 : Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A, B, C là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ của (O) và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. AC cắt AB ở M; A_1B_1 cắt AC ở N. Chứng minh M, I, N thẳng hàng.

Giải

+ Vì A, B, C là trung điểm các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ nên AA_1, BB_1, CC_1 là các tia phân giác trong của tam giác ABC do đó chúng đồng qui tại I.

Ta có: $\widehat{IBA_1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1CB_1}$, $\widehat{A_1IB} = \frac{1}{2}\text{sd}\left(\overset{\frown}{AB_1} + \overset{\frown}{BA_1}\right) = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{A_1CB_1}$



$\Rightarrow \widehat{A_1BI} = \widehat{A_1IB} \Rightarrow \Delta A_1BI$ cân tại A_1.

+ Tương tự ta có : ΔA_1CI cân tại A_1.

Xét tứ giác $ABMI$ có :

$A_1B = A_1I$ và $\widehat{MA_1B} = \widehat{MA_1I}$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow A_1M \perp BI \Rightarrow MB = MI \Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{MIB}$.

Mặt khác, BB_1, là phân giác góc $\widehat{ABC}$

nên $\widehat{IBM} = \widehat{IBC} \Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{IBC}$ (so le trong)

$\Rightarrow MI \,//\, BC$. Tương tự $NI \,//\, BC$

$\Rightarrow M$, I, N thẳng hàng.

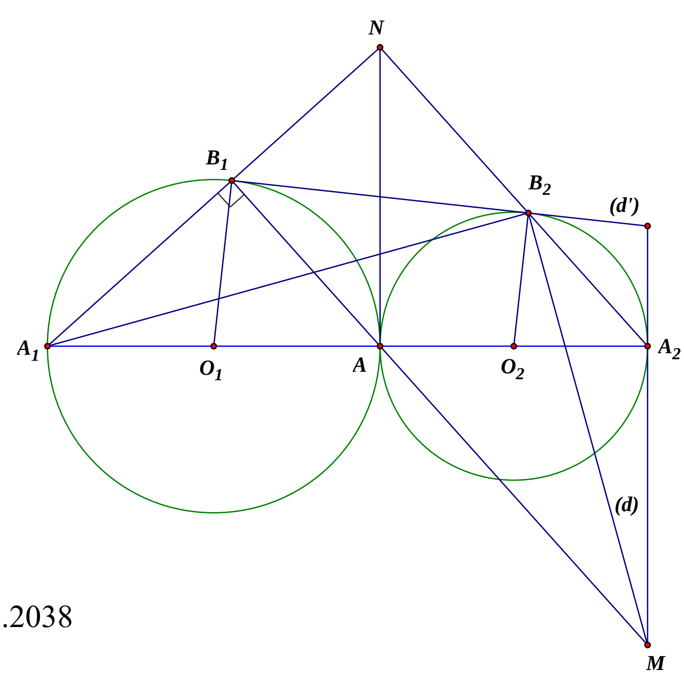
Ví dụ 5 : Hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai đường kính AA_1, AA_2, và tiếp tuyến chung ngoài tương ứng B_1B_2. Gọi (d) là đường thẳng qua B_2, và vuông góc với A_1B_2. Gọi (d') là đường thẳng qua A_2, vuông góc với AA_2, d và d' giao nhau tại M. Chứng minh B_1, A, M thẳng hàng.

Phân tích định hướng giải

Vì $AB_1 \perp A_1B_1$, (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), để chứng minh B_1, A, M thẳng hàng ta sẽ chứng minh $MB_1 \perp A_1B_1$, nghĩa là chứng minh tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được.

Do $O_1B_1 \,//\, O_2B_2$ nên $\widehat{AO_1B_1} = \widehat{AO_2B_2}$ (2 góc đồng vị)

$\Rightarrow B_1AO_1 = B_2A_2O_2 \Rightarrow B_1A \,//\, B_2A_2$.



Tương tự, $A_1B_1 // AB_2$, A_1B_1 cắt A_2B_2 tại N thì AB_1NB_2 là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{NB_1B_2} = \widehat{B_1B_2A}$.

Mặt khác, $\widehat{B_1B_2A} = \widehat{B_2A_2A}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{NB_1B_2} = \widehat{B_2A_2A_1} \Rightarrow$ tứ giác $A_1B_1B_2A_2$ nội tiếp được. Ta có $A_1B_2A_2M$ nội tiếp được trong đường tròn đường kính A_1M. Vậy tứ giác $A_1B_1B_2M$ nội tiếp được. Từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 6.

Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Gọi M, N là chân các đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC. Gọi D là điểm trên cạnh BC. Gọi (w_1) là đường tròn đi qua các điểm B, N, D. Gọi (w_2) là đường tròn đi qua các điểm C, D, M. Dựng DP, DQ lần lượt là các đường kính của $(w_1),(w_2)$. Chứng minh: P, Q, H thẳng hàng. (IMO-2013)

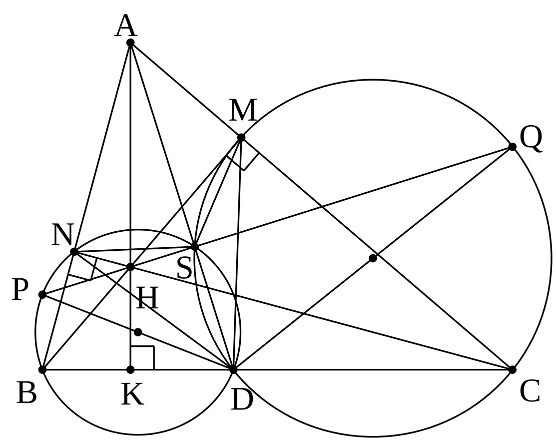
Phân tích định hướng giải

Gọi S là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $(w_1),(w_2)$.

Ta dễ chứng minh được $ANSM$ là tứ giác nội tiếp (Đây là bài toán rất quen thuộc) từ đó suy ra 5 điểm A, N, S, H, M cùng nằm trên một đường tròn.

+ Trước hết ta chứng minh:

A, S, D thẳng hàng: Ta có: $\widehat{ASN} = \widehat{AHN}$ cùng



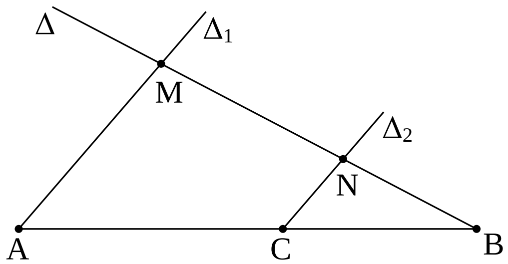
chắn cung $AN, \widehat{NSD} = 180° - \widehat{NBD} = \widehat{NHK}$ do các tứ giác $NSDB, NHKB$ nội tiếp.

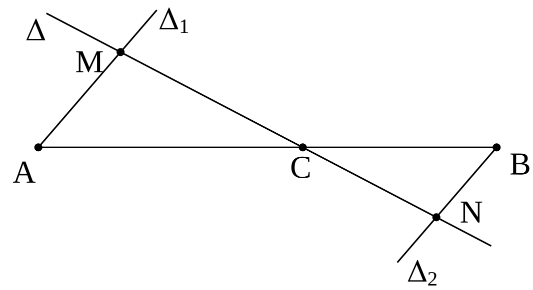
Suy ra: $\widehat{ASN} + \widehat{NSD} = \widehat{AHN} + \widehat{NHK} = 180°$ do đó A, S, D thẳng hàng.

+ Vì 5 điểm A, N, S, H, M cùng nằm trên một đường tròn nên: $\widehat{ASH} = 90°$.

Vì DP là đường kính của (w_1) suy ra $\widehat{PSD} = 90°$, DQ là đường kính của (w_2) nên $\widehat{DSQ} = 90°$ Điều đó chứng tỏ các tia PS, HS, QS trùng nhau. Hay P, Q, H thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 3: Xét đường thẳng (Δ) đi qua B và hai đường thẳng $(\Delta_1),(\Delta_2)$ song song tương ứng qua A, C tạo thành hai tam giác BMA và BNC như một trong hai hình vẽ dưới đây:





Khi đó nếu $\frac{MA}{MB}=\frac{NC}{NB}$ thì A,B,C thẳng hàng.

Ta chứng minh tiêu chuẩn này như sau:

Vì $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$ nên ta có: $\widehat{AMB}=\widehat{CNB}$ do đó $\Delta AMB \backsim \Delta CNB$

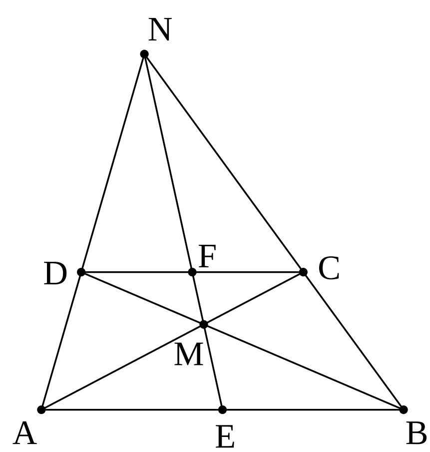
suy ra $\widehat{MBA}=\widehat{NBC}$ hay A,B,C thẳng hàng.

Ta còn gọi đây là phương pháp: ***"Chứng minh 2 tia trùng nhau"***

Ví dụ 1.

Cho hình thang $ABCD\left(AB \,//\, CD\right)$. Hai đường chéo cắt nhau tại M, kéo dài hai cạnh bên cắt nhau tại N. Chứng minh đường MN đi qua trung điểm 2 cạnh đáy. (Bổ đề hình thang)

Giải



Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB,CD. Ta chứng minh M,E,F thẳng hàng.

Thật vậy, do $AB \,//\, CD$ nên:

$\frac{MC}{MA}=\frac{CD}{AB}=\frac{2FC}{2EA}\Rightarrow\frac{MC}{MA}=\frac{FC}{EA}$

$\Rightarrow M,E,F$ thẳng hàng.

Ta còn phải chứng minh N,E,F thẳng hàng.

Xét ΔNAB có $CD \,//\, AB$ nên $\frac{CD}{AB}=\frac{ND}{NA}\Rightarrow\frac{ND}{NA}=\frac{DF}{AE}\Rightarrow N,E,F$ thẳng hàng. Từ đó ta có đpcm.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách khác:

Áp dụng định lý Thales với $AB // CD$ ta có: $\frac{DF}{AE} = \frac{CF}{BE}$ (cùng bằng $\frac{NF}{NE}$). Ta cũng có:

$\frac{DF}{EB} = \frac{CF}{AE}$(cùng bằng $\frac{MF}{ME}$). Nhân hai đẳng thức trên ta có:

$\frac{DF}{AE}.\frac{DF}{EB} = \frac{CF}{BE}.\frac{CF}{AE} \Leftrightarrow DF^2 = CF^2$

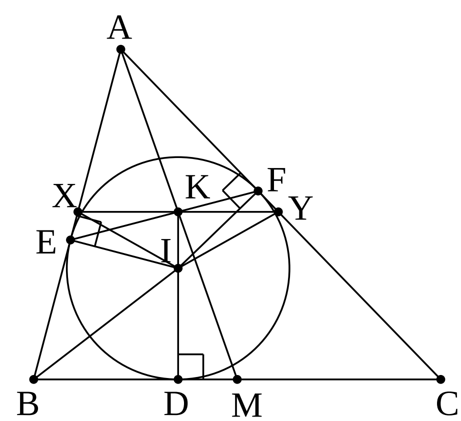
$\Leftrightarrow DF = CF$ suy ra F là trung điểm của CD.

Từ đó ta cũng suy ra E là trung điểm của AB.

Ví dụ 2.

Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, (I) tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt tại D, E, F. Vẽ AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của EF và DI. Chứng minh A, K, M thẳng hàng.

Giải



Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt ở X, Y.

$DI \perp BC, XY // BC \Rightarrow DI \perp XY$

Ta có $\widehat{XEI} = \widehat{XKI} = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EXKI$ nội tiếp

$\Rightarrow$ $\widehat{IEK} = \widehat{IXK}$.

Tương tự tứ giác $IKFY$ nội tiếp$\Rightarrow$ $\widehat{IFK} = \widehat{IYK}$.

Mà $IE = IF\,(= r) \Rightarrow \Delta IEF$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEK} = \widehat{IFK}$ nên $\widehat{IXK} = \widehat{IYK} \Rightarrow \Delta IXY$ cân tại I.

Mà IK là đường cao $(ID \perp XY)$ do đó IK là đường trung tuyến $\Rightarrow XK = KY = \frac{XY}{2}$.

Do đó $\frac{XK}{BM} = \frac{2XK}{2BM} = \frac{XY}{BC}$, ΔABC có $XY // BC \Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{XY}{BC}$.

Xét ΔAXK và ΔABM có $\widehat{AXK} = \widehat{ABM}$ (đồng vị và $XY // BC$)

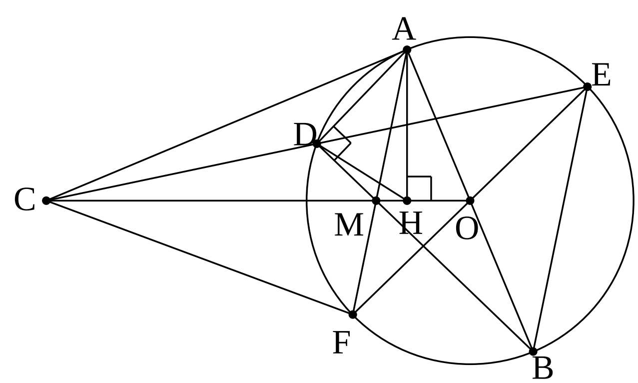
$\frac{AX}{AB}=\frac{XK}{BM}=\left(\frac{XY}{BC}\right)$. Do đó ΔAXK" ΔABM (g.g) $\Rightarrow \widehat{XAK}=\widehat{BAM} \Rightarrow$ Hai tia AK, AM trùng nhau.

Vậy A, K, M thẳng hàng.

Ví dụ 3.

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm C. Vẽ cát tuyến CDE (tia CD nằm giữa hai tia $CA, CO; D, E$ thuộc đường tròn (O), D nằm giữa C và E). Gọi M là giao điểm của CO và BD. Gọi F là giao điểm của AM và đường tròn (O) (F khác A). Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Giải



Vẽ $AH \perp OC$ tại H. Xét ΔCAD và ΔCEA có $\widehat{ACD}$ chung, $\widehat{CAD}=\widehat{CEA}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó ΔCAD" ΔCEA (g.g)

$\Rightarrow \frac{CA}{CE}=\frac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2=CD.CE$

+ ΔACO vuông tại A, AH là đường cao

$\Rightarrow$ $CA^2=CH.CO$.

Do đó $CD.CE=CH.CO\left(=CA^2\right)$

Xét ΔCDH và ΔCOE có $\widehat{DCH}$ chung, $\frac{CD}{CO}=\frac{DH}{CE}$ (vì $CD.CE=CH.CO$).

Do đó ΔCDH" ΔCOE (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CHD}=\widehat{CEO}$.

Mặt khác $\widehat{ADB}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

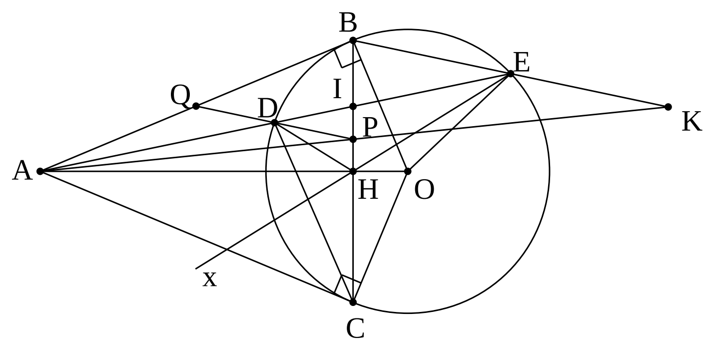
Ta có $\widehat{ADM}+\widehat{AHM}=90°+90°=180° \Rightarrow$ tứ giác $ADMH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAM}=\widehat{CHD}$.

Mà $\widehat{CEF}=\widehat{DAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DF). Do đó $\widehat{CEF}=\widehat{CEO} \Rightarrow$ hai tia EF, EO trùng nhau. Vậy E, O, F thẳng hàng.

Ví dụ 4.

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho ADE nằm giữa hai tia AO, AB. Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại P, Q. Gọi K là điểm đối xứng của B qua E. Chứng minh rằng ba điểm A, P, K thẳng hàng.

Giải



+ Gọi H, I lần lượt là giao điểm của BC với AO, DE. Ta có AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow AB = AC$, AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, ΔABC cân tại O $\Rightarrow AO$ là đường cao của tam giác ABC.

+ Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{BAD}$ chung, $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Do đó ΔABD" ΔAEB (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE, \Delta ABO$ vuông tại B, BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$. Do đó $AD.AE = AH.AO\left(= AB^2\right)$

+ Xét ΔAHD và ΔAEO có $\widehat{HAD}$ chung, $\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AD}{AO}$ (vì $AD.AE = AH.AO$).

Do đó ΔAHD" ΔAEO (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO} \Rightarrow$ tứ giác $OEDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OHE} = \widehat{ODE}$.

ΔODE có $OD = OE\,(= R) \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OED}$. Do đó: $\widehat{OHE} = \widehat{AHD}$.

Ta có $\widehat{OHE} + \widehat{EHI} = \widehat{AHD} + \widehat{IHD}\,(= 90°)$ nên $\widehat{EHI} = \widehat{IHD} \Rightarrow HI$ là tia phân giác $\widehat{DHE}$.

+ Gọi Hx là tia đối của tia $HE, \widehat{xHA} = \widehat{AHD}\left(= \widehat{OHE}\right) \Rightarrow HA$ là đường phân giác ngoài của $\widehat{HED}$ nên $\dfrac{ID}{DE} = \dfrac{AD}{AE}$. ΔABE có $DQ \,//\, BE \Rightarrow \dfrac{DQ}{BE} = \dfrac{AD}{AE}, \Delta IBE$ có $BE \,//\, PD \Rightarrow DQ = DP$.

ΔABE có $DQ \,//\, BE \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{QD}{BE}$. Do đó $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{2QD}{2BE} = \dfrac{PQ}{BK}$.

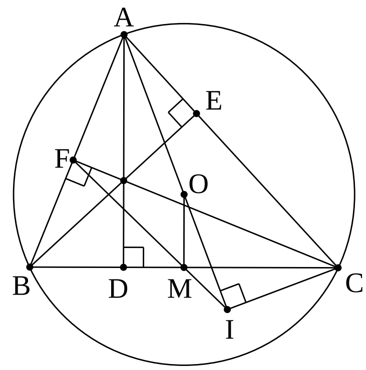
+ Xét ΔAPQ và ΔAKB có $\widehat{AQP} = \widehat{ABK}$ (đồng vị và $PQ \,//\, BE$), $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{PQ}{BK}$ do đó

ΔAPQ" ΔAKB (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{BAK} \Rightarrow$ hai tia AP, AK trùng nhau hay A, P, K thẳng hàng.

Ví dụ 5.

Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Vẽ CI vuông góc với OA tại I. Gọi M là trung điểm với BC. Chứng minh rằng ba điểm M,I,F thẳng hàng.

Giải



+ $OB=OC\left(=R\right)\Rightarrow\Delta OBC$ cân tại O,

OM là đường trung tuyến $\Rightarrow OM$ là đường cao, đường phân giác nên $\widehat{BAC}=\widehat{MOC}\left(=\frac{1}{2}\widehat{BOC}\right)$.

Ta có: $\widehat{BAC}+\widehat{ACF}=\widehat{MOC}+\widehat{OCM}=90^\circ$ nên $\widehat{ACF}=\widehat{OCM}$. Tứ giác $OMIC$ có: $\widehat{OMC}=\widehat{OIC}=90^\circ$ nên nội tiếp $\Rightarrow\widehat{AIF}=\widehat{ACF}$ do vậy $\widehat{AIF}=\widehat{OIM}$

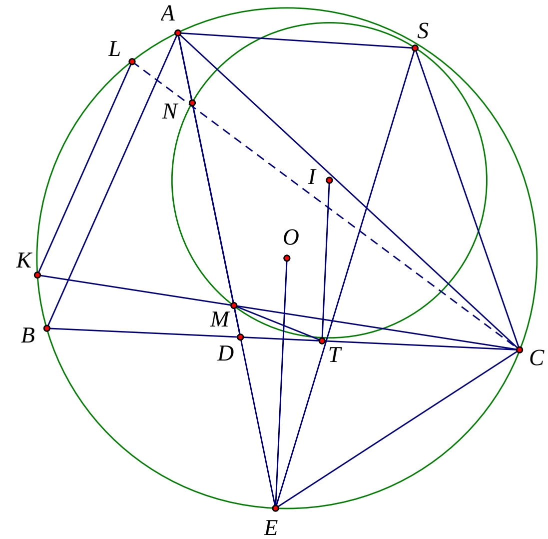
$\Rightarrow$hai tia IM,IF trùng nhau. Vậy M,I,F thẳng hàng.

Ví dụ 6.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Đường phân giác AD của tam giác cắt cung BC ở E. Đường tròn $\left(I\right)$ tiếp xúc trong với $\left(O\right)$ tại S và tiếp xúc với BC tại T cắt AD ở M,N (N nằm giữa A và M), CM cắt đường tròn $\left(O\right)$ ở K. Vẽ dây song song với AB. Chứng minh rằng L,N,I thẳng hàng.

Giải

Vì $OE\,//\,IT$ (cùng vuông góc với BC) và $\widehat{IST}=\widehat{OSE}=\widehat{OES}$ do các tam giác IST,OSE cân suy ra S,T,E thẳng hàng.



+ Xét ΔECT và ΔECS có $\widehat{CET}$ chung, $\widehat{ECT} = \widehat{ESC}$.

Do đó $\Delta ECT \backsim \Delta ESC(g.g)$.

Suy ra $\frac{EC}{ES} = \frac{ET}{EC} \Rightarrow EC^2 = ET.ES$. (1)

+ Xét ΔEMT và ΔESN có $\widehat{MET}$ chung, $\widehat{EMT} = \widehat{ESN}$.

Do đó $\Delta EMT \backsim \Delta ESN(g.g)$.

Suy ra $\frac{EM}{ES} = \frac{ET}{EN} \Rightarrow EM.EN = ET.ES$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EC^2 = EM.EN$

$\Rightarrow \frac{EC}{EN} = \frac{EM}{EC} \Rightarrow \Delta ECM \backsim \Delta ENC(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{ENC} \Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{DCM} = \widehat{NCA} + \widehat{NAC}$.

Mà $\widehat{ECD} = \widehat{NAC} \Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{NCA}$

Do $KL//AB \Rightarrow \overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{AL} \Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{LCA}$.

Ta có: $\widehat{NCA} = \widehat{LCA}\left(= \widehat{DCM}\right) \Rightarrow$ Hai tia CN, CL trùng nhau.

Vậy C, N, L thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 4: Sử dụng các tính chất của đường tròn để chứng minh A, B, C thẳng hàng.
Ví dụ: B là tâm của đường tròn đường kính AC hoặc các đường tròn tâm A và tâm C tiếp xúc nhau tại B, hai đường tròn cắt nhau thì đường thẳng nối tâm của hai đường tròn vuông góc với dây chung của hai đường tròn đó ...

Ví dụ 1

Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy I thuộc đoạn AB sao cho $IA > IB$. Gọi D là trung điểm của cung nhỏ AB. DI cắt (O) tại giao điểm thứ hai C. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt AB tại K, EC cắt (O) tại giao điểm thứ hai F. Chứng minh D, O, F thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\widehat{CAD}=\widehat{KCD}$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung)

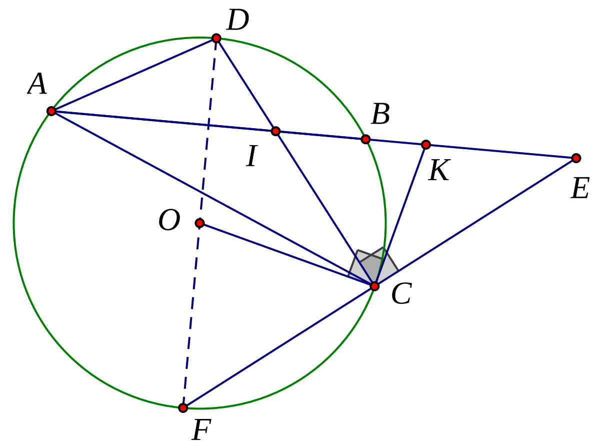
$\widehat{CIK}=\frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$) = $\frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{CBD}$ = $\widehat{CAD}$

$\Rightarrow \widehat{CIK}=\widehat{ICK}\Rightarrow KI=KC$.

Do K là trung điểm của IE nên ΔCIE có $CK=\frac{1}{2}IE$.

$\Rightarrow \Delta CIE$ vuông tại C$\Rightarrow \widehat{DCF}=90^o$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của đường kính DF.



Ví dụ 2

Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB và C nằm giữa O và A. Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ AD là tiếp tuyến, ACF là cát tuyến của đường tròn (I), $(AE<AF)$ sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD,AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) ở N,P (D,P cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). DI cắt NB ở S. Gọi J là trung điểm của SD; L,T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác SBC, SEF. Chứng minh rằng ba điểm J,L,T thẳng hàng.

Giải

Xét ΔADC và ΔABD có $\widehat{DAC}$ chung, $\widehat{ADC}=\widehat{ABD}$.

Do đó $\Delta ADC\backsim\Delta ABD(g.g)$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow AD^2=AB.AC$.

$\widehat{ANB}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

ΔANB vuông tại N, NC là đường cao

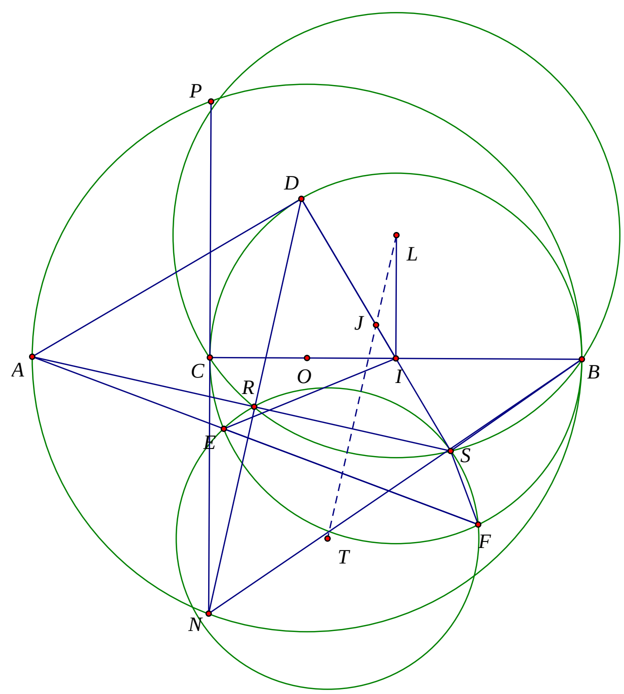
$\Rightarrow AN^2=AB.AC$.

Do đó: $AD^2=AN^2(=AB.AC)\Rightarrow AD=AN$.

Gọi R là giao điểm của DN và AS.

Xét $\Delta DAS\left(\widehat{ADS}=90^o\right)$ và $\Delta NAS\left(\widehat{ANS}=90^o\right)$ có AS chung, $AD=AN$.

Do đó: $\Delta DAS=\Delta NAS$ (cạnh huyền – cạnh



góc vuông)$\Rightarrow \widehat{DAS} = \widehat{NAS}$

ΔAND cân tại A $(AD = AN)$, AR là đường phân giác $\left(\widehat{DAS} = \widehat{NAS}\right)$ cũng là đường cao.

ΔADS vuông tại D, DR là đường cao $\Rightarrow AD^2 = AR.AS$ nên $AR.AS = AB.AC(= AD^2)$.

Xét ΔACR và ΔASB có $\widehat{CAR}$ chung, $\dfrac{AC}{AS} = \dfrac{AR}{AB}$ (vì $AR.AS = AB.AC$).

Do đó $\Delta ACR \backsim \Delta ASB(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ACR} = \widehat{ASB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBSR$ nội tiếp $\Rightarrow L$ thuộc đường trung trực của RS. (1)

Chứng minh tương tự có tứ giác $RSFE$ nội tiếp $\Rightarrow T$ thuộc đường trung trực của RS. (2)

Mặt khác ΔRDS vuông tại R, RJ là đường trung tuyến $\Rightarrow RJ = SJ = DJ$

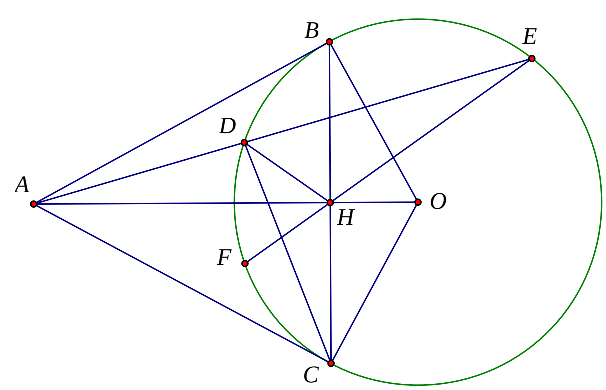
$\Rightarrow J$ thuộc đường trung trực của RS. (3)

Từ (1), (2) và (3) có J, L, T thẳng hàng.

Ví dụ 3

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC của đường tròn (O), $(B, C \in (O))$. Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O), $(D, E \in (O))$, $(AD < AE)$ sao cho tia AD nằm giữa hai tia AO, AB. Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng.

Giải



Vì tiếp tuyến AB và AC của đường tròn $(O) \Rightarrow AB = AC$ và AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Do F là điểm đối xứng của D qua AO $\Rightarrow OF = OD = R, DF \perp OA$.

Ta có: $DF // BC \Rightarrow$ Tứ giác $DBCF$ là hình thang.

Hình thang $DBCF$ nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DBCF$ là hình thang cân

$\Rightarrow DB = CF,\ BF = CD$.

Xét ΔABD và ΔAEB có $\widehat{ABD} = \widehat{AEB},\ \widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{AB}{AE}$.

Tương tự $\Delta ACD \backsim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE}$.

Xét ΔHBF và ΔHEC có $\widehat{BHF} = \widehat{EHC},\ \widehat{BFH} = \widehat{HCE}$.

Do đó $\Delta HBF \backsim \Delta HEC \Rightarrow \dfrac{HB}{HE} = \dfrac{BF}{CE}$.

Tương tự $\Delta HFC \backsim \Delta HBE \Rightarrow \dfrac{CF}{BE} = \dfrac{HC}{HE}$.

Ta có: $\dfrac{HB}{HE} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CF}{BE} = \dfrac{HC}{HE} \Rightarrow HB = HC$.

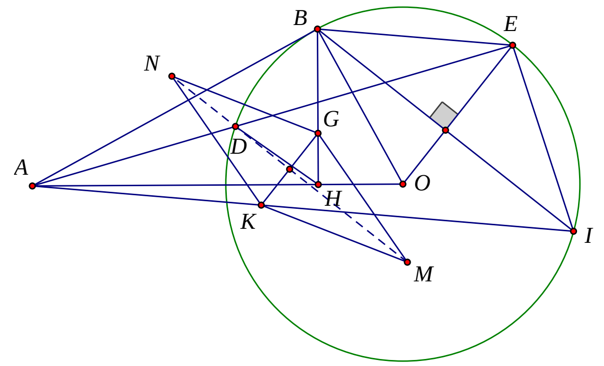
Ta có: $HB = HC,\ AB = AC,\ OB = OC \Rightarrow H, A, O$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy A, O, H thẳng hàng.

Ví dụ 4

Từ A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến AB, vẽ BH vuông góc với OA tại H, vẽ cát tuyến ADE. Đường thẳng qua B vuông góc với OE cắt đường tròn (O) ở I. Đường thẳng qua D song song với BE cắt BH ở G, đường thẳng qua D song song với EI cắt AI ở K. Vẽ hình thoi $KMGN$ $(\widehat{DKG} < \widehat{MKG})$. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Giải



Xét ΔABD và ΔAEB có $\widehat{ABD}=\widehat{AEB}$, $\widehat{BAD}$ chung.

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AB}$

$\Rightarrow AB^2 = AD.AE$.

ΔABO vuông tại B, BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$.

Xét ΔADH và ΔAOE có $\widehat{DAH}$ chung, $\dfrac{AD}{AO}=\dfrac{AH}{AE}$

(vì $AB^2 = AD.AE = AH.AO$).

Do đó $\Delta ADH \backsim \Delta AOE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHD}=\widehat{AOE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DHOE$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{ODE}=\widehat{OHE}$ mà $\widehat{ODE}=\widehat{OED}$ (vì $OD=OE$) nên $\widehat{AHD}=\widehat{OHE}$.

Gọi S là giao điểm của BH và AE; HS, HA là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác HDE

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{SD}{SE}$.

ΔSBE có $DG//BE$ $\Rightarrow \dfrac{SD}{SE}=\dfrac{DG}{BE}$.

ΔAEI có $DK//IE$ $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{DK}{IE}$.

$OE \perp BI \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{IE} \Rightarrow BE=IE$. Do đó $DK=DG$.

Mà $MK=MG, NK=NG$ (tứ giác $KMGN$ là hình thoi).

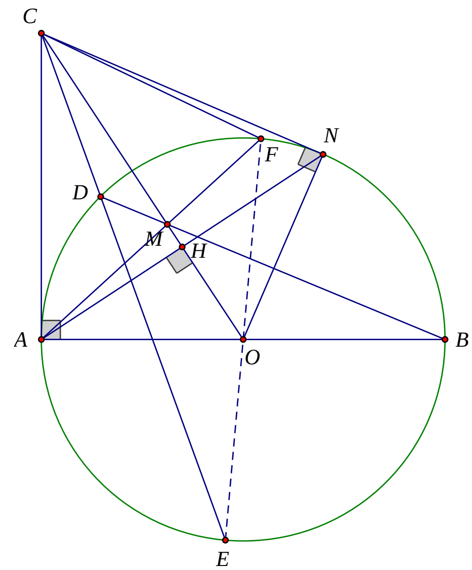
$\Rightarrow D, M, N$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn KG.

$\Rightarrow D, M, N$ thẳng hàng.

Ví dụ 5

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm C. Vẽ cát tuyến CDE (tia CD nằm giữa hai tia CA, CO; $D, E \in (O)$, D nằm giữa C, E). Gọi M là giao điểm của CO và BD. Gọi F là giao điểm của AM và đường tròn (O), $F \neq A$. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Giải



Vẽ CN là tiếp tuyến của $(O),(N$ khác $A)$.

Ta có: $CA=CN$, CO là tia phân giác của $\widehat{CAN}$.

$\Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{MNC}$ (tính chất trục đối xứng) mà $\widehat{ANB}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có: $CO\perp AN, BN\perp AN \Rightarrow CO//BN$

$\Rightarrow \widehat{CMD}=\widehat{NBD}$ mà $\widehat{CND}=\widehat{NBD}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\widehat{CMD}=\widehat{CND}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CMND$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDE}=\widehat{MNC}$.

Ta có: $\widehat{BDE}=\widehat{MAC}(=\widehat{MNC}), \widehat{BDE}=\widehat{BAE}$

$\Rightarrow \widehat{MAC}=\widehat{BAE}$

Ta có: $\widehat{FAE}=\widehat{BAF}+\widehat{BAE}=\widehat{BAF}+\widehat{MAC}=90^o$

$\Rightarrow EF$ là đường kính của đường tròn (O).

Vậy ba điểm A,E,F thẳng hàng

Tiêu chuẩn 5: Sử dụng các điểm phụ:

+ Để chứng minh 3 điểm A,B,C thẳng hàng, nếu ta xác định được điểm D khác A,B,C mà 2 trong 3 bộ ba điểm A,B,D hoặc A,C,D hoặc B,C,D thẳng hàng thì suy ra A,B,C,D thẳng hàng, dẫn đến A,B,C thẳng hàng.

+ Một cách khác ta cũng thường xuyên dùng đó là: Giả sử điểm C thuộc hình (H). Giả sử AB cắt hình (H) tại C'. Chứng minh C' có các tính chất như C. Từ đó suy ra $C\equiv C'$ dẫn đẫn đến A,B,C thẳng hàng.

Ví dụ 1

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC của đường tròn $(O),\left(B,C\in(O)\right)$. Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn $(O),\left(D,E\in(O)\right)$, $(AD<AE)$ sao cho tia AD nằm giữa hai tia AO,AB. Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng ba điểm A,O,H thẳng hàng.

Giải

+ Gọi H' là giao điểm của AO và BC, D,F đối xứng qua OA

$\Rightarrow OF=OD=R\Rightarrow F$ thuộc đường tròn (O) và có $\widehat{AH'D}=\widehat{AH'F}$

AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AO \perp BC$

+ Xét ΔABD và ΔAEB có: $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{BAD}$ chung

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEB(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$.

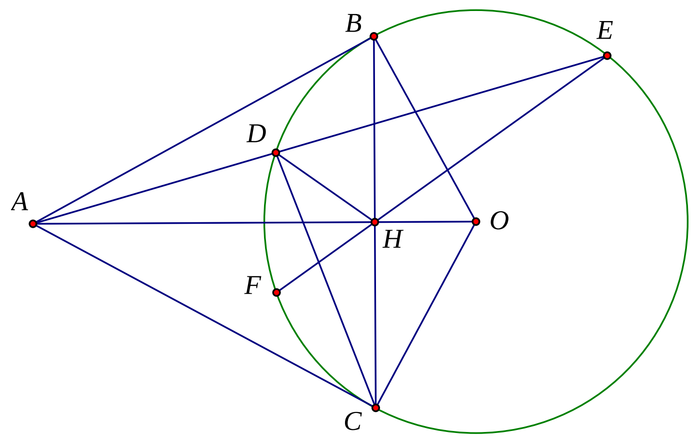
ΔABO vuông tại B, BH' là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH'.AO$.

Do đó: $AD.AE = AH'.AO(= AB^2)$.

+ Xét $\Delta ADH'$ và ΔAOE có: $\widehat{DAH'}$ chung

$\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH'}{AE}$ (vì $AD.AE = AH'.AO$)



Do đó $\Delta ADH' \# \Delta AOE(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ADH'} = \widehat{AOE} \Rightarrow$ tứ giác $DH'OE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AH'D} = \widehat{OED}$, $\widehat{OH'E} = \widehat{ODE}.$ Mà $OD = OE = R \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{ODE}$ do đó $\widehat{AH'D} = \widehat{OH'E}$ vì vậy $\widehat{AH'F} = \widehat{OH'E}$. Ta có $\widehat{EH'F} = \widehat{AH'F} + \widehat{AH'E} = \widehat{OH'E} + \widehat{AH'E} = 180^0$

$\Rightarrow E, H', F$ thẳng hàng . Vậy $H' \equiv H.$ Do đó A, H, O thẳng hàng.

Ví dụ 2

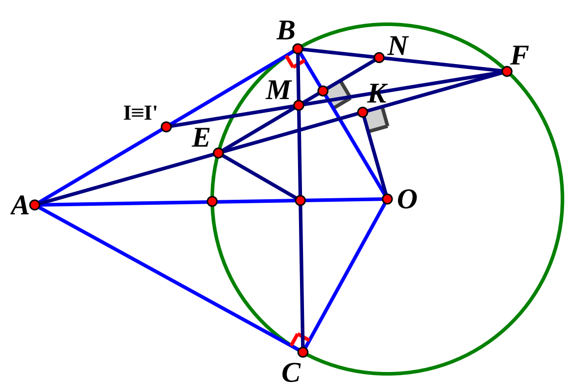
Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O), $(B, C \in (O))$, vẽ cát tuyến AEF của đường tròn $(O)\left(E, F \in (O)\right)$ và $AE < AF$ tia AE nằm giữa hai tia AO, AB. Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với OB cắt BC, BF lần lượt tại $M, N.$ Gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng ba điểm F, M, I thẳng hàng.

Giải

+ Vẽ $OK \perp EF$ tại $K \Rightarrow K$ là trung điểm của EF, $\widehat{ABO} = \widehat{AKO} = 90^0 \Rightarrow A, B, K, O, C$ cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{MCK}$. Mà $AB \perp OB, EN \perp OB$

$\Rightarrow AB // EN \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{MEK}$



+ Ta có $\widehat{MCK}=\widehat{MEK}\left(=\widehat{BAK}\right)\Rightarrow$ tứ giác $EMKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECM}=\widehat{EKM}$ mà $\widehat{ECM}=\widehat{EFB}$ nên $\widehat{EKM}=\widehat{EFB}\Rightarrow MK\,//\,BN$, ΔEFN có $KM\,//\,NF,\, EK=KF\ \Rightarrow EM=MN$.

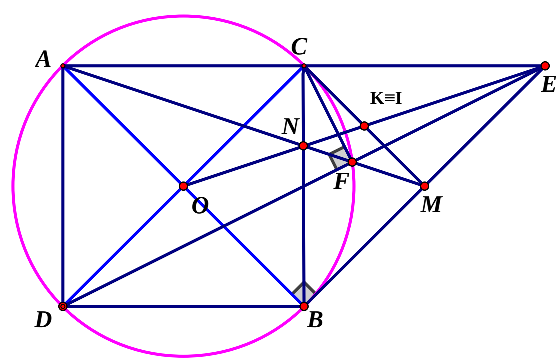
Gọi I' là giao điểm của FM và AB, $\dfrac{EM}{AI'}=\dfrac{MN}{I'B}\left(=\dfrac{FM}{FI'}\right)\Rightarrow AI'=I'B$.

Vậy $I\equiv I'$ do đó F, M, I thẳng hàng.

Ví dụ 3

Cho đường tròn (O) có AB và CD là các đường kính . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AC ở E. DE cắt đường tròn (O) ở F (F khác D). Gọi M là giao điểm của AF và BE, N là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng ba điểm E, N, O thẳng hàng.

Giải



Ta có $\widehat{CFD}=90^0, \widehat{AFB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{CEF}=90^0$, $\widehat{BMF}=\widehat{ABF}$ mà $\widehat{ECF}=\widehat{ABF}$ (tứ giác $ABFC$ nội tiếp)

Nên $\widehat{BMF}=\widehat{ECF}\left(=\widehat{ABF}\right)$

$\Rightarrow$ tứ giác $CEMF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CME}=\widehat{CFE}=90^0$

Ta có : $\widehat{CME}=\widehat{ABE}=90^0\Rightarrow CM\,//\,AB$

+ Gọi I là giao điểm của ON và CM , K là giao điểm của OE và CM , Do $CM\ //\ AB.$ Áp dụng hệ quả của định lí Ta lét .

Ta có $\dfrac{CI}{OB}=\dfrac{NI}{NO}=\dfrac{IM}{OA}\Rightarrow CI=CM$ và $\dfrac{CK}{OA}=\dfrac{EK}{EO}=\dfrac{KM}{OB}\Rightarrow CK=KM$. Do vậy $I\equiv K$

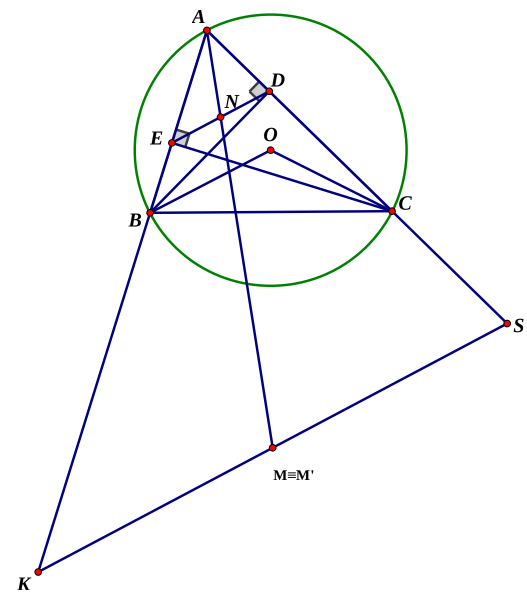
Vậy ba điểm E, N, O thẳng hàng.

Chú ý rằng : *Bài toán này thực chất là bổ đề hình thang.*

Ví dụ 4

Cho tam giác nhọn ABC (AB, AC) nội tiếp đường tròn (O) các đường cao BD, CE. Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến vẽ từ B, C của đường tròn, N là trung điểm của đoạn thẳng DE. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.

Giải



+ Qua M kẻ đường thẳng song song với DE cắt AB, AC lần lượt tại K, S. Gọi Cx là tia đối của tia CM.

+ Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BDEC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}, \widehat{AED} = \widehat{ACB}.$ Mà $\widehat{ADE} = \widehat{MSC}$, $\widehat{AED} = \widehat{BKM}$ (đồng vị $DE//KS$). Ta có $\widehat{ACx} = \widehat{ABC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ACx} = \widehat{MCS}$ (đối đỉnh) do đó $\widehat{MCS} = \widehat{MSC} \Rightarrow \Delta MCS$ cân tại M $\Rightarrow MC = MS$. Tương tự $MB = MK$ mà $MB = MC$ do đó $MK = MS$. Gọi M' là giao điểm của AS và KS, $\Delta AKM'$ có $EN//KM' \Rightarrow \dfrac{EN}{KM'} = \dfrac{AN}{AM'}$,

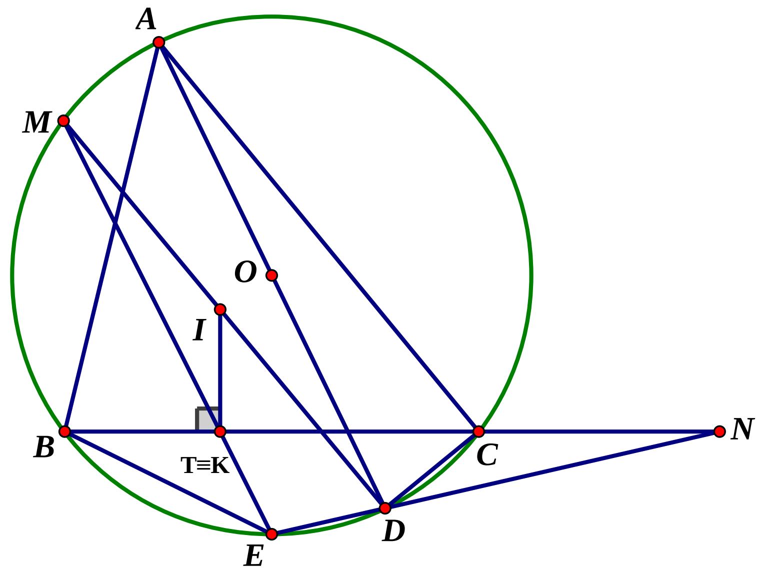
$\Delta AM'S$ có $ND//M'S \Rightarrow \dfrac{ND}{SM'} = \dfrac{AN}{AM'}$ nên $\dfrac{EN}{KM'} = \dfrac{ND}{SM'}\left(= \dfrac{AN}{AM'}\right)$. Mà $EN = ND$.

Do đó $KM' = SM'$. Ta có $M \equiv M'$. Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 5

Cho tam giác $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O), I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn AO, AI cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, DI cắt đường tròn (O) ở M. Vẽ IK vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng M, K, E thẳng hàng.

Giải



Giả sử ED cắt BC ở N , ME cắt BC ở T, $\widehat{EIB} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{CBE} + \widehat{IBC} = \widehat{EBI}$

$\Rightarrow \Delta EBI$ cân tại $E \Rightarrow EB = EI$

$\Delta EBT \# \ \Delta EMB$ ($\widehat{BET}$ chung , $\widehat{EBT} = \widehat{EMB}$)$\Rightarrow \dfrac{EB}{EM} = \dfrac{ET}{EB}; \dfrac{EI}{EM} = \dfrac{ET}{EI}$

$\Delta EIT \# \ \Delta EMI \Rightarrow \widehat{EIT} = \widehat{EMI}$

$\widehat{ENT} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{EB} - sđ\overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{EC} - sđ\overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{ED}}{2} = \widehat{EMI} = \widehat{EIT} \Rightarrow EITN$ nội tiếp

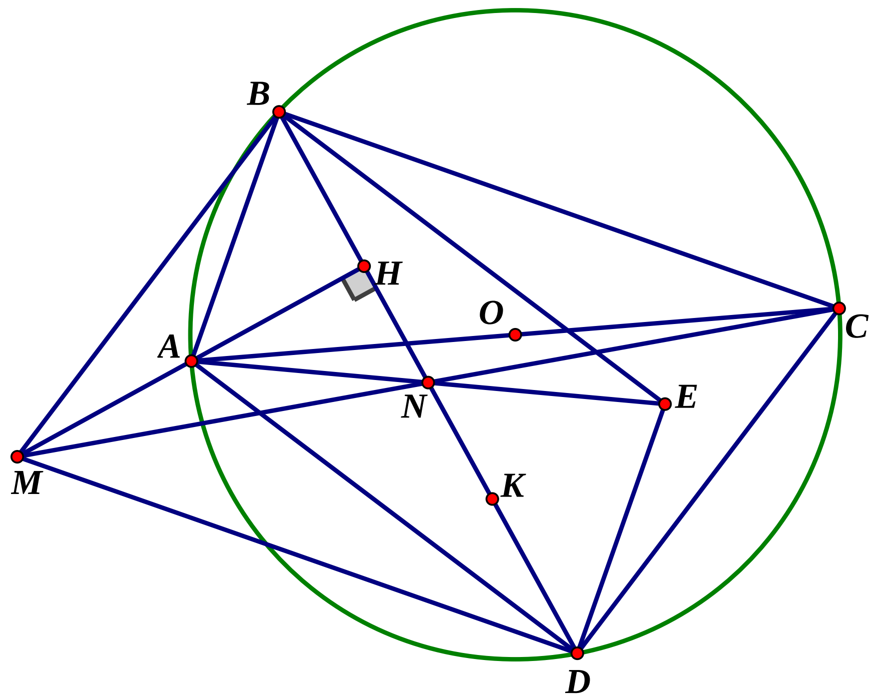
$\Rightarrow \widehat{ITN} = \widehat{IEN} = 90^0 \Rightarrow IT \perp BC$, do đó $T \equiv K$. Vậy M, K, E thẳng hàng.

Tiêu chuẩn 6: Sử dụng tính chất của các phép biến hình như đối xứng trục, đối xứng tâm , quay, vị tự ….biến một đường thẳng thành một đường thẳng. Từ đó nếu tìm được một trong các phép biến hình đó biến ba điểm thẳng hàng A_1, B_1, C_1 thành ba điểm A, B, C thì ta có ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 1

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$. Kẻ $AH \perp BD$. Lấy K thuộc BD sao cho $BH = DK$. Dựng hình bình hành $ABED$. Chứng minh rằng E, K, C cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD.

Giải



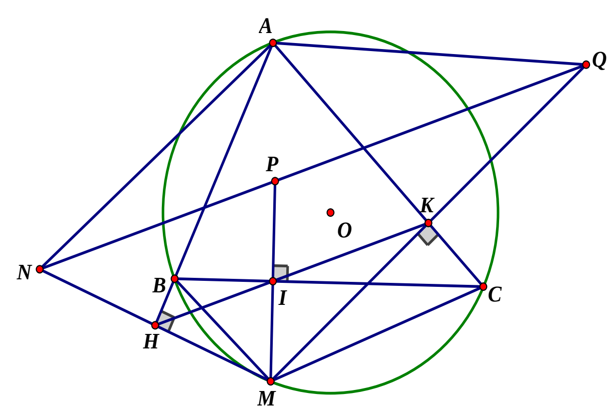
Gọi M là trực tâm ΔABD. Dễ thấy tứ giác $BMDC$ là hình bình hành (vì các cặp cạnh đối tương ứng song song với nhau). Gọi N là giao điểm của $BD,\ MC$ suy ra N là trung điểm của $BD,\ MC$. Ta thấy phép đối xứng tâm N biến A thành E, M thành C và H thành K (theo giả thiết . Mặt khác A, M, H cùng nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này vuông góc với BD, từ đó ta có đpcm

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , M là điểm bất kì thuộc đường tròn. Gọi N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, BC, CA. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Giải

Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, CA thế thì H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simson)

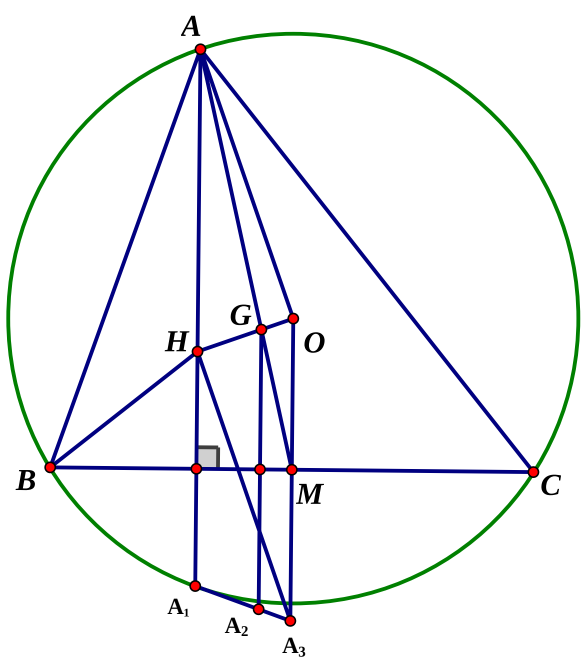


Ta thấy rằng : Phép vị tự tâm M tỷ số bằng 2 biến các điểm H, I, K thành N, P, Q. Mà H, I, K thẳng hàng nên suy ra N, P, Q thẳng hàng . Đường thẳng đi qua N, P, Q được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC cắt H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác , AH cắt đường tròn (O) tại A_1. Lấy A_2 là điểm đối xứng của G qua BC. Vẽ hình bình hành AHA_3O. Chứng minh A_1, A_2, A_3 thẳng hàng.

Giải



Ta có các kết quả quen thuộc

(Xem thêm phần các định lí hình học nổi tiếng) , A_1 đối xứng với H qua BC và $AH//=2OM$

(M là trung điểm BC)

Theo giả thiết AHA_3O là hình bình hành nên A_3 đối xứng với O qua đường thẳng BC.
Vậy phép đối xứng trục BC biến H thành A_1; G thành A_2 ; O thành A_3.

Mặt khác do tính chất của đường thẳng Ơ – le thì H,G,O thẳng hàng. Từ đó ta có A_1,A_2,A_3 thẳng hàng.

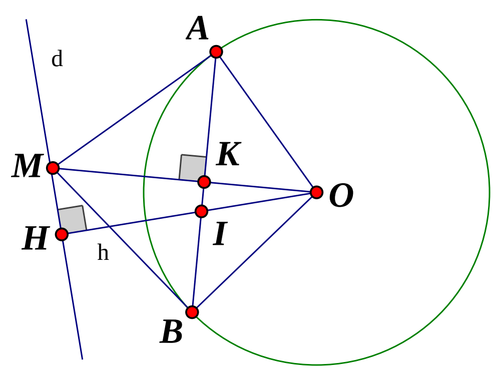
Bài 1.

Từ điểm M thuộc đường thẳng (d) ở ngoài đường tròn $(O;R)$ sao cho khoảng cách từ điểm O đến (d) bằng không đổi ta kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (Với A, B là các tiếp điểm).

a. AB luôn đi qua điểm I cố định.

b. Gọi K là giao điểm của OM , AB. Chứng minh khi M di chuyển trên (d) thì K thuộc đường cố định.

Giải



a. Dựng $OH \perp (d)$ thì $OH = h$. Gọi I là giao điểm của OH và AB thì ta có:

$$\Delta OKI \backsim \Delta OHM \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OI = \frac{OK.OM}{OH}.$$

Lại có $OK.OM = OA^2 = R^2$

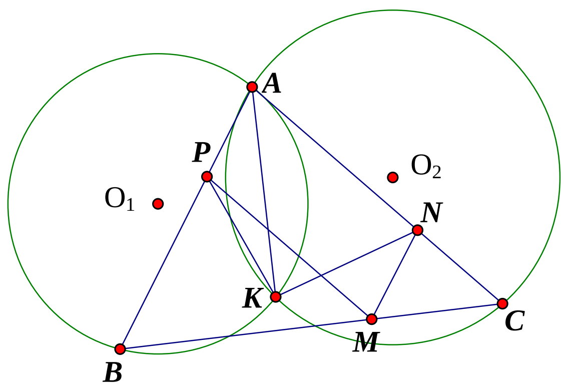
Suy ra $OI = \dfrac{R^2}{h}$. Như vậy điểm I luôn cố định.

b. Theo câu a) thì OI cố định, mặt khác $\widehat{IKO} = 90^\circ$ suy ra điểm K thuộc đường tròn đường kính OI.

Bài 2.

Cho tam giác BC và điểm M chuyển động trong đoạn BC. Lấy hai điểm N, P trên AC, AB để $ANMP$ là hình bình hành. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua điểm cố định.

Giải



Dựng (O_1) qua B tiếp xúc với AC tại A.

Dựng (O_2) qua B tiếp xúc với AB tại A.

Giả sử (O_1) cắt nhau tại giao điểm thứ hai là K thì K là điểm cố định.

Ta có: $\widehat{KAB}=\widehat{KCA}$, $\widehat{KCA}=\widehat{KBA}$ (1) suy ra $\Delta KAB \backsim \Delta CA \Rightarrow \frac{KA}{KB}=\frac{AB}{AC}$ (2)

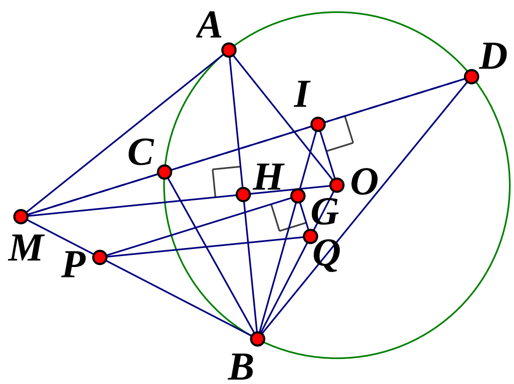
Vì $ANMP$ là hình bình hành nên theo định lý Thales ta có:
$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{BP}{PA}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{BC}{PA+PB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{PB}{AB}=\frac{AN}{NC}\Leftrightarrow\frac{BP}{AN}=\frac{AB}{AC}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta KBP \backsim \Delta KAB \Rightarrow \widehat{BPK}=\widehat{ANK}\Rightarrow ANPK$ nội tiếp suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua điểm cố định.

Bài 3.

Từ điểm M ở ngoài đường tròn $(O;R)$ ta kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (Với A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD đến (O) sao cho $MC<MD$ và tia MC nằm giữa hai tia

MO, MA. Giả sử M cố định, khi cát tuyến MCD thay đổi thì trọng tâm G của tam giác BCD luôn nằm trên đường tròn cố định.

Giải



Gọi I là trung điểm của CD, ta có $\dfrac{BG}{BI}=\dfrac{2}{3}$

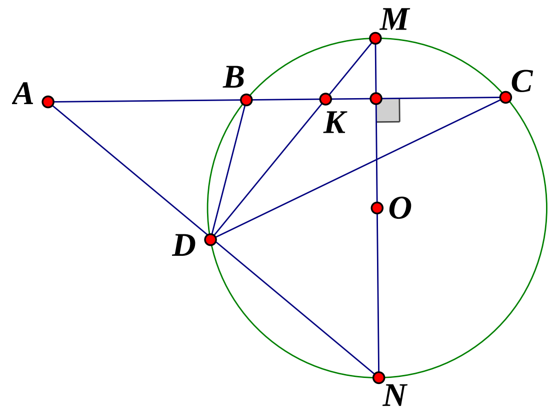
Qua G kẻ các đường thẳng song song với $IO,\, MD$ cắt $OB,\, MB$ lần lượt tại $Q,\, R$.

Ta có các điểm $B,\, O,\, M$ cố định, suy ra $P,\, Q$ cố định và $\widehat{PGQ}=90^\circ$. Suy ra G thuộc đường tròn đường kính $PQ=\dfrac{2}{3}MO$.

Bài 4.

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C. Vẽ đường kính MN vuông góc với BC tại H. Tia AN cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D. Khi đó MD luôn đi qua một điểm cố định nằm trên BC.

Giải



Ta có: $\Delta ADK \backsim \Delta AHN \Rightarrow AK.AH = AD.AN$

Mặt khác ta cũng dễ chứng minh được: $AB.AC = AD.AN$. Từ đó suy ra $AB.AC = AK.AH$

Hay $AK = \dfrac{AB.AC}{AH}$ không đổi. Suy ra điểm K cố định. Hay MD đi qua điểm cố định K.

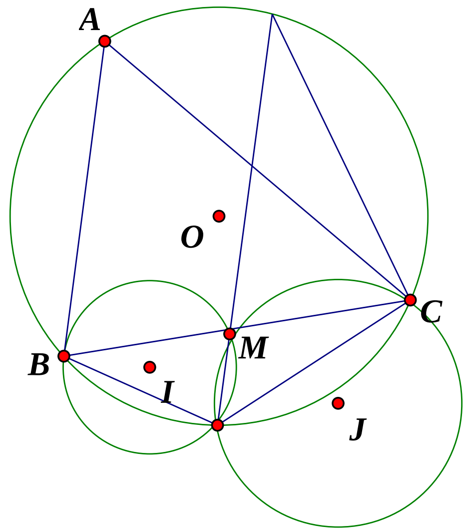
Bài 5.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Trên cạnh BC lấy điểm M. Dựng (O_1) qua M tiếp xúc với AB tại A. Dựng (O_2) qua M tiếp xúc với AC tại A. Hai đường tròn này cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là N. Khi đó:

a. Điểm N nằm trên (O).

b. Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh BC.

Giải



a. Ta có: $\widehat{NBM} = \widehat{ABC}$, $\widehat{MNC} = \widehat{ACB}$. Tứ giác $ABNC$ có
$\widehat{BAC} + \widehat{BNC} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$

Suy ra tứ giác $ABNC$ nội tiếp. Nói cách khác điểm N thuộc đường tròn (O) cố định.

b. Ta có: $\widehat{DAC} = \widehat{DNC}$ (cùng chắn cung DC).

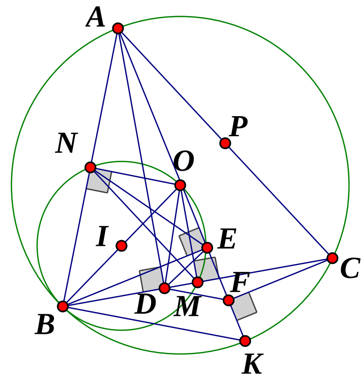
Mặt khác ta cũng có: $\widehat{DNC} = \widehat{ACB}$ suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$. Suy ra $AD // BC$, do đó điểm D là điểm cố định.

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định là D.

Bài 6.

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O;R)$. Dựng đường cao AD của tam giác và đường kính AK của (O). Hạ BE, CF lần lượt vuông góc với AK. Cho BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Giải



Vì $\widehat{ABD}=\widehat{AEB}=90^\circ$ suy ra 4 điểm A,B,D,E nằm trên đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm N của AB. $\widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^\circ$ nên 4 điểm A,B,F,C nằm trên đường tròn đường kính AC có tâm là trung điểm P của AC.

Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của BO thì $ON\perp AB$, $OM\perp BC$ suy ra 5 điểm N,O,E,M,B nằm trên đường tròn đường kính BO.

Ta có: $\widehat{MNE}=\widehat{MBE}\equiv\widehat{DBE}=\widehat{DAE}=\frac{1}{2}\widehat{DNE}$ suy ra MN là phân giác của góc $\widehat{DNE}$. Tam giác DNE cân tại N suy ra MN cũng là trung trực của DE, tương tự ta cũng có MP là trung trực của DF. Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Vậy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M cố định.

Bài 7.

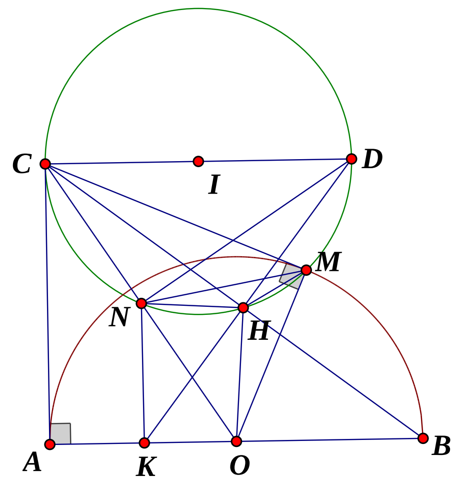
Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là điểm thuộc (O) (M khác A,B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của (I).

a. Chứng minh: O,M,D thẳng hàng.

b. Chứng minh: Tam giác COD cân

c. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định M khi di động trên đường tròn (O).

Giải



a. Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MC \perp O$ (1)

Xét đường tròn (I): Ta có $\widehat{CMD} = 90°$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow MO//MD \Rightarrow MO$ và MD trùng nhau $\Rightarrow O, M, D$ thẳng hàng.

b. CA là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow CA \perp AB$ (3). Đường tròn (I) tiếp xúc với AC tại $C \Rightarrow CA \perp CD$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow CD//AB \Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{COA}$ (*)

(hai góc so le trong)

CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của $(O) \Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{COD}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{DCO} \Rightarrow \Delta COD$ cân tại D.

** Thực nghiệm hình vẽ cho thấy đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua trung điểm K của AO. Ta chứng minh điều này như sau:

c. Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H, N giao điểm của CO và (I). Ta có $\widehat{CHD} = 90° \Rightarrow H \in (I)$ (bài toán quỹ tích) $DH \cap AB = K \Rightarrow \widehat{CND} = 90°$ và ΔCOD cân tại D, $NC = NO$. Ta có tứ giác $NHOK$ nội tiếp.

+ Vì $\widehat{H_2} = \widehat{O_1} = \widehat{DCO}$ (cùng bù với $\widehat{DHN}$) $\Rightarrow \widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180°$ (5). Ta có $\widehat{NDH} = \widehat{NCH}$ (cùng chắn cung NH của đường tròn (I)) (g.g)$\Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{OB}{OC}$. Tương tự ta có: $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OC}; \frac{OA}{OC} = \frac{CN}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow \frac{HN}{HD} = \frac{ON}{CD}$. Mà $\widehat{ONH} = \widehat{CDH} \Rightarrow \Delta NHO \backsim \Delta DHC$ (c.g.c)

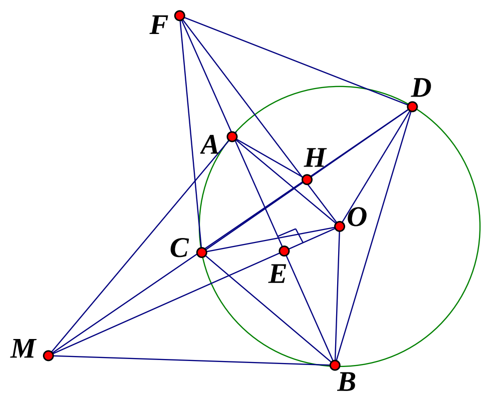
$\Rightarrow \widehat{NHO} = 90^\circ$ mà $\widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^\circ$ (5) $\Rightarrow \widehat{NKO} = 90^\circ \Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK // AC$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$ Đpcm.

Bài 8.

Cho đường tròn $(O;R)$ và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Một điểm M di động trên tia đối của tia DC. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi H là trung điểm của CD và giao điểm của AB với OM, OH lần lượt là E, F. Tam giác OBM vuông tại B, đường cao BE. Suy ra $OE.OM = OB^2 = R^2$ (1)

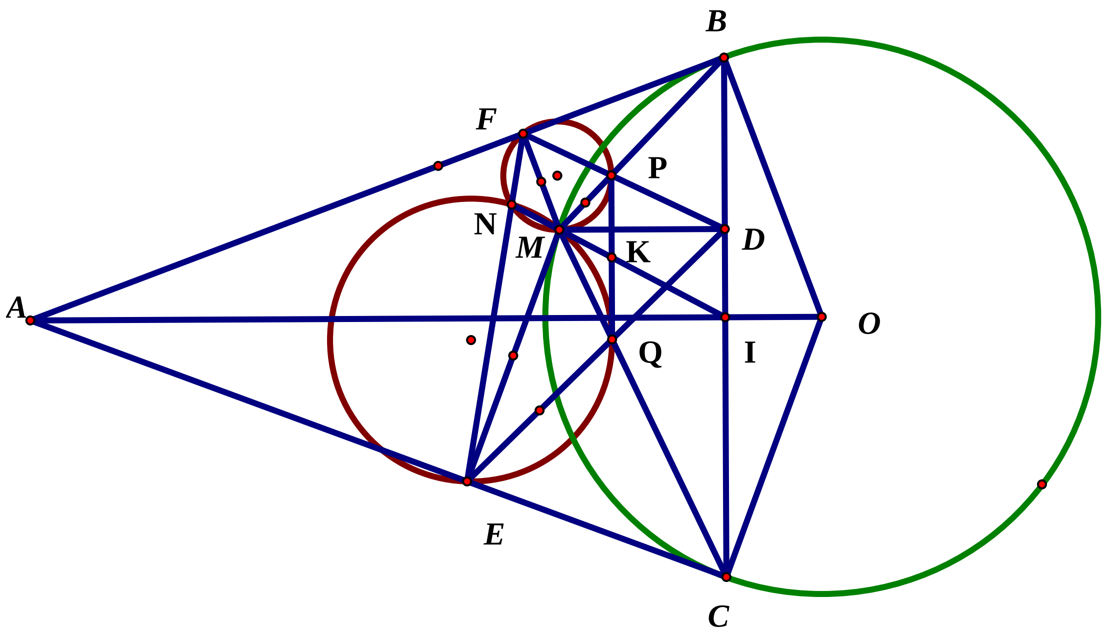
Do $\widehat{FHM} = \widehat{FEM} = 90^\circ$ nên tứ giác $MEHF$ nội tiếp.

Từ hai tam giác vuông OMH, OEF đồng dạng, suy ra $\dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OM}{OF} \Rightarrow OF = \dfrac{OE.OM}{OH}$ (2) . Từ (1) và (2) suy ra $OF = \dfrac{R^2}{OH}$. Do đường tròn (O), đường thẳng d cho trước nên OH không đổi. Suy ra OF không đổi, điểm F cố định. Do đó đường thẳng AB đi qua điểm F cố định.

Bài 9

Cho đường tròn tâm O. Từ điểm A cố định ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC, AC, AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE cắt nhau tại M, N.

Đường thẳng MN cắt PQ, BC theo thứ tự tại K và I.

Ta có các tứ giác $MDCE$, $MDBF$ nội tiếp nên $\widehat{MCE} = \widehat{MDE} = \widehat{MBC}$, $\widehat{MBF} = \widehat{MDF} = \widehat{MCB}$.

Suy ra $\widehat{PMQ} + \widehat{PDQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{PDM} + \widehat{QDM} = \widehat{PMQ} + \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 180^\circ$.

Do đó tứ giác $MPDQ$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MCB} = \widehat{MEQ}$.

Suy ra KQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMQE.

Tương tự KP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMFP.

Ta có $KM.KN = KQ^2$, $KM.KN = KP^2$.

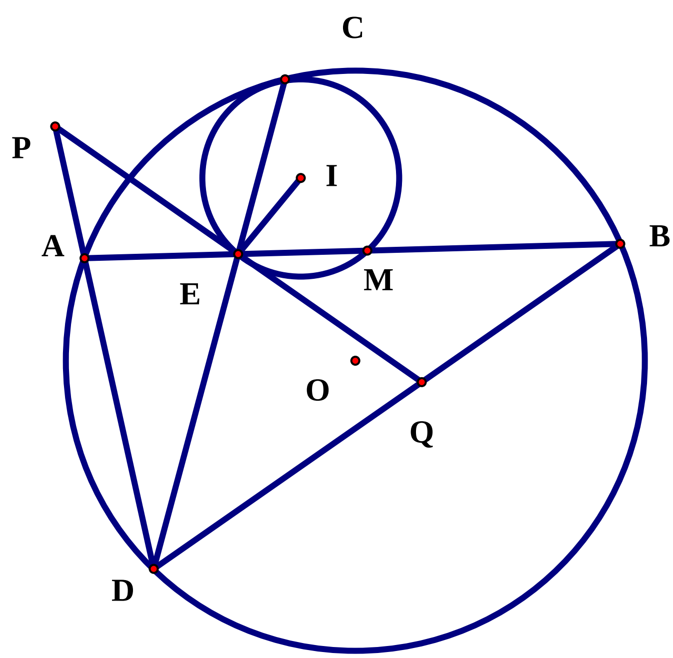
Suy ra $KP = KQ$. Xét tam giác MBC, $PQ \parallel BC$, $KP = KQ$.

Theo định lý Thales suy ra I là trung điểm BC.

Vậy MN đi qua điểm cố định I là trung điểm BC.

Bài 10 Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của (O). Trên hai tia DA, DB lấy P, Q đối xứng qua E. Chứng minh rằng đường tròn (I) đi qua C tiếp xúc với PQ tại E luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB.

Giải



Gọi M là giao điểm của AB và đường tròn (I) EP là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{CMA} = \widehat{PEC} = \widehat{QED}$.

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Suy ra $\Delta CMA \backsim \Delta QED$ $(g.g)$.

$\Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{DE}{QE}$ (1). Tương tự $\widehat{DEP} = \widehat{BMC}$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ nên $\Delta BMC \backsim \Delta DEP$ $(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{DE}{PE} = \dfrac{DE}{QE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{BM}{CM} \Rightarrow AM = BM$.

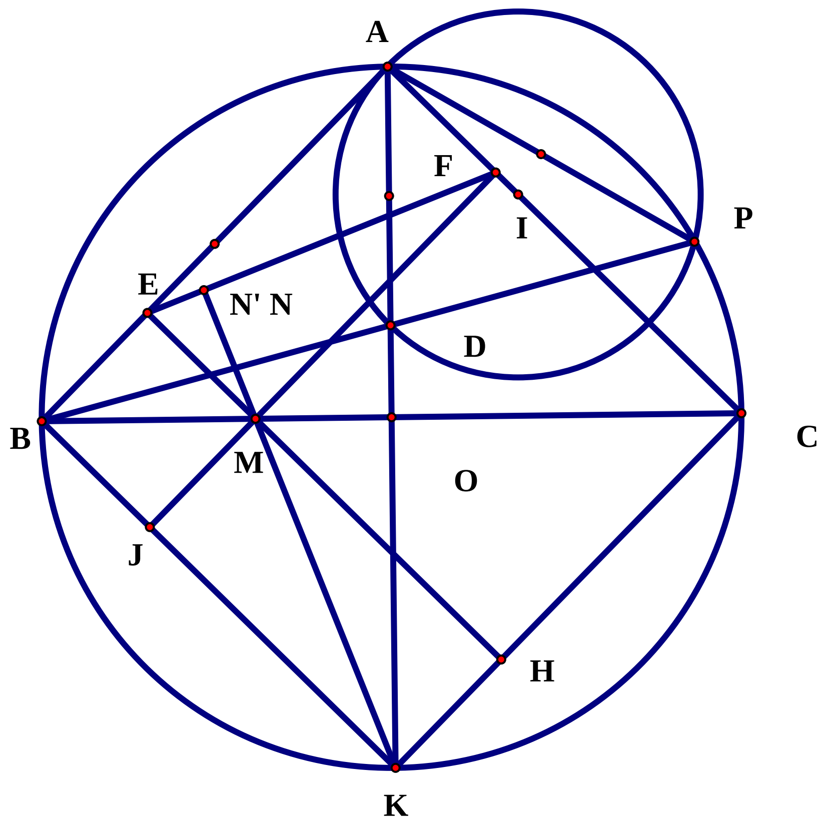
Do đó đường tròn (I) luôn đi qua trung điểm M của AB là điểm cố định

Bài 11 Cho đường tròn (O) đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa cung BC, điểm M thuộc đoạn BC. Kẻ ME, MF lần lượt vuông góc với AB, AC, MN vuông góc với EF tại N.

a).Khi M di chuyển trên BC, hãy chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b).Lấy điểm D thuộc đoạn OA, tia BD cắt đường tròn tại giao điểm thứ 2 là P. Chứng minh khi D di chuyển trên OA thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp APD luôn thuộc đường thẳng cố định.

Giải



a). Dựng đường kính AK của (O). Ta chứng minh MN đi qua K. Giả sử FM cắt BK tại J, EM cắt KC tại H. Do $ABKC$ là hình vuông nên $BEMJ$ là hình vuông. Suy ra $\Delta EMF = \Delta KHM$, Giả sử KM cắt EF tại N' thì $\widehat{JMK} = \widehat{N'MF}$ lại có

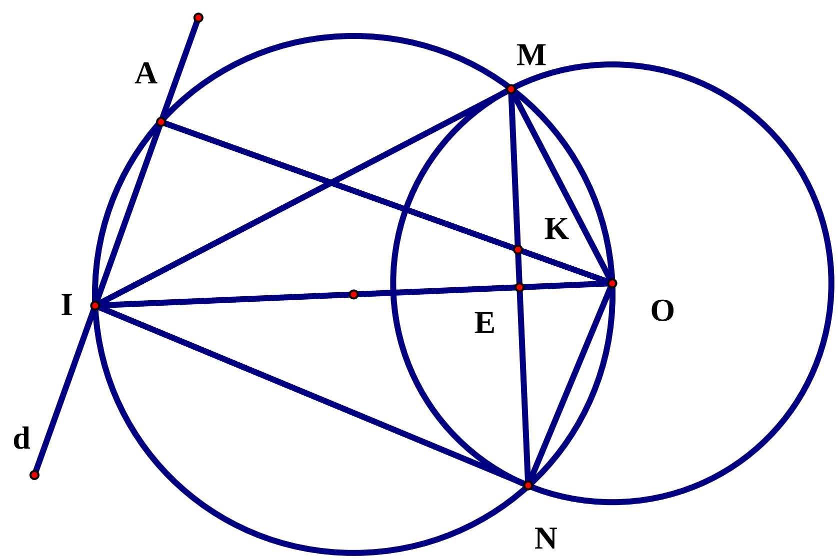
$\widehat{MFE} = \widehat{HMK}$ suy ra $\widehat{N'MF} + \widehat{MFE} = \widehat{JMK} + \widehat{HMK} = 90°$ hay $KM \perp EF$ tại N', suy ra $N \equiv N'$ tức là N, M, K thẳng hàng, suy ra MN luôn đi qua điểm K cố định.

b).Ta có $\widehat{APB} = \widehat{ACB} = 45°$, mà $\widehat{APB} = \frac{1}{2}\widehat{AID}$ suy ra $\widehat{AID} = 90°$, hơn nữa ta có $\widehat{DAI} = \widehat{ADI} = 45°$. Suy ra I nằm trên BC cố định.

Bài 12

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. I là một điểm di động trên d. Đường tròn đường kính IO cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Đường tròn đường kính IO, cắt đường tròn $(O;R)$ tại M, N. $\Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{INO} = 90°$ $\Rightarrow IM$, IN là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$. Gọi E là giao điểm của IO và MN thì IE cũng là đường cao của tam giác cân MIN $\Rightarrow IE \perp MN$. Xét ΔOMI ta có $\widehat{OMI} = 90°$, $ME \perp OI$ nên $OM^2 = OE.OI$. Kẻ $OA \perp d$ tại A, gọi K là giao điểm của OA và MN thì $\Delta OEK \backsim \Delta OAI$ $(g.g)$ $\Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OK}{OI}$ $\Rightarrow OA.OK = OE.OI$ (2). Từ (1)

và (2) suy ra $OK.OA = OM^2 = R^2$. Từ đó suy ra $OK = \dfrac{R^2}{OA}$ mà OA không đổi, do đó K là điểm cố định.

Bài 13

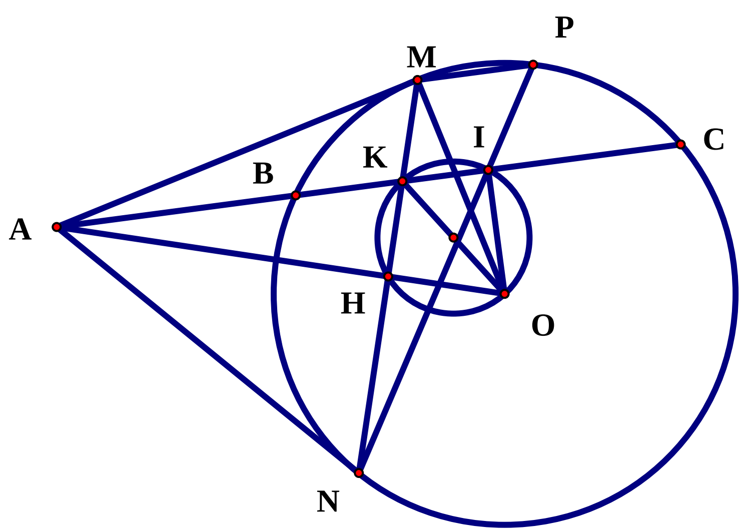
Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn qua B và C. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn. Đường thẳng MN cắt AO và AC lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh M, N di động trên một đường tròn cố định.

b) Gọi I là trung điểm BC. NI cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh $MP \parallel BC$.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải



a) Vì AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ANB} = \widehat{BCN}$ mà $\widehat{CAN}$ chung nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN$ $(g.g)$ suy ra $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC$ mà $AM = AN$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra M, N nằm trên đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{AB.AC}$ cố định.

b). $\widehat{ANO}=90^\circ$, $\widehat{AIO}=90^\circ$ nên tứ giác $AOIN$ nội tiếp đường tròn đường kính AO, suy ra $\widehat{AON}=\widehat{AIN}$. Mặt khác $\widehat{AON}=\frac{1}{2}\widehat{MON}$, $\widehat{MPN}=\frac{1}{2}\widehat{MON}$ nên $\widehat{AIN}=\widehat{MPN}$ suy ra $MP \parallel BC$.

c).Theo câu a). ta có $AN^2=AB.AC\ (1)$. Mặt khác ΔANO vuông tại N có $NH \perp AO$ nên $AN^2=AH.AO\ (2)$. $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (vì $\widehat{OAI}$ chung, $\widehat{AHK}=\widehat{AIO}=90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO=AI.AK\ (3)$. Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $AB.AC=AI.AK$

$\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$ mà AB, AC, AI cố định $\Rightarrow AK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định. Tứ giác $OIKH$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp ΔOHK luôn đi qua I và K cố định.

Bài 14.

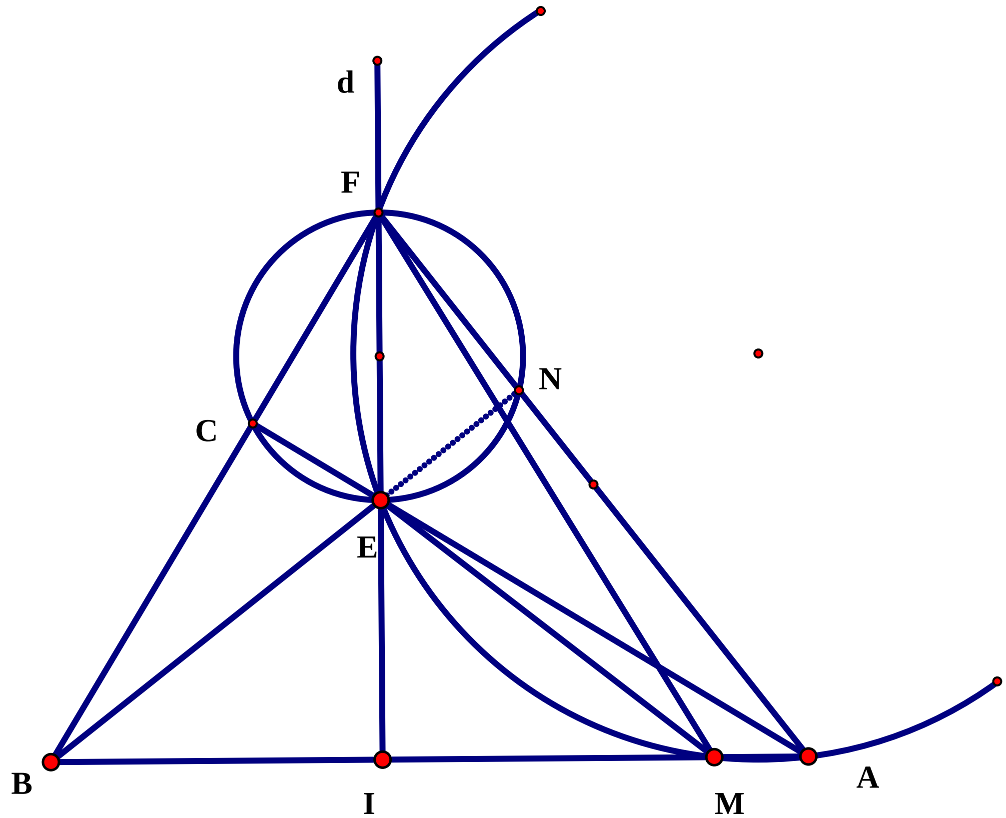
Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC<CA$. Gọi I là điểm trên AB và $IB<IA$. Kẻ đường thẳng d đi qua I và vuông góc với AB. Gọi giao điểm của d với AC, BC lần lượt là E và F. Gọi M là điểm đối xứng với B qua I

a) Chứng minh rằng ΔIME đồng dạng với ΔIFA và $IE.IF=IA.IB$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF cắt AE tại N. Chứng minh E, N, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định C thay đổi $\widehat{BCA}=90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải



a).Ta có IE là đường trung trực của $BM \Rightarrow \Delta EBM$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{EMB}$. Mà $\widehat{EBM} = \widehat{EFA}$ (cùng phụ $\widehat{FAB}$) $\Rightarrow \Delta IME \backsim \Delta IFA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{IM}{IF} = \dfrac{IE}{IA} \Rightarrow IE.IF = IA.IM$

$\Rightarrow IE.IF = IA.IB$

b).Ta có $\widehat{ECF} = 90° \Rightarrow \widehat{ENF} = 90°$. Xét ΔBAE có EI, AC là các đường cao cắt nhau tại F nên $BF \perp EA$ mà $FN \perp EA$ $\Rightarrow B, F, N$ thẳng hàng.

c).Ta có $\widehat{EMB} = \widehat{EFA}$ suy ra tứ giác $AMFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua hai điểm A, M cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn nằm trên đường trung trực của AM cố định

Bài 15

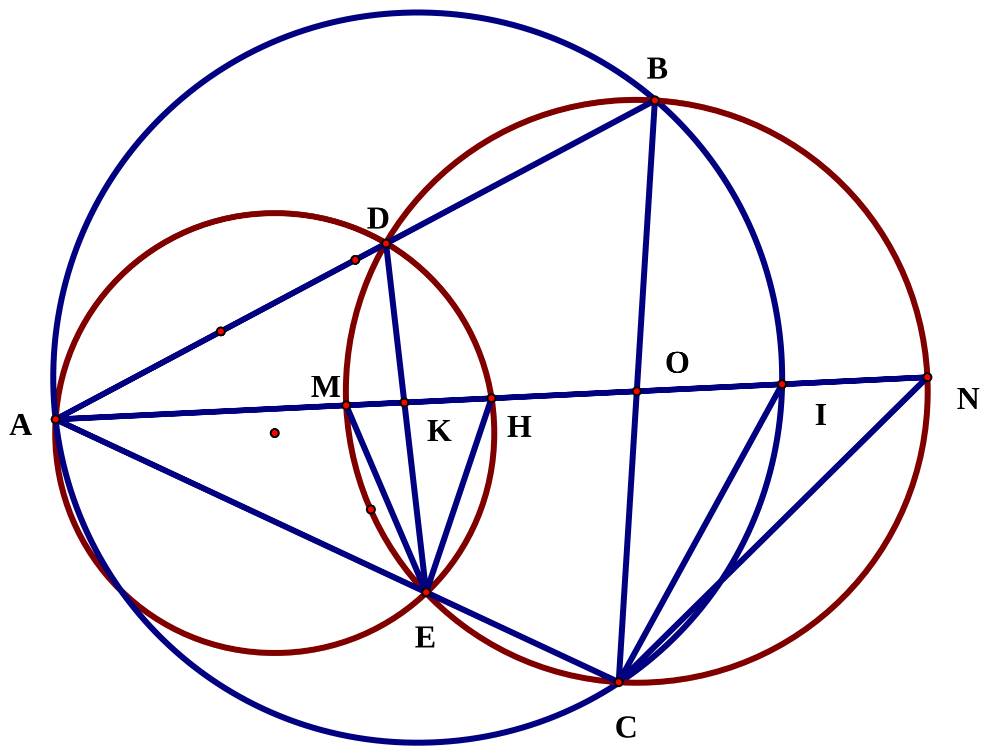
Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$. Một đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Đường thẳng AB, AC cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại D và E. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K.

a) Chứng minh rằng $OI.OA = OB.OC$ và $AK.AI = AE.AC$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng OI và AK theo R.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O.

Lời giải



a). $\Delta OIC \backsim \Delta OBA\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{OC}{OA} \Rightarrow OB.OC = OI.OA$. Xét các góc nội tiếp ta có $\widehat{ICB} = \widehat{IAB}$, $\widehat{BCE} = \widehat{EDA} \Rightarrow \widehat{ICB} + \widehat{BCE} = \widehat{IAB} + \widehat{EDA} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{EKA}$

$\Rightarrow \Delta AKE \backsim \Delta ACI\,(g.g) \Rightarrow AK.AI = AE.AC\ (1)$

b). $OB.OC = OI.OA \Rightarrow R.R = OI.2R \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}R$. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng AO với đường tròn (O) (M nằm giữa A và N) $\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACN}$

$\Rightarrow \Delta AME \backsim \Delta ACN\,(g.g) \Rightarrow AM.AN = AE.AC\ (2)$. Từ (1) và (2) suy ra

$AK.AI = AM.AN \Rightarrow AK.\dfrac{5R}{2} = R.3R \Rightarrow AK = \dfrac{6R}{5}$.

c).Gọi H là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp ΔADE với AO. Ta có

$\Delta KHE \backsim \Delta KDA\left(g.g\right) \Rightarrow KH.KA = KM.KN \Rightarrow KH.\frac{6R}{5} = \left(\frac{6R}{5} - R\right).\left(3R - \frac{6R}{5}\right) \Rightarrow KH = \frac{3R}{10}$

$\Rightarrow H$ cố định (điều phải chứng minh)

Bài 16

Cho đường tròn (O,R), một dây cung CD có trung điểm H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng SO, OH lần lượt tại E, F. Gọi I là giao điểm của AB và CD.

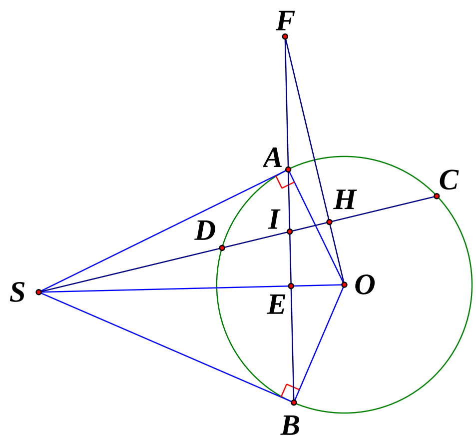
a) Chứng minh tứ giác $SEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OH.\mathrm{OF} = \mathrm{R}^2$.

c) Chứng minh $SI.SH = SC.SD$.

d) Khi S di động trên tia đối của tia DC. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a) Tứ giác $SEHF$ nội tiếp vì H và E cùng nằm nhìn FS dưới một góc vuông.

b) Ta có $\Delta OHS \backsim \Delta OEF\left(g.g\right)$ suy ra $OH.\mathrm{OF} = \mathrm{OE.OS}$.

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AOS ta có:

$$OE.\mathrm{OS} = \mathrm{OA}^2 \text{ nên } OH.\mathrm{OF} = \mathrm{OA}^2 = R^2.$$

c) Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng:

$\Delta SAD \backsim \Delta SCA(g.g) \Rightarrow SA^2 = SC.SD, \Delta SAE \backsim \Delta SOA(g.g)$
$\Rightarrow SA^2 = SE.SO, \Delta SEI \backsim \Delta SHO(g.g)$

$\Rightarrow SI.SH = SE.SO.$ Từ đó suy ra $SI.SH = SC.SD.$

c) Từ đề bài O, C, D cố định nên H cố định. Từ câu b) suy ra $OF = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi. Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là F.

Bài 17

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AO. Đường thẳng Cx vuông góc với đường thẳng AB, Cx cắt nửa đường tròn trên tại I. Gọi K là điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn tâm O tại điểm M, tiếp tuyến tại M của (O) cắt Cx tại N. Gọi D là giao điểm của BM và Cx.

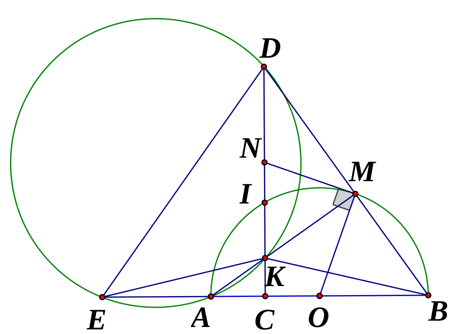
a) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác MNK cân.

c) Tính diện tích ΔABD khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI.

d) Chứng minh rằng khi K di động trên đoạn thẳng CI thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD đi qua một điểm cố dịnh khác A.

Giải



a) $\widehat{ACD} = 90^o; \widehat{AMD} = 90^o \Rightarrow A, C, M, D$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AD.$

b) MN là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{ABM}$ (góc giữa tiếp tuyens và dây cung).

Ta lại có $\widehat{NKM} = \widehat{MBA}$ (cùng phụ $\widehat{MAB}$) suy ra $\widehat{NKM} = \widehat{NMK} \Rightarrow \Delta MNK$ cân tại N.

c) Ta có ΔCOI vuông tại $C \Rightarrow IC^2 + CO^2 = OI^2$

$\Rightarrow IC^2 = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow IC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CK = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\Delta CAK \backsim \Delta CDB$. Vì $\widehat{ACD} = \widehat{BCD} = 90^o; \widehat{KAC} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với $\widehat{DBA}$)

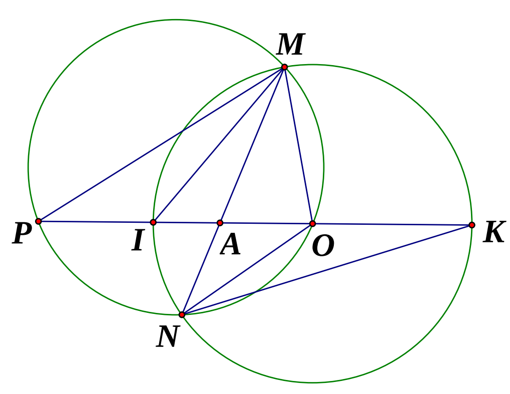
$\Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CK}{CB} \Rightarrow CD.CK = CA.CB \Rightarrow CD.\dfrac{R\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$. Do đó diện tích ΔABD là: $S = \dfrac{1}{2}AB.CD = \dfrac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$.

d) Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD cắt BA tại E. Suy ra $AKDE$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{AEK} = \widehat{ADK} = \widehat{KBA}$ nên tam giác KEB cân tại K suy ra $CE = CB$. Như vậy E là điểm cố định. Hay đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn đi qua điểm cố định E.

Bài 18

Cho đường tròn (O) và điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi đi qua A nhưng không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm M, N. Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

Giải



Gọi giao điểm của đường thẳng OA với đường tròn (O) là $I, K \Rightarrow I, K$ cố định.

Gọi giao điề của đường thẳng OA với đường tròn ngoại tiếp ΔOMN là P.

Từ $\Delta AMI \backsim \Delta AKN\,(g.g)$ suy ra $AM.AN = AK.AI \quad (1)$

Từ $\Delta AON \backsim \Delta AMP(g.g)$ suy ra $AO.AP = AM.AN \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $AO.AP = AI.AK$ hay $AP = \dfrac{AI.AK}{AO}$ mà AI, AK, AO cố định $\Rightarrow AP$ không đổi $\Rightarrow P$ là điểm cố định.

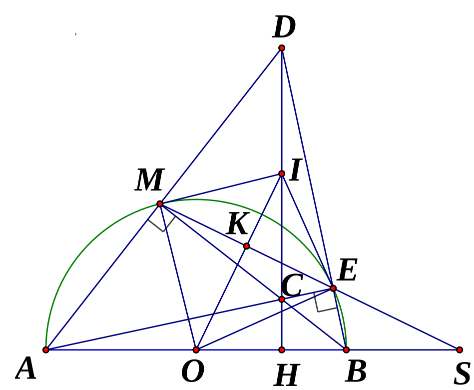
Bài 19

Cho điểm M bất kì nằm trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R,$ qua điểm H cố định trên đoạn $OB,$ vẽ đường thẳng d vuông góc với $AB.$ Gọi giao điểm của MA và (d) là $D,$ giao điểm của tiếp tuyến tại M của (O) với (d) là I và (d) cắt MB tại $C.$ Gọi E là giao điểm của AC và đường tròn $(O).$ Gọi K là giao điểm của OI và $ME.$

a) Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn $(O).$

b) Cho M di động trên đường tròn (M không trùn với $A; B$). Chứng minh rằng tích $OI.OK$ không đổi và ME luôn đi qua một điểm cố định.

<u>**Giải**</u>



a) Xét ΔABD có $BM \perp AD; DH \perp AB$

$\Rightarrow C$ là trực tâm $\Rightarrow AC \perp DB$ mà $AE \perp BE$

$\left(\widehat{AEB} = 90^o\right) \Rightarrow B, E, D$ thẳng hàng.

Tứ giác $AMCH$ có $\widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^o$

$\Rightarrow AMCH$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MCI}$ (cùng bù với $\widehat{ABM}$)

Mà MI là tiếp tuyến $\Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MAH} \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{MCI} \Rightarrow \Delta MCI$ cân tại $I \Rightarrow IM = IC \quad (1).$

Ta có $\widehat{MDI} + \widehat{DCM} = 90^o$ mà $\widehat{DCM} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{MDI} \Rightarrow \Delta IMD$ cân tại $I \Rightarrow IM = ID \quad (2).$ Từ (1) và $(2) \Rightarrow ID = IC = IM.$ ΔCDE vuông tại E có $IC = ID \Rightarrow IC = ID = IE.$ Từ đó ta có $IM = IE; OM = OE, OI$ là cạnh chung suy ra $\Delta OEI = \Delta OMI\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{OEI} = \widehat{OMI} \Rightarrow IE$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O).$

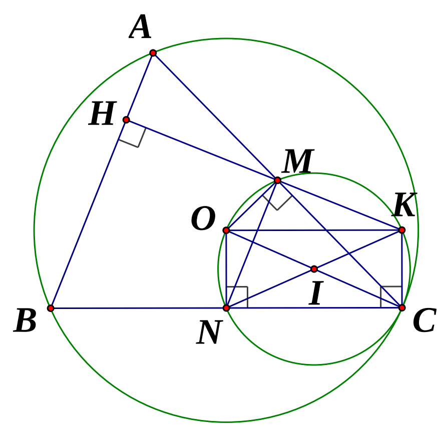
b) IM, IE là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow IO \perp ME$ tại K, ΔOMI có $\widehat{OMI} = 90^o; MK \perp OI$ nên $OM^2 = OK.OI \Rightarrow OK.OI = R^2$ không đổi. Gọi S là giao điểm của ME và AB. Xét ΔOKS và ΔOHI có $\widehat{OHI} = \widehat{OKS} = 90^o; \widehat{IOS}$ chung $\Rightarrow \Delta OKS \backsim \Delta OHI\,(g.g) \Rightarrow OK.OI = OH.\mathrm{OS}$

$\Rightarrow OH.\mathrm{OS} = \mathrm{R}^2 \Rightarrow OS = \dfrac{R^2}{OH}$. Mà OH cố định $\Rightarrow OS$ không đổi $\Rightarrow S$ cố định hay ME luôn đi qua điểm S cố định.

Bài 20

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định, A là điểm chuyển động trên cung lớn BC của $(O)(A \neq B,C)$, gọi M là trung điểm của AC, H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Chứng minh khi điểm A thay đổi trên cung lớn BC thì điểm H nằm trên một đường tròn cố định.

<u>Giải</u>

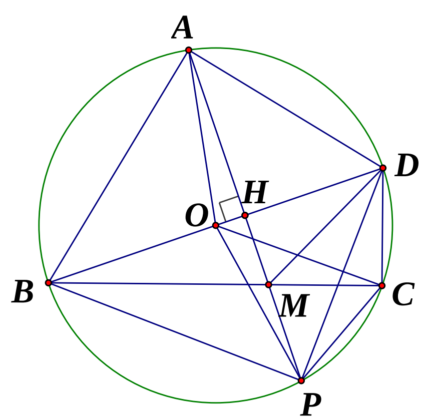


Ta có $OM \perp AC$ nên M nằm trên đường tròn đường kính OC. Gọi I là trung điểm của OC thì I cố định. Giả sử (I) cắt CB tại N thì $\widehat{ONC} = 90^o$ nên suy ra N là trung điểm của BC. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC, kết hợp với giả thiết $MH \perp AB$ suy ra $NH \perp HM$, gọi K là giao điểm của (I) với HM thì $\widehat{NMK} = 90^o$ nên NK là đường kính của (I), mà N, I cố định suy ra K cố định, NK là đường kính của (O) nên $\widehat{KCN} = 90^o$ hay $\widehat{KCB} = 90^o$, tứ giác $BCKH$ nội tiếp nên H nằm trên đường tròn đường kính KB cố định.

Bài 21

Cho ba điểm B,M,C cố định theo thứ tự nằm trên một đường thẳng. Dựng $(O;R)$ qua $B,C\left(BC<2R\right)$, qua M kẻ cát tuyến vuông góc với OB cắt (O) tại A,P. Chứng minh: A,P thuộc một đường tròn cố định.

Giải



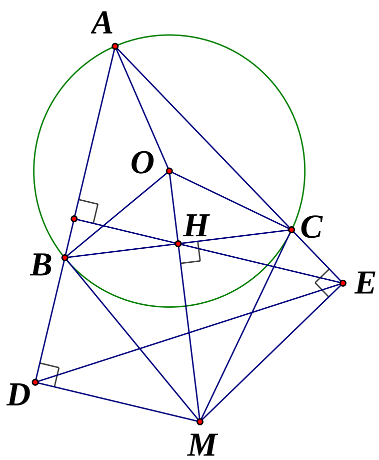
Gọi H là giao điểm của AP với OB thì H là trung điểm của $AP,$ kẻ đường kính BD của (O) thì $DA=DP$. Trong tam giác vuông BAD ta có: $BA^2=BH.BD,$ lại có tứ giác $MHDC$ nội tiếp nên $BH.BD=BM.BC$ (hệ thức quen thuộc, hs tự chứng minh).

Từ đó suy ra $BM.BC=BA^2 \Leftrightarrow BA=\sqrt{BM.BC}$ mà điểm B,M,C cố định nên $BM.BC$ không đổi và $BA=BP$ suy ra A,P nằm trên đường tròn tâm B bán kính bằng $\sqrt{BM.BC}$.

Bài 22

Cho đường tròn (O) và dây $BC=2a$ không đổi $a<R, A$ là điểm chuyển động trên cung lớn BC của $(O)(A\neq B,C)$, các tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau ở M, gọi D,E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB,AC. Chứng minh rằng: Khi điểm A thay đổi trên cung lớn BC của (O) thì trực tâm của tam giác ADE luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC thì $OM \perp BC$ tại H.

Theo giả thiết MD, ME lần lượt vuông góc với AB, AC nên $MHCE$ là tứ giác nội tiếp dẫn tới

$\widehat{HEM} = \widehat{HCM}$, lại có $\widehat{BAC} = \widehat{BCM}$

suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{HEM}$ nên

$\widehat{BAC} + \widehat{HEA} = \widehat{BAC} + 90^o - \widehat{HEM} = 90^o$

suy ra $EH \perp AB,$ tương tự $DH \perp AC$

suy ra H là trực tâm của tam giác $ADC.$

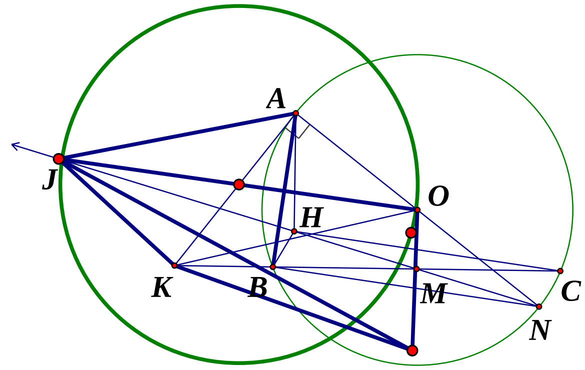
Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - \dfrac{BC^2}{4}} = \sqrt{R^2 - a^2}$ không đổi, O cố định suy ra điểm H nằm trên đường tròn $\left(O; \sqrt{R^2 - a^2}\right).$

Bài 23

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định nằm trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tuyến với đường tròn (O) tại A lấy một điểm K cố định, một đường thẳng (d) thay đổi đi qua K và không đi qua O cắt (O) tại B,C (B nằm giữa K và C). Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ đường kính AN của (O). Đường thẳng qua A vuông góc với CB cắt MN tại H. Khi đường thẳng (d) thay đổi quanh K và thỏa mãn điều kiện đề bài thì điểm H di động trên đường nào.

<u>Giải</u>

Do AN là đường kính của (O) nên O là trung điểm của AN. Lại có AH, OM cùng vuông góc với BC nên $AH // MO$ suy ra MO là đường trung bình của tam giác AHN suy ra $AH = 2OM$. Tứ giác $BH.MC$ có hai đường chéo BC, HM cắt nhau tại



CỰC TRỊ HÌNH HỌC

1. Bất đẳng thức liên hệ giữa độ dài các cạnh một tam giác.

$$|AB - AC| < BC < AB + BC$$

Chú ý rằng:

a. Với 3 điểm A, B, C bất kì ta luôn có: $AB + BC \geq AC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C.

b. Với 3 điểm A, B, C bất kì ta luôn có: $|AB - AC| \leq BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa hai điểm A, C.

c. Cho hai điểm A, B nằm về một phía đường thẳng (d). Điểm M chuyển động trên đường thẳng (d). Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua (d). Ta có kết quả sau: (Hình 1)

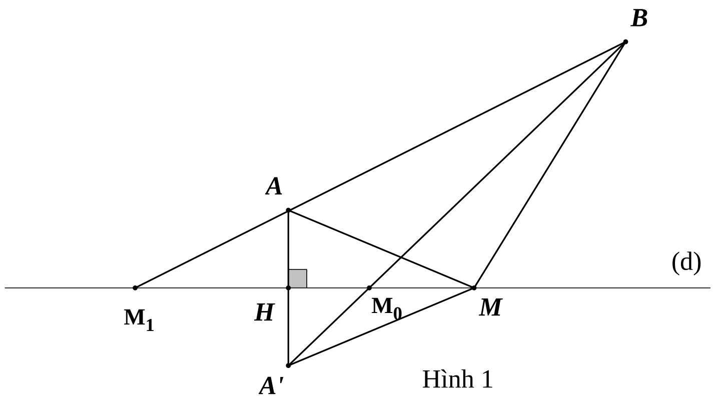
+ $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của A’B và đường thẳng (d). (M trùng với M_0)

+ $|MA - MB| \leq AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của AB và đường thẳng (d) (M trùng với M_1).

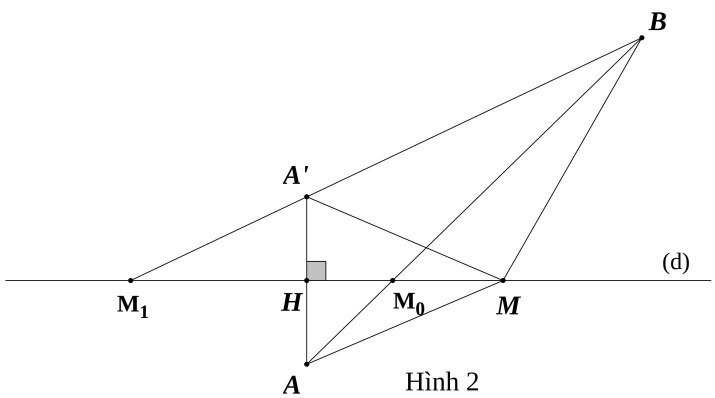
d. Cho hai điểm A, B nằm về hai phía đường thẳng (d). Điểm M chuyển động trên đường thẳng (d). Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua (d). Ta có kết quả sau: (Hình 2)

+ $MA + MB \geq AB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của AB và đường thẳng (d) (M trùng với M_0).

+ $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của A’B và đường thẳng (d) (M trùng với M_1).



Hình 1



Hình 2

e. Trong quá trình giải toán ta cần lưu ý tính chất: Đường vuông góc luôn nhỏ hơn hoặc bằng đường xiên

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

a. $MB+MC<AB+AC\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<MA+MB+MC<AB+BC+CA$

b. $BM+MN+NC<AB+AC$ trong đó điểm N nằm trong tam giác sao cho MN cắt hai cạnh AB, AC.

Hướng dẫn giải

a. Đường thẳng BM cắt AC ở P.

Áp dụng BĐT (1) ta có:

$MB+MC<MB+MP+PC=BP+PC<AB+AP+PC=AB+AC$.

b. Theo trên ta có:

$BC < MA + MB < AB + AC$; $CA < MC + MA < AB + BC$; $AB < MA + MB < AC + BC$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta có điều phải chứng minh.

c. Áp dụng câu 1) ta có:

$$BM + MN + NC < BE + EM + MN + NF + FC$$
$$= BE + FE + FC < BE + EA + +FC = AB + AC.$$

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC và 3 trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$

b. $\dfrac{3(AB + BC + CA)}{4} < AM + BN + CP < AB + BC + CA$

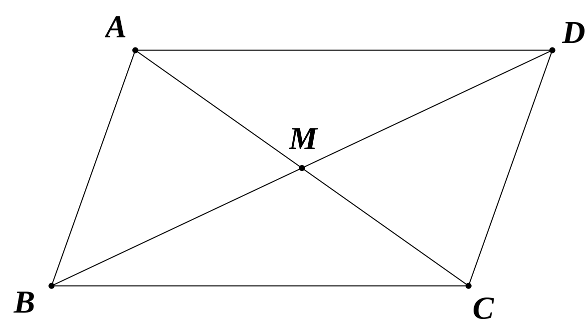
c. Giả sử $AB \geq AC$. Gọi AD, AM theo thứ tự là đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AD \leq AM < \dfrac{AB + AC}{2}$

Hướng dẫn giải

a. + Xét các tam giác MAB, MAC ta có: $AM > AB - BM$, $AM > AC - MC$.

Suy ra $2AM > AB + AC - (MC + MC) \Leftrightarrow 2AM > AB + AC - BC$

+ Gọi D là điểm đối xứng với A qua M thì ABDC là hình bình hành nên AB = CD và AD = 2AM.



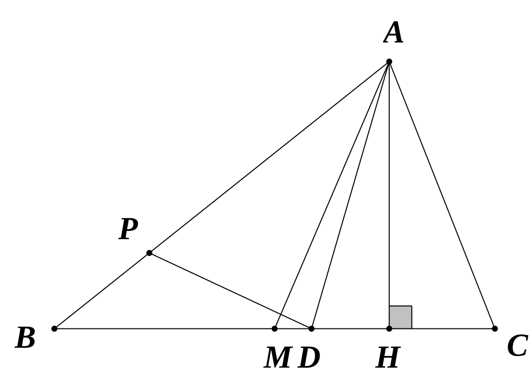
Trong tam giác ACD ta có: $AD < AC + CD \Leftrightarrow 2AM < AB + AC$

Như vậy: $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

b. Áp dụng bất đẳng thức ở câu a)

Cho ba đường trung tuyến AM, BN, CP ta có: $\dfrac{AB + AC - BC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$;

$\dfrac{BC + AB - AC}{2} < BN < \dfrac{AC + BC}{2}$; $\dfrac{BC + AC - AB}{2} < CP < \dfrac{AC + BC}{2}$



Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta có: $\frac{3(AB+BC+CA)}{4} < AM + BN + CP < AB + BC + CA$

c. Trong tam giác ABD, ADC có $AB < AD + BD; AC < AD + DC$

Cộng theo từng vế hai BĐT cùng chiều trên ta được: $AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} < AD$

Kết quả này vẫn đúng với D là điểm bất kì nằm bên trong đoạn BC.

Dựng $AH \perp BC$. Với AB = AC thì AM = AD. Với $AB > AC$ thì $BH > CH \Rightarrow BM < BH \Rightarrow$ M thuộc đoạn BH. Hơn nữa $\widehat{ADB} > \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADB}$ tù. Do đó D thuộc đoạn BH. Lấy điểm P trên AB sao cho AP = AC $\Rightarrow$ Δ ADP = Δ ADC (c.g.c) $\Rightarrow$ $DP = DC; \widehat{APD} = \widehat{ACD}$

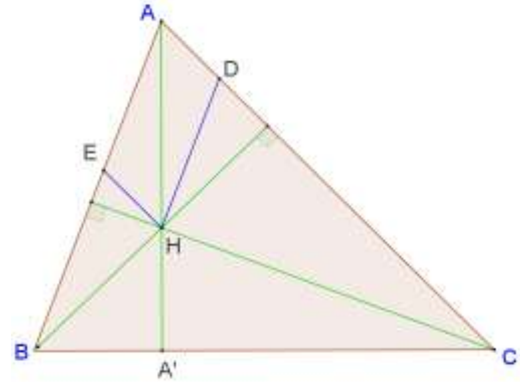
+Nếu $\widehat{ACB} \le 90^0$ (hình) thì $\widehat{APD} = \widehat{ACB} \le 90^0$ $\Rightarrow \widehat{BPD} \ge 90^0 > \widehat{ACB} > \widehat{PBD} \Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM > BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$

+ Nếu $\widehat{ACD} > 90^0$ (hình) thì $\widehat{BPD} = \widehat{ACH} > \widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ $\Rightarrow BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$

Ví dụ 3:

Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Chứng minh rằng: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$

Hướng dẫn giải:



Đường thẳng đi qua H song song với AB và cắt AC tại D.

Dựng đường thẳng qua H song sang AC cắt AB tại E.

Tứ giác $AEHD$ là hình bình hành nên $AD = HE, AE = HD$

Xét tam giác AHD ta có: $HA < HD + AD \Leftrightarrow HA < AE + AD$ (1).

Vì $HE // AC$ mà $AC \perp BH \Rightarrow HE \perp BH$.

Trong tam giác vuông HBE ta có: $HB < BE$ (2).

Tương tự ta có: $HC < DC$ (3). Cộng các bất đẳng thức cùng chiều (1), (2), (3) ta suy ra

$HA + HB + HC < (AE + EB) + (AD + DC) = AB + AC.$

Tương tự ta cũng có:

$$HA + HB + HC < AC + BC, HA + HB + HC < AB + BC \Rightarrow HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$

Ví dụ 4:

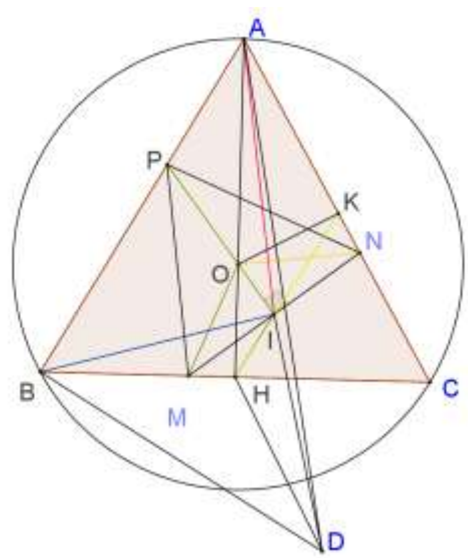
Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm của BC, M là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng $BH (M \neq B)$. Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của MN.

a. Chứng minh 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

c. Xác định vị trí của M để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2014)



Giải

a. Xét tam giác BOM và tam giác CON ta có:

$BM = CN$ *(giả thiết)*, $OB = OC = R$, $OBM = OCN = 30^0$

(do tam giác ABC đều). Suy ra $\Delta BOM = \Delta CON$ (c.g.c)

Suy ra $OM = ON$ hay tam giác OMN cân tại O,

Do I là trung điểm của MN suy ra $OI \perp MN \Rightarrow OIM = OHM = 90^0$

Nên tứ giác $OMHI$ nội tiếp

(Có hai đỉnh liên tiếp I,H cùng nhìn OM góc bằng 90^0)

b. Do điểm P nằm trên đường trung trực cạnh MN nên $PM = PN$ (1).

Ta có $180^0 = OMB + OMC = OMB + ONC$ suy ra tứ giác $OMNC$ nội tiếp *(tổng hai góc đối bằng 180^0)* nên $MON = 180^0 - NCM = 120^0$, $POM = PON = 120^0$ suy ra $POM + PBM = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $PBMO$ nội tiếp nên $OPM = OBM = 30^0$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $OPN = OAN = 30^0 \Rightarrow MPN = 60^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác PMN là tam giác đều.

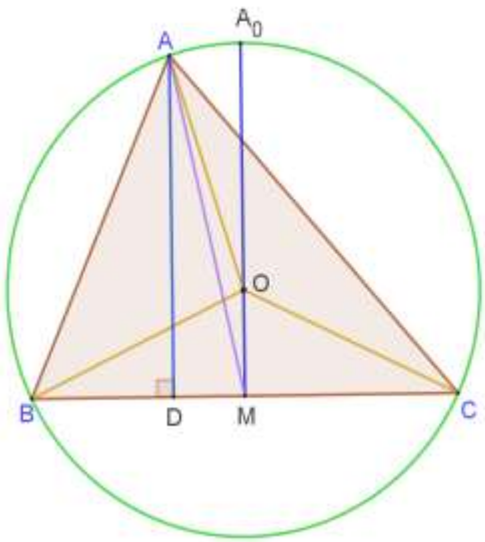
c. Từ chứng minh ở câu a, b suy ra $OMN = OHI = OCN = 30^0$. Suy ra $HI // AB$, gọi K là trung điểm của AC thì H, I, K thẳng hàng.

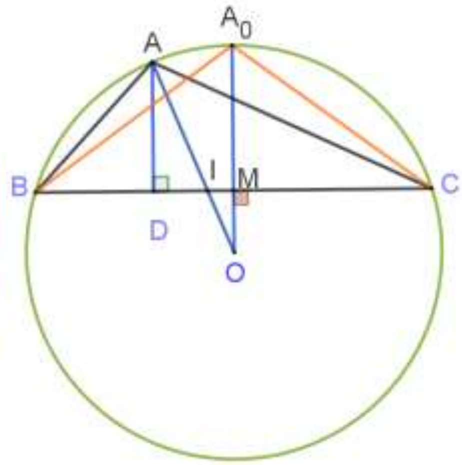
Tam giác IAB có AB không đổi nên chu vi tam giác nhỏ nhất khi $IA + IB$ nhỏ nhất. Đường thẳng HI cố định. Gọi D là điểm đối xứng của B qua HI thì điểm D cố định, suy ra độ dài AD không đổi. Ta có: $IB = ID \Rightarrow IA + IB = IA + ID \geq AD$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A,D,I thẳng hàng. Tức điểm I chính là giao điểm của AD và HK. Mặt khác ta dễ chứng minh được $AHDK$ là hình bình hành. Nên dấu " = " xảy ra khi I là trung điểm HK, khi đó điểm $M \equiv H$.

2. Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung BC khi đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung BC.

Chứng minh:





Trường hợp 1: Điểm A thuộc cung lớn BC.

Ta dựng đường cao AD của tam giác ABC thì $S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC$. Do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất.

Khi và chỉ khi AD lớn nhất. Gọi M là trung điểm của BC thì $AD\le AM\le AO+OM=R+\sqrt{R^2-\frac{BC^2}{4}}$.

Suy ra $S_{ABC}\le\frac{1}{2}BC\left(R+\sqrt{R^2-\frac{BC^2}{4}}\right)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv M$ và O,M,A thẳng hàng. Hay $A\equiv A_0$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

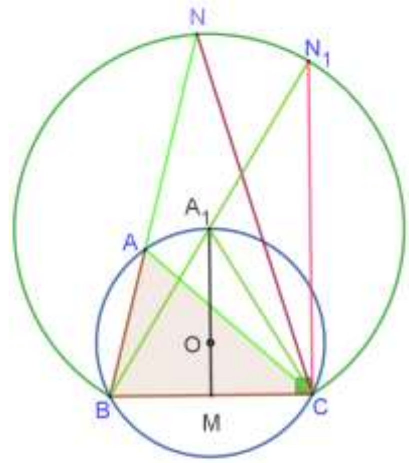
Trường hợp 2: Điểm A thuộc cung nhỏ BC.

Gọi I là giao điểm của AO với dây cung BC.

Ta có: $AD+OM\le AI+IO=R\Rightarrow AD\le R-OM$. Vậy $S_{ABC}\le\frac{1}{2}BC\left(R-\sqrt{R^2-\frac{BC^2}{4}}\right)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv I\equiv M$. Hay $A\equiv A_0$ là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

4. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung BC khi đó chu vi tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung BC.



Trường hợp 1: Điểm A thuộc cung lớn BC.

Ta có chu vi tam giác ABC bằng: $AB+AC+BC$.

Do BC không đổi nên chu vi tam giác lớn nhất

khi và chỉ khi $AB+AC$ lớn nhất. Để tạo ra $AB+AC$ ta làm như sau: Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN=AC$ khi đó ta có: Tam giác NAC cân tại A và $ANC=\frac{1}{2}BAC$ không đổi. Suy ra điểm N thuộc cung chứa góc $\frac{1}{2}BAC$ dựng trên đoạn BC *(phần nữa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).* Ta có: $AB+AC=AB+AN=BN$. Nên $AB+AC$ lớn nhất khi và chỉ khi BN lớn nhất, tức là BN là đường kính của đường tròn chứa cung chứa góc $\frac{1}{2}BAC$ dựng trên đoạn BC *(phần nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A)* hay $BCN=90^0 \Leftrightarrow N\equiv N_1$ Do $A_1N_1=A_1C$, tam giác BCN_1 vuông tại C suy ra $A_1N_1=A_1C=A_1B$ hay $A_1\equiv A$ là điểm chính giữa cung lớn BC.

Trường hợp A thuộc cung nhỏ BC ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 5

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, điểm M nằm trên nửa đường tròn sao cho $AM = R, N$ là điểm nằm trên cung MB $(N$ khác M, B$)$. Gọi I là giao điểm của AN, MB, H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

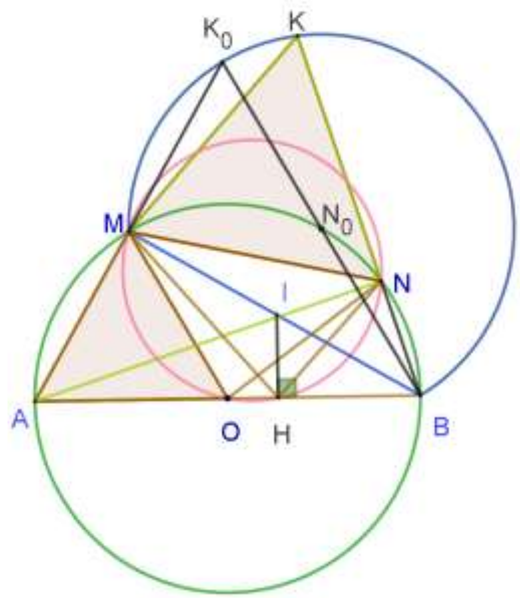
a. Chứng minh: Tứ giác $HINB$ nội tiếp.

b. Chứng minh: IH là phân giác của góc MHN.

c. Khi N di chuyển trên cung MB. Chứng minh rằng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN luôn đi qua hai điểm cố định.

d. Tìm vị trí của điểm N trên cung MB để chu vi tứ giác $AMNB$ lớn nhất.

Hướng dẫn



Điểm N nằm trên (O) nên $ANB = 90^0$

Xét tứ giác $IHBN$ có $IHB + INB = 180^0$

Nên tứ giác $HINB$ nội tiếp *(tổng hai góc đối bằng 180^0)*.

Suy ra: $IHN = IBN$ (1) (cùng chắn cung IN)

Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có:

$AMIH$ nội tiếp suy ra $IHM = IAM$ *(cùng chắn cung IM)* (2)

Mặt khác tứ giác $AMNB$ nội tiếp nên: $MAN = MBN$ (3) .

Từ (1), (2) và (3) suy ra $IHM = IHN$. Hay IH là tia phân giác của MHN.
c. Vì $AM = R \Rightarrow AM = OM = OA$ nên tam giác AMO đều, suy ra điểm M là điểm cố định.

Từ chứng minh ở câu B ta suy ra $MHN = 2MAN$, mặt khác ta cũng có: $MON = 2MAN$ *(tính chất góc ở tâm)*. Suy ra; $MHN = MON$ hay tứ giác $MOHN$ nội tiếp *(hai đỉnh liên tiếp O,H cùng nhìn cạnh MN những góc bằng nhau)*. Từ đó sy ra đường tròn ngoại tiếp tam MHN luôn đi qua hai điểm cố định O,M.

Vì $MAB = 60^0 \Rightarrow MNB = 120^0, MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R$

Do MB không đổi, $MNB = 120^0$, trên tia đối của NB lấy điểm K sao cho $NK = NM$ thì tam giác MNK cân tại N

$MNK = 180^0 - MNB = 60^0$ nên tam giác MNK đều suy ra $MKB = 60^0$. Suy ra điểm K nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn MB *(phần nữa mặt phẳng bờ MB không chứa A)*. Tia AM cắt cung chứa góc tại K_0 thì $MK_0B = 90^0$. Ta tính được:

$$K_0B = \frac{MB}{\sin 60^0} = \frac{R\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R.$$

Chu vi tứ giác $AMNB = AM + MN + NB + BA = 3R + NM + NB.$
Suy ra chu vi tứ giác $AMNB$ lớn nhất khi và chỉ khi $NM + NB$ lớn nhất.
Theo cách dựng trên ta có: $NM + MB = KB \le K_0B = 2R \Rightarrow$ Chu vi tứ giác $3R + NM + NB \le 5R$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv K_0$. Khi đó điểm N chính là giao điểm của K_0B với (O) hay $N \equiv N_0$ là điểm chính giữa cung nhỏ MB.

Ví dụ 6

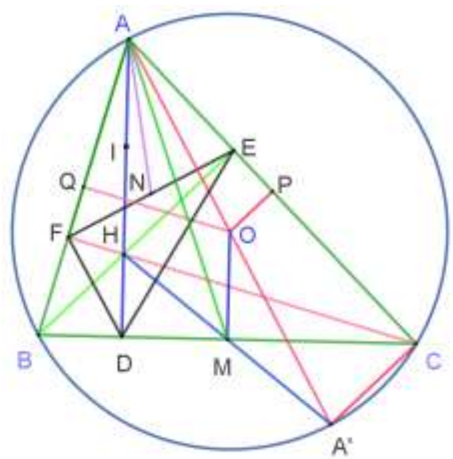
Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC(BC\neq 2R)$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H. Gọi N là trung điểm của EF.

a. Chứng minh: $R.AN = AM.OM$ với M là trung điểm của BC.

b. Chứng minh: $R(EF+FD+DE)=2S_{ABC}$. Tìm vị trí điểm A để $\mathrm{EF}+\mathrm{FD}+\mathrm{DE}$ lớn nhất.

Hướng dẫn

R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thì R' cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$



Suy ra $R'=\frac{AH}{2}=OM$ *(học sinh tự chứng minh tính chất quen thuộc này)*

Ta có $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ nên $\frac{AN}{AM}=\frac{R'}{R}$ hay R.AN=AM.R'

chú ý rằng $R'=OM \Rightarrow R.AN = AM.OM.$

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AC,AB. Ta có :

$2S_{ABC}=2\left(S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}\right)=OM.BC+OP.AC+OQ.AB.$ Từ câu a ta có :

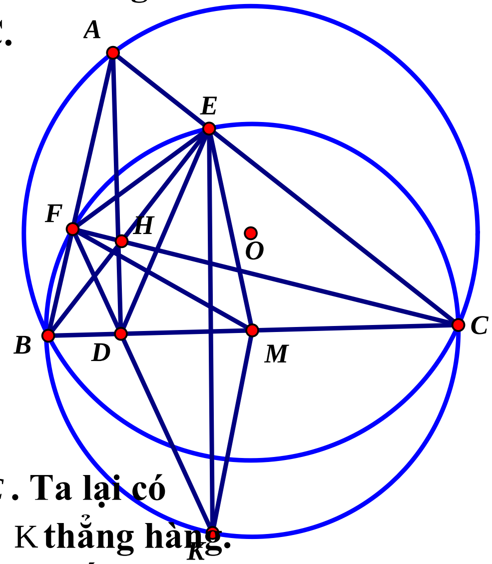
$R.AN = AM.OM \Leftrightarrow OM = R.\frac{AN}{AM}=R.\frac{EF}{BC},$ tương tự ta cũng có :

$OP=R.\frac{DF}{AC}, OQ=R.\frac{DE}{AB}$

Thay vào ta có : $2S_{ABC}=R(EF+FD+DE).$ Do R không đổi nên $EF+FD+DE$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC

Lập luận theo cách khác:

Chứng minh: $OA \perp EF$ **suy ra** $S_{AEOF} = \frac{1}{2}OA.EF$ **, tương tự ta có:** $S_{BDOF} = \frac{1}{2}OB.DF$ **,** $S_{CDOE} = \frac{1}{2}OC.DE$ **từ đó suy ra** $2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$. **Do R không đổi nên** $EF + FD + DE$ **lớn nhất khi và chỉ khi** S_{ABC} **lớn nhất** $\Leftrightarrow$ **khoảng cách từ điểm A đến BC lớn nhất. Hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.**



Ngoai ra ta cũng có thể giải theo cách khác:

Ta thấy các điểm B, F, E, C **nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC.**

Do BC không đổi nên BAC **không đổi.**

Ta có ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF nên $MFE = BAC$ **không đổi. Suy ra** $EMF = 90^0 - \frac{BAC}{2}$ **không đổi.**

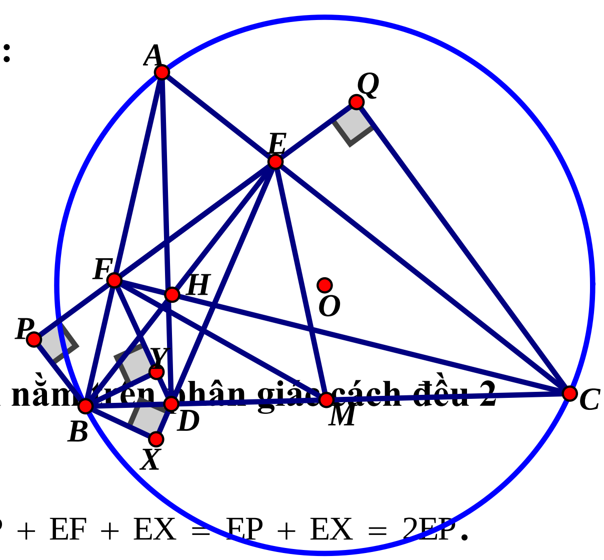
suy ra độ dài EF không đổi.

Gọi K là điểm đối xứng với E qua BC thì $EDC = KDC$ **. Ta lại có** $EDC = EHC = FHB = FDB$ **. Suy ra** $EDB = KDM$ **nên** F, D, K **thẳng hàng.**

Ta có chu vi ΔDEF **lớn nhất khi và chỉ khi** $DE + DF$ **lớn nhất. Từ các chứng minh trên ta có:**

$DE + DF = FK \le 2R' = BC$ **. Suy ra** $DE + DF$ **lớn nhất khi và chỉ khi** $D \equiv I$ **hay A là điểm chính giữa cung lớn** BC **.**

Cũng có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác:



P, Q **lần lượt là hình chiếu vuông góc của** B, C **trên** EF **. Ta có các tính chất quen thuộc** FH, DH **lần lượt là phân giác trong các góc** EFD, FDE **suy ra** FB, FD **lần lượt là các đường phân giác ngoài của** EFD, FDE **. Hạ** BX, BY **lần lượt vuông góc với** DE, DF **thì suy ra** $FP = FY, DX = DY, EP = EX$ **(tính chất một điểm nằm trên phân giác cách đều 2 cạnh).**

Ta có: Chu vi tam giác DEF **là**

$2p = DF + EF + DE = YF + DX + EF + DE = FP + EF + EX = EP + EX = 2EP$ **.**

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $2p = 2FQ$ **. Suy ra**

$4p - 2(EP + FQ) = 2(PQ + 2EF) \Rightarrow 2p = PQ + 2EF$ **suyra** $DE + DF = PQ$ **. Mặt khác** $PQ \le BC$ **nên chu vi tam giác** DEF **lớn nhất bằng** $EF + BC$ **khi Và chỉ khi** $PQ // BC$ **hay A là điểm chính giữa cung lớn BC.**

Ví dụ 7

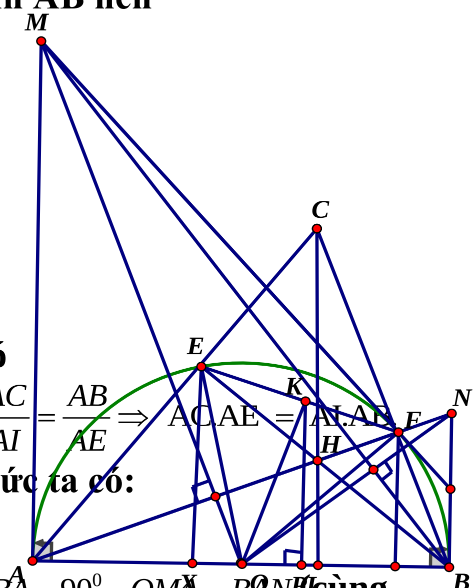
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$.EF **là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho E thuộc cung AF và** $EF = \frac{AB}{2}$. **Gọi H là giao điểm của** AF, BE, C **là giao điểm của** AE, BF, I **là giao điểm của** CH, AB.

a. Chứng minh 4 điểm A, C, F, I **cùng nằm trên một đường tròn.**

b. Chứng minh: $AE.AC + BF.BC$ **có giá trị không đổi khi EF di chuyên trên nửa đường tròn (O). Đường thẳng AF cắt tiếp tuyến tại B ở N, các tiếp tuyến tại A, F của (O) cắt nhau ở M. Chứng minh:** $ON \perp MB$.

c. Xác định vị trí EF trên nửa đường tròn để tứ giác ABEF có diện tích lớn nhất.

Giải



a, Vì các điểm E, F năm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $AEB = AFB = 90^0$ **(Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).**

Do C là giao điểm của AE, BF suy ra $BE \perp AC,\ AF \perp BC$ **suy ra BE, AF cắt nhau tại điểm H là trực tâm tam giác CAB suy ra** $CI \perp AB$.

Tứ giác ACFI có $AFC = AIC = 90^0$ **suy ra tứ giác ACFI là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp F, I cùng nhìn AC góc 90°).**

b, Xét tam giác vuông ACI và tam giác vuông ABE ta có $AIC = AEB = 90^0$, CAB **chung. Suy ra** $\Delta ACI \backsim \Delta ABE$ **do đó:** $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AC.AE = AI.AB$

Tương tự ta cũng có: BC.BF = BI.AB. Cộng hai đẳng thức ta có:

$AE.AC + BF.BC = AB(AI + BI) = AB^2 = 4R^2$.

c, Xét tam giác MAO và tam giác ABN, Ta có: $OAM = NBA = 90^0$, $OMA = BAN$ **(cùng phụ với** NAM **)**

Từ đó suy ra ΔMAO ” ΔABN **(g.g)** **suy ra** $\frac{MA}{MO} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow \frac{MA}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2OB}{BN}$ **hay** $\frac{MA}{AB} = \frac{OB}{BN}$

$\Rightarrow \Delta MAB$ ” ΔOBN **(c.g.c), suy ra** $NOB + MBA = BMA + MBA = 90^0$ **hay** $ON \perp MB$.

c, Dễ thấy: Tam giác OMN **là tam giác đều cố cạnh** $MN = R$. **Gọi K là trung điểm của EF**

thì $OK \perp EF$. **Từ đó ta tính được:** $OK^2 = OE^2 = KE^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{3}R}{2}$. **Tam giác**

OMN có diện tíchb là: $S_1 = \frac{1}{2}OK.EF = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$. **.Dựng** EX, FY **lần lượt vuông góc với AB tại E, F thi**

tứ giác $EFYX$ **là hình thang vuông, dựng** $KP \perp AB$ **suy ra P là trung điểm XY nên KP là đường**

trung binh hình thang $EFYX$**. Kí hiệu** S_1, S_3 **lần lượt là diện tích của các tam giác** $AOE,\ BOF$ **thì**

$S_1 = \frac{1}{2}OA.EX = \frac{1}{2}R.EX; S_2 = \frac{1}{2}OB.FY = \frac{1}{2}R.FY$ **. Ta có:** $S_{AEFB} = S_1 + S_2 + S_3$ **mà** S_1 **không đổi nên**

S_{AEFB} **lớn nhất khi và chi khi** $S_2 + S_3$ **lớn nhất. Ta có:**

$S_2 + S_3 = \frac{1}{2}R(EX + FY) = \frac{1}{2}R.2KP = R.KP.$

Trong tam giác vuông OKP **ta có:** $KP \le KO = \frac{\sqrt{3}}{2}R$**. Suy ra** $S_2 + S_3 \le \frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$ **Dấu bằng xảy ra**

khi và chỉ khi $P \equiv O \Leftrightarrow PK \perp EF \Leftrightarrow EF//AB$**. Vậy GTLN của** S_{AEFB} **là** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ **khi và chỉ khi** $EF//AB$**.**

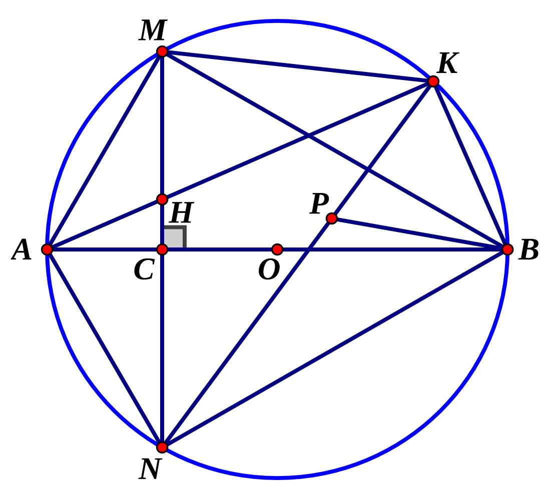
Ví dụ 8

Cho đường tròn (O; R) có đường kính $AB,\ C$ **là trung điểm của OA và dây** $MN \perp OA$ **tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ** $BM,\ H$ **là giao điểm của** $AK,\ MN$**.**

a. Chứng minh: BCHK là tứ giác nội tiếp.

b. Tính $AH.AK$ **theo R. Xác đinh vị trí K để** $KM + KN + KB$ **lớn nhất. Tính GTLN đó.**

Giải



a, Do K nằm trên $\left(O; \frac{AB}{2}\right) \Rightarrow AKB = 90^0$**. Lại có** $HCB = 90^0$ **(giả thiết) suy ra**

$AKB + HCB = 180^0$ **nên tứ giác BCHK nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180°).**

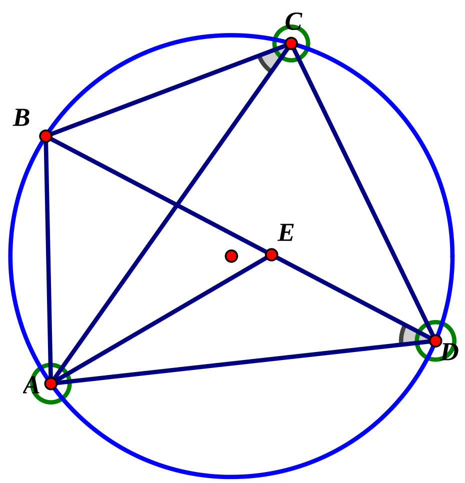
b, Ta có $\Delta ACH \backsim \Delta AKB$ **(g.g) nên** $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AH.AK = AC.AB = \frac{R}{2}.2R = R^2$

c, Đây là một cầu hỏi khá hay. Nếu biết định lý Ptolemy hoặc định lý Shooten thì bài toán được giải quyết.
Cách tiếp cận thứ nhất:
Nhận thấy tam giác BMN **cân tại B và tam giác** AMO **đều (do AMO cân tại O và tại M) suy ra tam giác BMN đều nên** $NKB = \frac{1}{2}sđ\ NB = 60^0$. **Trên dây KN lấy điểm P sao cho** $KP = KB$ **thì tam giác** KPB **đều. Xét tam giác MKB và NPB ta có:** $KB = BP,\ MB = NB$**,** $MKB = NPB = 120^0$ **suy ra** $\Delta MKB = \Delta NPB$ **(c.g.c)** $\Rightarrow KM = PN \Rightarrow KM + KB = KN$**. Vậy** $KM + KN + KB = 2KN$**.**
Dễ thấy $KN \le 2R$ **nên** $KM + KN + KB \le 4R$ **, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi** $K,\ O,\ N$ **thẳng hàng. Từ đó suy ra điểm K là giao điểm của NO với (O) (K khác N).**
Cách 2. Dùng định lý Ptolemy.

5. Dùng các định lý hình học, kết hợp với bất đẳng thức cổ điển $AM - GM$, Cauchy-Schwarz.
Để giải quyết tốt các bài toán dạng này người giải cần nắm chắc các kết quả.

a. Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: **Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có:** $AB.CD + AD.BC = AC.BD$**.**

Chứng minh

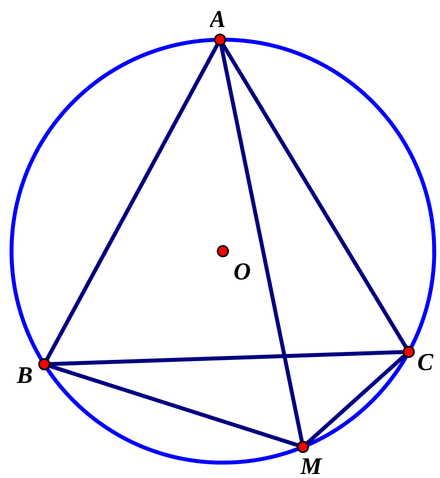


Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE = BAC$ **.Ta có** $DAE = BAC$ **và** $ADE = ACB$ **(cùng chắn** AB**) nên** $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ **(g.g)** $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE$ **(1). Do** $DAE = CAB$
nên $DAC = EAB$**, lại có** $ABE = ACD$ **(cùng chắn** AD**)**
$\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACD(g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE(2).ACCD$
Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC\left(BE + DE\right) = AC.BD.$

Ví dụ 9

Cho tam giác ABC **đều nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC.**
a. Chứng minh: $MA = MB + MC$**.**
b. Tìm GTLN, GTNN của $P = MA + MB + MC$**.**
(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Đại học Vinh 2006)
c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ **(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường : chuyên Lê Qúy Đôn - Đà Nẵng năm 2009)**

Giải:



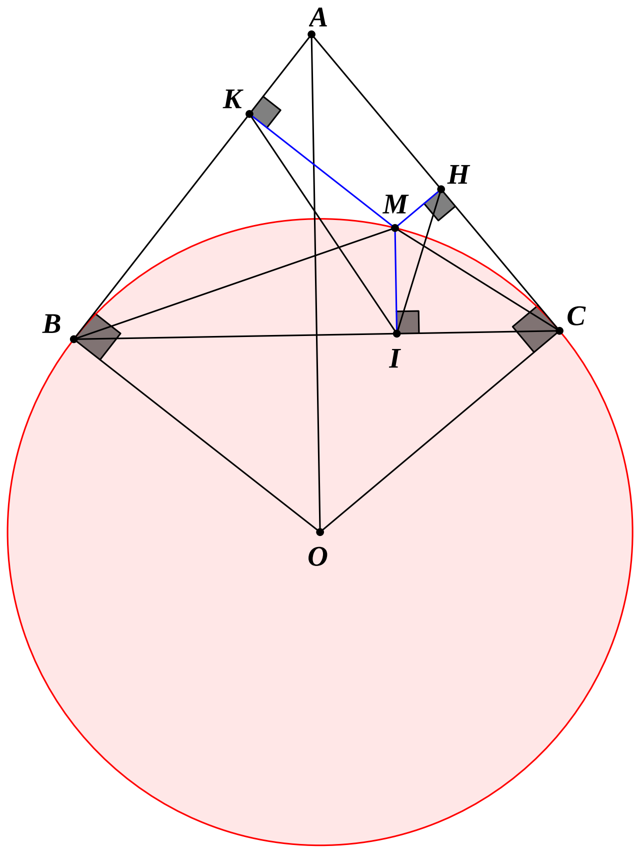
a, Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABMC$ **ta có:** $MA.BC = AB.MC + AC.MB$**.**
Do $AB = BC = CA$**. Suy ra** $MA = MB + MC$**.**
b, Ta có $P = MA + MB + MC = 2MA$**. P nhỏ nhất khi và chỉ khi** $M \equiv B$ **hoặc** $M \equiv C$**.**
c, Với mọi số thực dương x,y ta có: $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4$**. Nên ta suy ra** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$**. Áp dụng vào bài toán ta có:** $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB+MC} = \frac{4}{MA}$**. Do** $MA \leq 2R$ **nên ta suy ra** $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB} \geq \frac{4}{2R} = 2R$**. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường kính của (O). Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.**

Ví dụ 10

Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC **với (O) với B, C là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc** MI, MH, MK **xuống** BC, CA, AB**. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM và** IK, CM **và IH.**
Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$.
a, Tìm vị trí điểm M để $MI.MH.MK$ **đạt GTLN.**

b, Tìm vị trí điểm M để $\frac{1}{MH}+\frac{1}{MK}$ nhỏ nhất.

Giải



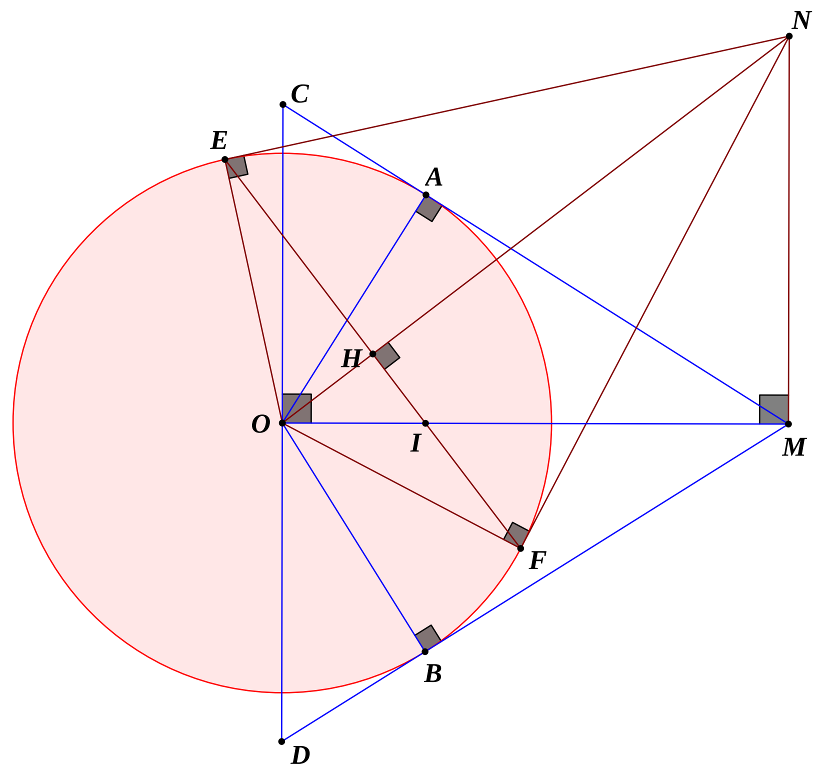
a, Từ giải thiết ta có: $BKM = BIM = 90^\circ$, suy ra tứ giác $BKMI$ nội tiếp.
Tương tự cho tứ giác $CIMH, AKMH$.
Vì tứ giác $BKMI$ nội tiếp nên: $MKI = MBI$ (cùng chắn cung MI).
Mặt khác ta có: $MBI = MCH$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
Nhưng $MCH = MIH$ (cùng chắn cung MH của tứ giác nội tiếp $MHCI$). Suy ra $MKI = MIH$
Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $MIK = MHI$ nên $\Delta MIK \# \Delta MIH$ (g.g)
Suy ra $\frac{MI}{MK} = \frac{MH}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MH.MK$.
Từ đó ta có $MI^3 = MI.MH.MK$. Suy ra $MI.MH.MK$ lớn nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất.
Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.
b, Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\frac{1}{MH}+\frac{1}{MK} \ge \frac{2}{\sqrt{MH.MK}} = \frac{2}{MI}$ nên $\frac{1}{MH}+\frac{1}{MK}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất. Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Ví dụ 11. Cho đường tròn $O;R$ và một điểm M nằm ngoài O. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến O ,(A,B là các tiếp điểm)

a. Đường thẳng qua O song song với AB cắt tia MA, MB lần lượt tại C,D. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD.

b. Giả sử $OM = 2R$ và điểm M cố định. Trên đường thẳng d qua M vuông góc với MO ta lấy một điểm N rồi kẻ hai tiếp tuyến PE, PF đến O ,(E,F là các tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí điểm P trên đường thẳng d để độ dài EF nhỏ nhất.

Giải



a, $S_{MCD} = 2S_{MOC} = OA.MC = OA.\ MA + AC$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $MA + MC \geq 2\sqrt{MA.MC}$

Mặt khacs áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MOC ta có: $AM.AC = OA^2 = R^2$

Suy ra $S_{MCD} \geq 2R^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM = AC \Leftrightarrow \Delta MOC$ vuông cân tại O hay $MO = R\sqrt{2}$.

b, Gọi I là giao điểm của EF và MO, H là giao điểm của EF và NO.

Tứ giác $MIHN$ là tứ giác nội tiếp nên $OH.ON = OI.OM$.

Mặt khác trong tam giác vuông NEO ta có $OH.ON = OE^2 = R^2$

Suy ra $OI.2R = R^2 \Rightarrow OI = \dfrac{R}{2}$

Điểm I nằm trên OM, $OI = \frac{R}{2}$ không đổi. suy ra I là điểm cố định.

Vậy EF luôn đi qua I cố định nằm trong (O).

Ta thấy $EF = 2HE = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$ nên EF nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

Mà $OH \le OI = \frac{R}{2}$ nên EF nhỏ nhất bằng $EF = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $H \equiv I \Leftrightarrow N \equiv M$.

Cũng có thể lý luận theo cách khác: ta có

$$EF = 2HF = \frac{2OE.EN}{ON} = \frac{2R\sqrt{ON^2 - R^2}}{ON} = 2R\sqrt{1 - \frac{R^2}{ON^2}}$$

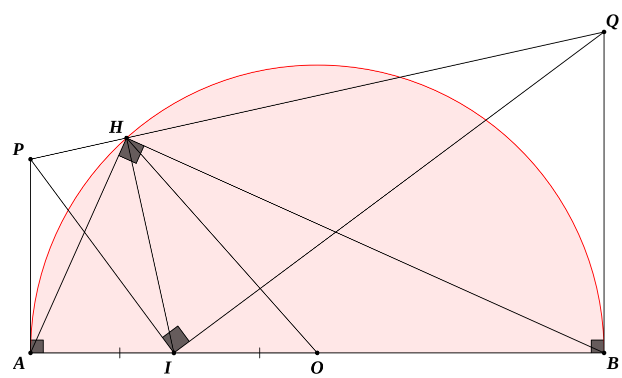
EF nhỏ nhất khi $\frac{R^2}{ON^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow ON$ nhỏ nhất. Mà $ON \ge OM = 2R$.

Suy ra $EF \ge R\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv N$.

Ví dụ 12.

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Các đường thẳng a, b lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại A, B. Gọi I là trung điểm của OA. Lấy hai điểm P, Q nằm trên a, b sao cho P, Q ở cùng một phía so với AB và $PIQ = 90°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên PQ. Chứng minh H nằm trên (O) và tìm vị trí của P, Q trên a, b sao cho diện tích tam giác IPQ lớn nhất.

Giải



Học sinh tự chứng minh $AHB = 90°$ để suy ra H nằm trên O .

Chú ý rằng: $OH = R, OH$ không vuông góc với PQ nên PQ cắt (O).

Ta có: $S_{IPQ} = S_{ABQP} - S_{AIP} - S_{BIQ} = \frac{R\ \ 3AP + BQ}{2}$

Mặt khác: ta cũng dễ chứng minh được:

$\Delta IAP \ \# \ \Delta QBI \Rightarrow \frac{IA}{AP} = \frac{QB}{BI} \Rightarrow AP.QB = IA.IB = \frac{3}{4}R^2$

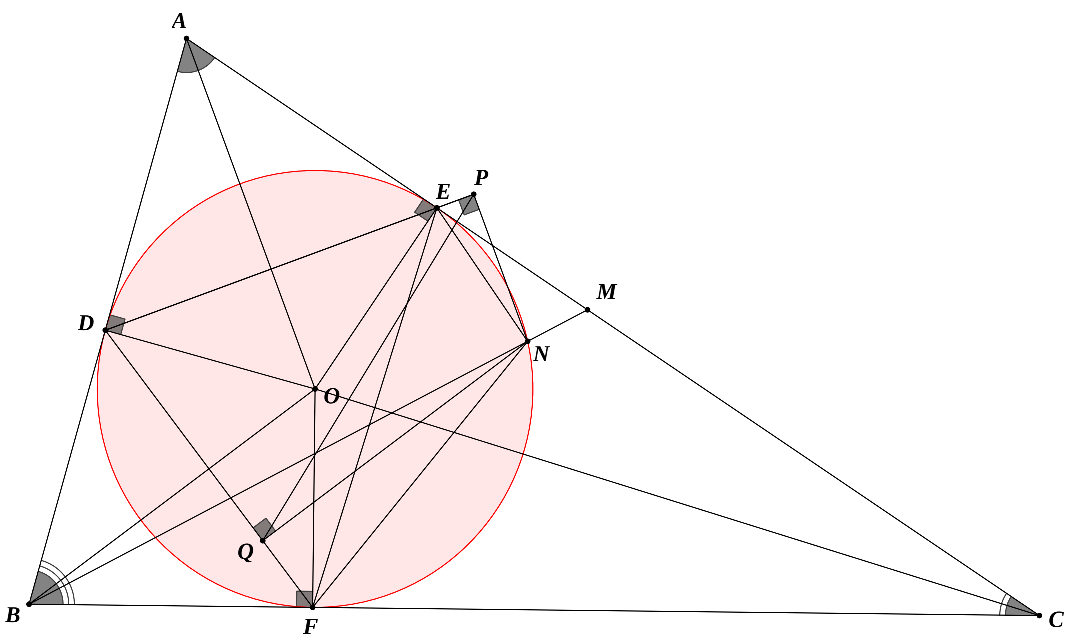
Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $3AP+BQ\geq 2\sqrt{3AP.BQ}=3R$

Suy ra $S_{IPQ}\geq \dfrac{3R^2}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AP=\dfrac{R}{2};AQ=\dfrac{3R}{2}$.

Ví dụ 13.
Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC,M là điểm di chuyển trên đoạn CE. Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng DE,DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Giải



Ta có tứ giác $PNQD,EDFN$ nội tiếp

$\Rightarrow QPN=QDN=FEN$

Tương tự ta cũng có: $NQP=NDP=NFE\Rightarrow \Delta NEF\ \#\ \Delta NPQ$

Suy ra $\dfrac{PQ}{EF}=\dfrac{NQ}{NF}$.

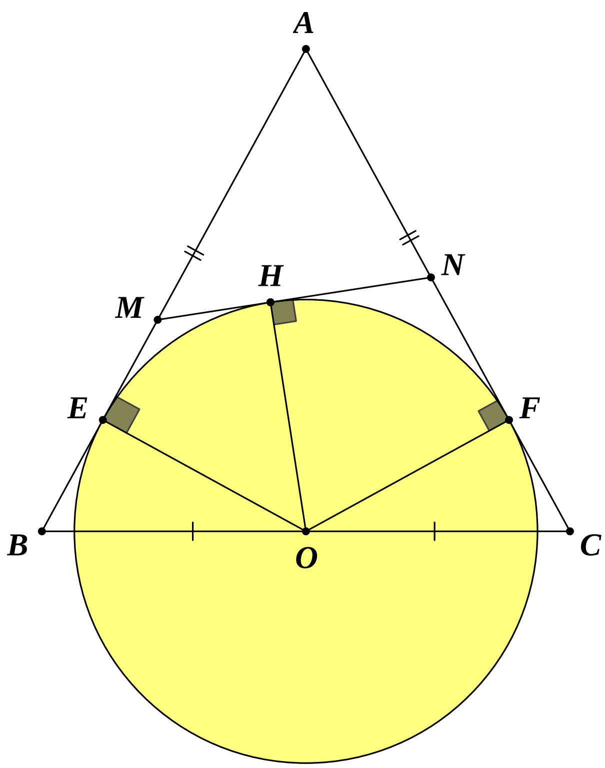
Trong tam giác vuông NQF ta có: $NQ\leq NF$ do đó $\dfrac{PQ}{EF}\leq 1$.

Như vậy PQ lớn nhất bằng EF khi và chỉ khi $Q\equiv F$ khi đó $P\equiv E$

Do P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF nên khi $Q \equiv F$ và $P \equiv E$ thì DN là đường kính của (O). Từ đó suy ra cách xác định M như sau: dựng đường kính DN của (O), M là giao điểm của BN và AC.

Ví dụ 14.
Cho tam giác ABC cân đỉnh A, gọi O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB ở E tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF, tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Giải



Dễ thấy OM, ON lần lượt là phân giác của EOM, FOH

Từ đó ta có: $MON = \dfrac{180^\circ - BAC}{2} = ABC \Rightarrow \Delta MBO \# \ \Delta OCN$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{OC} = \dfrac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = OB.OC = \dfrac{BC^2}{4} = const$ (1)

Ta lại có $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ nên S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị lớn nhất.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O), ta có:

$$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2}R\ \ BM + MN + NC\ \ = \frac{1}{2}R\left[BE + CF + 2\ \ EM + FN\ \right]$$

Mà $MN = EM + FN$ và $BE = CF$ nên

$S_{BMNC}=R\ \ BE+EM+FN\ \ =R\ \ BE+BM+CN-2BE\ \ =R\ \ BM+CN-BE$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, từ (1) và (2) suy ra:

$S_{BMNC}\geq R\ \ 2\sqrt{BM.CN}-BE\ \ =R\ \ BC-BE$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM=CN\Leftrightarrow MN\ //\ BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với (O).

Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với (O).

Ví dụ 15.

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O), kẻ các tuyến AB,AC đến (O)(B,C là tiếp điểm).

a. Chứng minh: $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

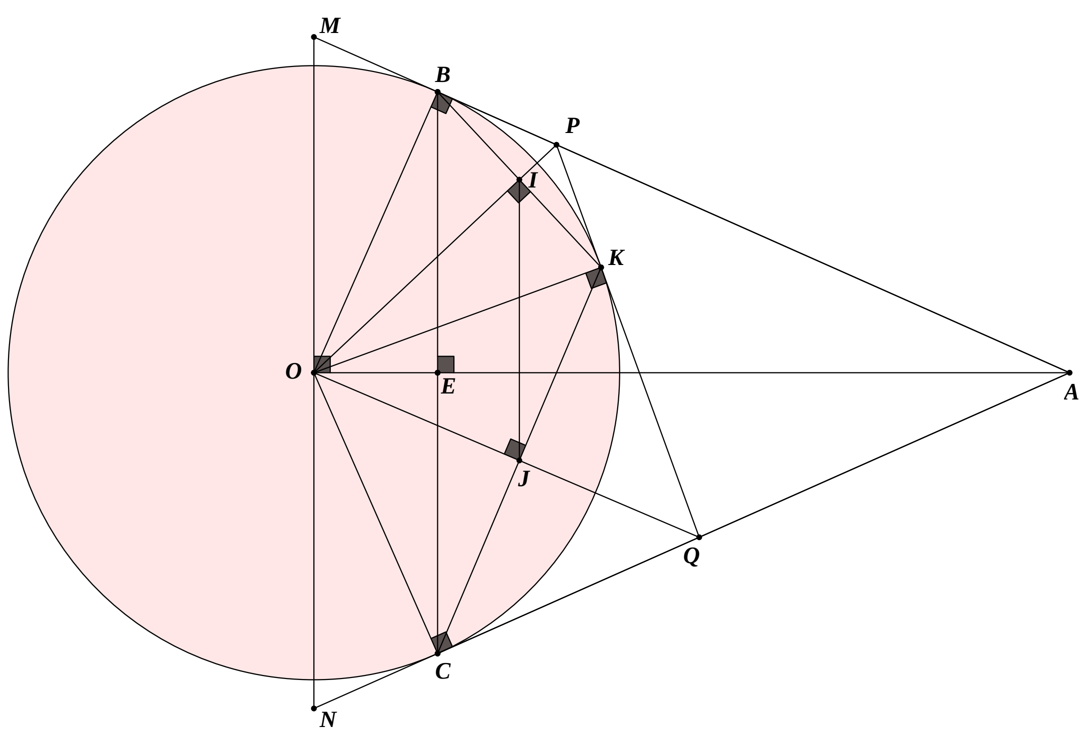
b. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh rằng: $BE\perp OA$ và $OE.OA=R^2$

c. Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm K tùy ý(K khác B,C). Tiếp tuyến tại K của (O) cắt AB,AC lần lượt tại P,Q. Chứng minh rằng chu vi tam giác APQ không đổi khi K di chuyển trên cung nhỏ BC.

d. Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB,AC lần lượt tại M,N. Chứng minh rằng $PM+QN\geq MN$

(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2009)

Giải



a. Vì AB,AC là các tiếp tuyến (O) nên $ABO=ACO=90^\circ$

Tứ giác $ABOC$ có $ABO + ACO = 180°$ nên $ABOC$ là tứ giác nội tiếp(tổng hai góc đối bằng $180°$)

b. Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau: ta có $BC \perp AO$ tại E. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $OE.OA = OB^2 = R^2$

c. Vì điểm A cố định nằm ngoài (O) nên AB, AC cố định.

Suy ra $AB + AC$ không đổi. Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $PK = PB; QK = QC$

Suy ra chu vi tam giác APQ là $AP + AQ + PQ = AP + AQ + PB + QC = AB + AC$ không đổi.

d. Giả sử BK cắt PO tại I, CK cắt OQ tại J thì $KIO = KJO = 90°$.

Suy ra tứ giác $KIOJ$ nội tiếp nên $KOJ = KIJ = QKC = KBC \Rightarrow IJ // BC$ hay $IJ \perp AO$

Từ đó ta có: $BPO = BKO = IJO = 90^\circ - JAO = QON$.

Xét ΔMOP và ΔNQO ta có: $PMO = ONQ$ và $MPO = QON$

Suy ra ΔMOP # ΔNQO (g-g), khi đó: $\frac{PM}{OM} = \frac{ON}{QN} \Rightarrow PM.QN = OM.ON = \frac{MN^2}{4}$

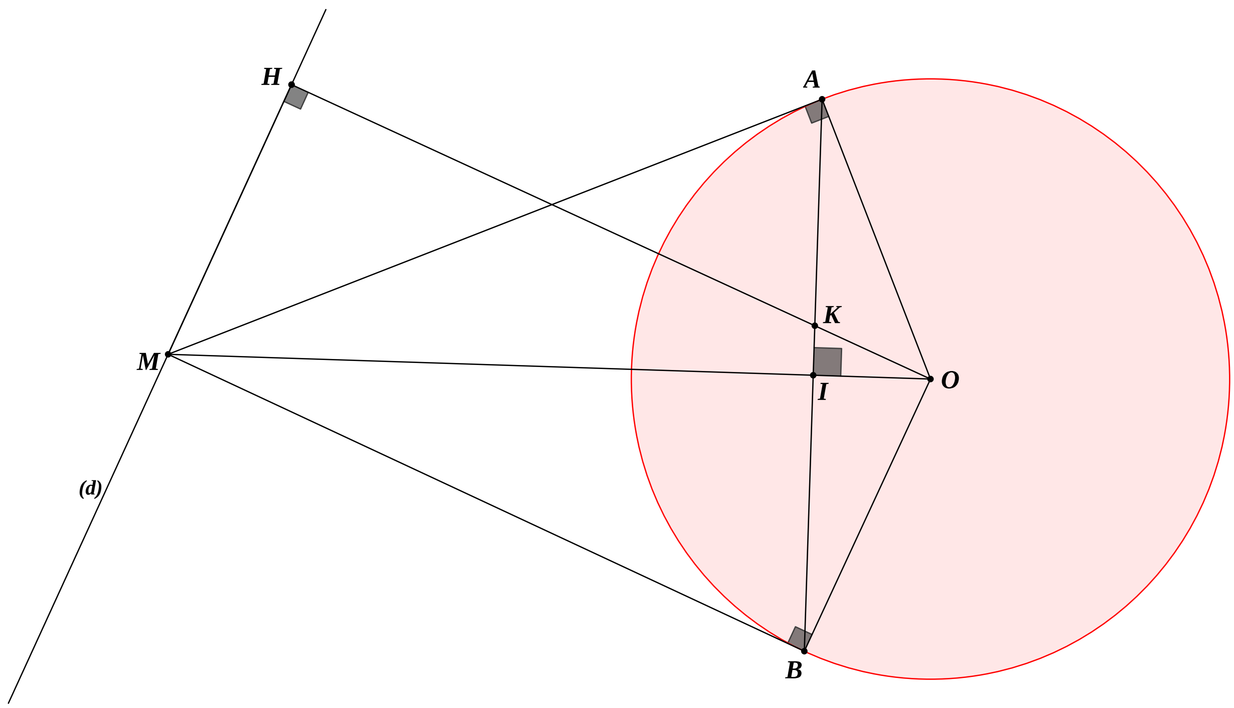
Ta cung có $PM.QN \le \frac{(PM + QN)^2}{4} \Rightarrow \frac{(PM + QN)^2}{4} \ge \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow PM + QN \ge MN$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $PM = QN \Leftrightarrow PQ // MN$ hay K là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Ví dụ 16.

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng (d) không cắt (O), điểm M nằm trên đường thẳng (d), qua M dựng các tiếp tuyến MA, MB đến $(O; R)$ (A, B là tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (d). Các đường thẳng OH, OM cắt AB lần lượt tại I, K. Tìm vị trí của điểm M lên (d) để diện tích tam giác OIK lớn nhất.

Giải



Ta có: $OA^2 = OI.OM = OK.OH$

Suy ra $OK = \dfrac{OA^2}{OH} = \dfrac{R^2}{OH}$ không đổi(OH không đổi)

Diện tích tam giác OIK là: $S_{OIK} = \dfrac{1}{2}IK.IO \le \dfrac{1}{4}\left(IK^2 + IO^2\right) = \dfrac{1}{4}OK^2$

Tức là: $S_{OIK} \le \dfrac{R^4}{4OH^2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $IK = IO$. Suy ra tam giác KIO vuông cân.

Suy ra $KOI = 45° \Rightarrow OMH = 45°$, tức là điểm M cách H một đoạn OH.

Ví dụ 17

Cho đường tròn $(O;R)$, hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M bất kì thuộc đoạn OA $(M \ne O; A)$. Tia DM cắt đường tròn (O) tại N.

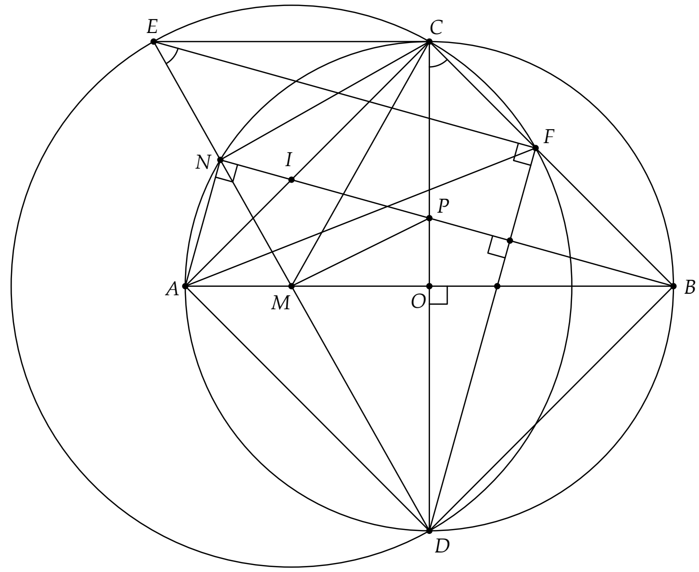
a. Chứng minh: Tứ giác $OMNC$ nội tiếp.

b. Chứng minh: $DM.DN = DO.DC = R^2$.

c. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia DM tại E, đường tròn ngoại tiếp ΔCDE cắt BC tại F. Chứng minh: DF // AN.

d. Nối B với N cắt OC tại P. Tìm vị trí điểm M để $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



a. Tứ giác $OMNC$ có: $MNC = COM = 90°$

nên $MNC + COM = 180°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OMNC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$)

b. Xét ΔDOM vuông và ΔDNC vuông có: $DOM = DNC = 90°$, NDC chung

$\Rightarrow \Delta DNC \# \Delta DOM(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DN}{DO} = \frac{DC}{DM}$$

$\Rightarrow DM.DN = DO.DC = R.2R = 2R^2$

c. Xét ΔECD vuông tại C có: MO // EC, O là trung điểm CD

$\Rightarrow$ M là trung điểm ED

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔECD chính là đường tròn (M, MC)

Tứ giác $DFEC$ nội tiếp $\Rightarrow DEF = DCF$ (cùng chắn DF)

Tứ giác $DNCB$ nội tiếp $\Rightarrow$ $DNB = DCB$ (cùng chắn BD)

$\Rightarrow DNB = DEF(= DCB) \Rightarrow BN$ // EF

Mà $NB \perp AN$, $EF \perp DF$

$\Rightarrow AN//DF$ (từ vuông góc đến song song)

d. Ta có: $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{OP}{CP} = \dfrac{OA - AM}{AM} + \dfrac{OC - CP}{CP} = \dfrac{OA}{AM} + \dfrac{OC}{CP} - 2$

Ta có: $BPD = \dfrac{1}{2}sd(NC + BD) = \dfrac{1}{2}sd(NC + BC) = MDB$, $PDB = MBD = 45°$

Suy ra $\Delta MDB \backsim \Delta BPD \Rightarrow \dfrac{MB}{BD} = \dfrac{DB}{DP} \Rightarrow MB.DP = BD^2 = 2R^2$. Ta có:

$AM = AB - MB, CP = CD - PC$

$\Rightarrow AM.CP = (2R - MB)(2R - DP) = 4R^2 + MB.PD - 2R(MB + PD) = 6R^2 - 2R(MB + PD)$.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có: $MB + DP \ge 2\sqrt{MB.DP} = 2\sqrt{2}R$

Suy ra $AM.CP \le 6R^2 - 4\sqrt{2}R^2 = 2R^2(3 - 2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)^2 R^2$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$\frac{OA}{AM} + \frac{OC}{CP} \ge 2\sqrt{\frac{OA.OC}{AM.CP}} = \frac{2R}{\sqrt{AM.CP}} \ge \frac{2R}{\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)^2 R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)} = 2 + \sqrt{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{OA}{AM} = \frac{OC}{CP} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{2OA}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2} + 1} = (2 - \sqrt{2})R$$

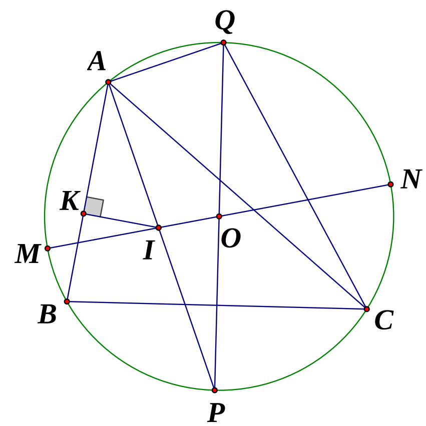
Suy ra điểm M nằm trên đoạn OA sao cho $AM=\left(2-\sqrt{2}\right)R$.

Vậy GTNN của $\frac{OA}{AM}+\frac{OC}{CP}$ là $2+\sqrt{2}$

Ví dụ 18

Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ và ngoại tiếp $(I;r)$. Chứng minh rằng: $\frac{R}{r}\ge 2$

Giải:



Ta cần tìm mối liên hệ giữa hai bán kính R,r.

Giả sử AI kéo dài cắt (O) tại P. OI cắt (O) tại M,N. Hạ $IK\perp AB$, dựng đường kính PQ của (O).

Ta có I nằm trong (O)

và $IP.IA=IM.IN=(R-OI)(R+OI)=R^2-OI^2$.

Mặt khác ta cũng có $\Delta AKI\backsim\Delta QCP$ nên

$\frac{IK}{IA}=\frac{PC}{PQ}\Leftrightarrow IA.PC=2r.R$.

Nhưng ta dễ chứng minh được: $PC=PI$ suy ra $IA.IP=2R.r$ hay $2R.r=R^2-OI^2$

$\Leftrightarrow R^2-2R.r=OI^2\ge 0\Leftrightarrow\frac{R}{r}\ge 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $O\equiv I$ hay ΔABC đều.

Ví dụ 19:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A,B. Một cắt tuyến qua A cắt $(O),(O')$ lần lượt tại M,N (M nằm ngoài (O'), N nằm ngoài (O)). Các tiếp tuyến của $(O),(O')$ tại M,N cắt nhau ở P. Tìm vị trí của cát tuyến MAN để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP lớn nhất.

Giải

Do MP, NP lần lượt là các tiếp tuyến của (O) và (O')nên ta có:

$PMN + PNM = MBA + NBA$

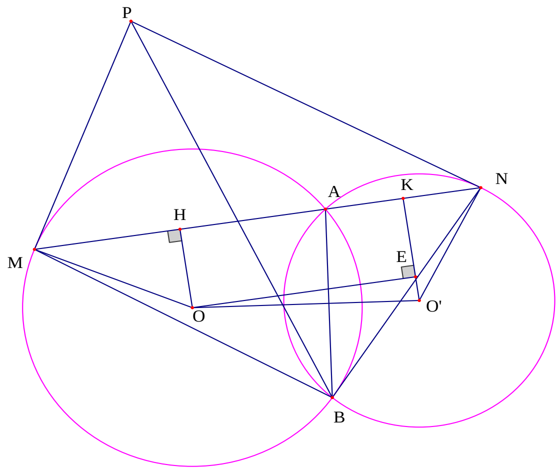
Hay $180^0 - MPN = MBN \Rightarrow MBN + MPN = 180^0$

Suy ra $PMBN$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó ta có:

$$MPN + NPB = MNB + NMB = \frac{1}{2}AOB + \frac{1}{2}AO'B$$

không đổi



Suy ra MPN không đổi. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, ta có:

$MN = 2R.\sin MPN$. Suy ra R lớn nhất khi MN lớn nhất. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AM, AN ta suy ra $MN = 2HK$. Dựng $OE \perp O'K$ thì $OE = HK$.

Ta có $MN = 2HK = 2OE \le 2OO'$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv O'$ hay $MN \perp AB$.

Ví dụ 20

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (Q khác B, Q khác C). Gọi E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng AB và AC.

a. Chứng minh $MH.MA = MP.MN$

b. Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng

c. Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của điểm Q trên cung nhỏ BC để $\left(\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán trường THPT chuyên Hà Nội Amsterdam 2016)

Giải

a, Xét tam giác MHB và tam giác MNA, ta có:

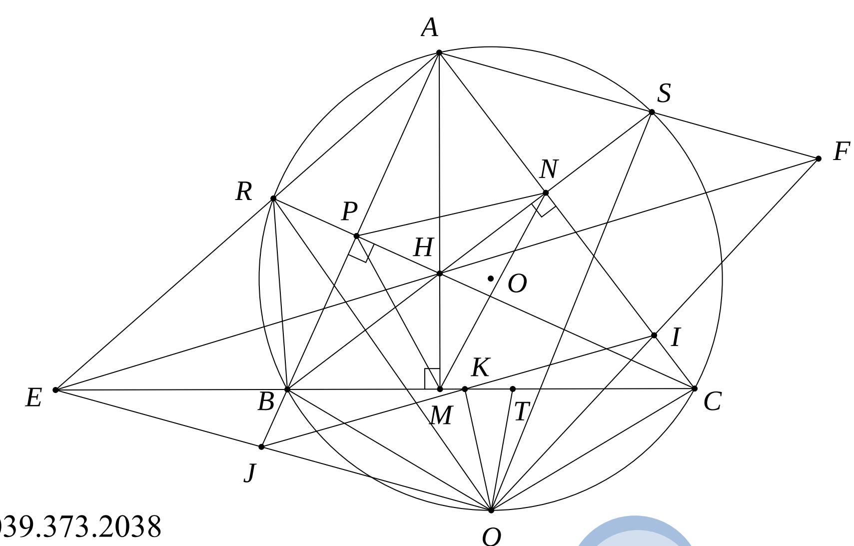
$APMC, MHCN$ nội tiếp nên

$AMP = ACP = NMH, MPH = HAN$

nên $\Delta MHP \backsim \Delta MNA \Rightarrow \frac{MH}{MN} = \frac{MP}{MA}$

hay $MH.MA = MN.MP$.

b, Dựng $QK \perp BC$ ta có các tứ giác $JBKQ, QKIC, ABQC$ nội tiếp nên ta có thể biến đổi góc sau:



$JKQ = JBQ = ACQ = 180^0 - QKI$ hay $JKQ + QKI = 180^0$
nên J, K, I thẳng hàng.
Giả sử tia CH, BH cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là R, S thì $RAB = RCB = HAB$, tương tự $RBA = HBA$ nên suy ra H đối xứng với R qua AB, tương tự H đối xứng với S qua AC.
Ta có tứ giác $ERHQ$ là hình thang cân và tứ giác $CRBQ, KBJQ$ nội tiếp nên $HEQ = HRQ = CBQ = KJQ$ nên suy ra HE // KJ, chứng minh tương tự ta có: HF // KI mà I, J, K thẳng hàng nên suy ra E, H, F thẳng hàng.
c, Trên BC lấy điểm T sao cho $QCT = QBA$ suy ra $\Delta QBA \backsim \Delta QCT$, QJ, QK là các đường cao tương ứng nên suy ra $\frac{AB}{QJ} = \frac{TC}{QK}$ (1), tương tự $\Delta BQT \backsim \Delta AQC \Rightarrow \frac{AC}{QI} = \frac{TB}{QK}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{TC}{QK} + \frac{TB}{QK} = \frac{BC}{QK}$ suy ra $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BC}{QK}$ nhỏ nhất, hay QK lớn nhất suy ra Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC.
6. Bất đẳng thức Erdos-Mordell
Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức:
a, $R_a + R_b + R_c \ge 2(d_a + d_b + d_c)$
b, $R_a.R_b.R_c \ge 8d_a d_b d_c$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác.
Hướng dẫn giải:
a) Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường phân giác trong của BAC. Dựng $BH \perp AM_1$ và $CK \perp AM_1$. Giả sử AM_1 cắt BC tại D.
Khi đó $BD \ge BH$, $DC \ge CK$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD \perp BC$ hay $AM_1 \perp BC$.
Từ đó ta có $a \ge BH + CK \Leftrightarrow aR_a \ge 2S_{ABM_1} + 2S_{ACM_1}$ (chú ý rằng $AM_1 = AM = R_a$) hay $aR_a \ge cd_b + bd_c$.
Từ đó $R_a \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1).
Tương tự ta có $R_b \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2), $R_c \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3).
Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta thu được
$$R_a + R_b + R_c \ge d_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge 2(d_a + d_b + d_c)$$
(Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $x + y \ge 2\sqrt{xy}$ cho các biểu thức trong ngoặc).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác ABC. Nói cách khác, M_1 (và do đó cả M) là tâm của tam giác đều ABC.

b) Từ cách chứng minh bất đẳng thức Erdos – Mordell ở câu a) ta có

$R_3 \ge \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1); $R_b \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2); $R_c \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3).

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$R_a \cdot R_b \cdot R_c \ge \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a\right).$$

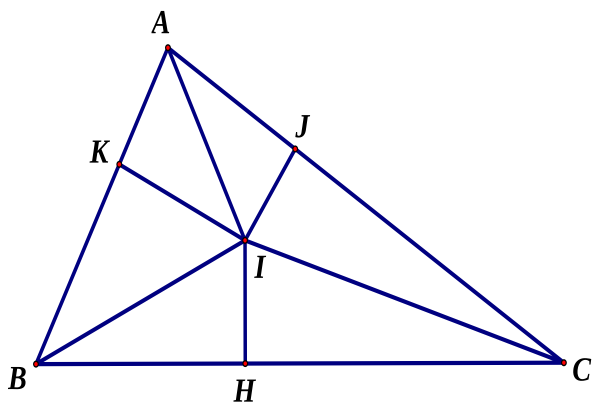
Áp dụng bất đẳng thức $x+y \ge 2\sqrt{xy}$ ta có

$$\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}d_b \cdot \frac{b}{a}d_c} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}d_c \cdot \frac{c}{b}d_a} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{c}d_b \cdot \frac{b}{c}d_a} = 8d_a d_b d_c.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 21

Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $IA+IB+IC=6r$.



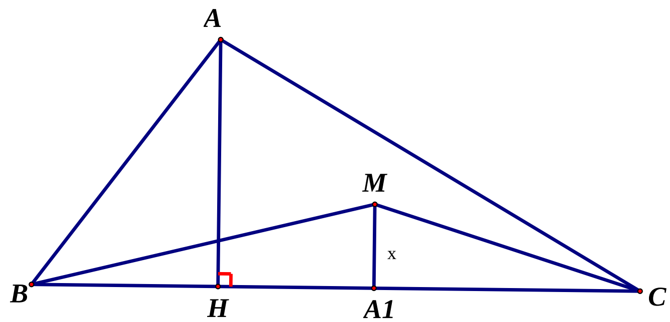
Kẻ IH, IJ, IK Theo thứ tự vuông góc với các cạnh BC, CA, AB . Ta có $IH = IJ = IK = r$.Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm *I* trong tam giác *ABC*, ta thấy $IA + IB + IC \ge 2(IH + IJ + IK) = 6r$.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác *ABC* đều .

Nói cách khác , điều kiện cần và đủ để tam giác *ABC* đều là $IA+IB+IC=6r$.

Ví dụ 22

Giả sử *M* là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác *ABC*. Gọi *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác . Chứng minh rằng $IA+IB+IC \ge 6r$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải



Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Kẻ AH vuông góc với BC, MA_1 vuông góc BC. Khi đó ta có $AM + MA_1 \geq AH$. Từ đó $AM \geq \frac{2S_{ABC}}{BC} - x$.

Tương tự , $BM \geq \frac{2S_{ABC}}{CA} - y; CM \geq \frac{2S_{ABC}}{AB} - z$.

Cộng ba vế bất đẳng thức vế theo vế ta được

$MA + MB + MC \geq 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) - (x + y + z)$ =

$r(BC + CA + AB)\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) - (x + y + z)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được : $(MA + MB + MC)\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} + \frac{1}{AB}\right) \geq 9$ (2)

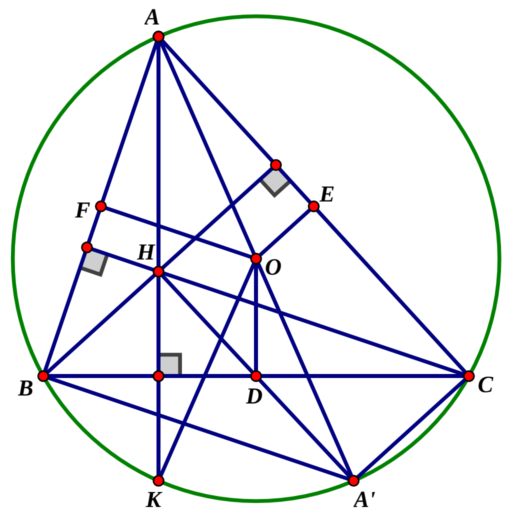
.Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm M đối với tam giác ABC ta có : $MA + MB + MC \geq 2(x + y + z)$ (3). Từ (1) , (2), (3) suy ra

$MA + MB + MC \geq 9r - \left(\frac{MA + MB + MC}{2}\right)$ hay $MA + MB + MC \geq 6r$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều (*đpcm*).

Ví dụ 23

Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$.

Giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, K là điểm đối xứng với H qua BC suy ra K nằm trên (O) và $HD = DK$

Áp dụng bất đẳng thức cho 3 điểm bất kỳ ta có:

$HD + OD = DK + OD \geq OK = R$

Suy ra $HD + HE + HF = 3R - (OD + OE + OF)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có:

$$OD + OE + OF \leq \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3R}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 24

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H.

a, Giả sử BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm vị trí điểm A để $HA + HB + HC$ lớn nhất.

b, Kẻ OO_1 vuông góc với BC, OO_2 vuông góc với AC, OO_3 vuông góc với AB. Chứng minh rằng : $HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq OO_1 + OO_2 + OO_3 \leq \frac{3R}{2}$.

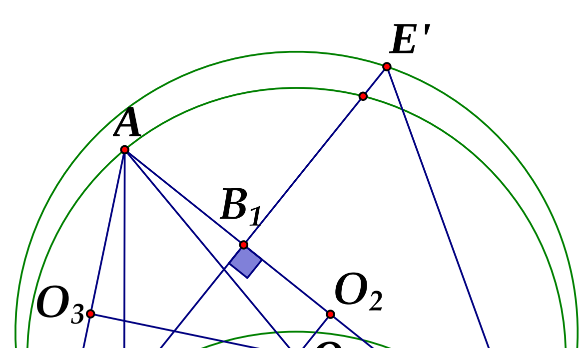
Giải:

a, Ta có tính chất H thuộc đường tròn cố định $(M';R)$ (M' là điểm đối xứng với O qua BC) mà BC là dây cung cố định của $(M';R)$ nên

BHC không đổi suy ra $EHC = 180^0 - BHC = \varphi$ không đổi. Ta cũng có: $AH = 2OM$ suy ra HA có độ dài không đổi.

Như vậy để tìm GTLN của $HA + HB + HC$ ta quy về tìm GTLN của $HB + HC$.

Trên tia đối của tia HB ta lấy một điểm E' sao cho $HE' = HC \Rightarrow \Delta HE'C$ cân tại H



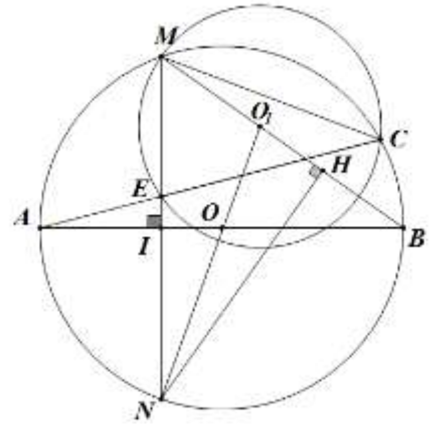
điểm *A* nằm chính giữa cung *BC* là vị trí cần tìm.
b) Ta có tính chất quen thuộc: $HA = 2OO_1$; $HB = 2OO_2$; $HC = 2OO_3$.
Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm *H* trong tam giác *ABC*, ta có:
$HA_1 + HB_1 + HC_1 \le \dfrac{HA + HB + HC}{2} = OO_1 + OO_2 + OO_3$. Áp dụng bất đẳng thức Erdos – Mordell cho điểm *O* trong tam giác *ABC* ta có: $OO_1 + OO_2 + OO_3 \le \dfrac{OA + OB + OC}{2} = \dfrac{3R}{2}$
(đpcm)
Câu b) thực chất là dạng tổng quát của câu a).

Ví dụ 25
Cho đường tròn (O) đường kính *AB* cố định. Lấy điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \dfrac{2}{3}AO$. Kẻ dây cung *MN* vuông góc với *AB* tại *I*, gọi *C* là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn *MN* sao cho *C* không trùng với *M*, *N* và *B*. Nối *AC* cắt đoạn thẳng *MN* tại *E*.
a) Chứng minh rằng tứ giác *IECB* nội tiếp.
b) Chứng minh rằng $AM^2 = AE.\ AC$.
c) Xác định vị trí điểm C sao cho khoảng cách từ N đến đường tròn ngoại tiếp ΔCME nhỏ nhất.

Giải

a) Ta có $\mathrm{EIB} = 90^\circ; \mathrm{ECB} = 90^\circ \Rightarrow$ *tứ giác IECB* nội tiếp đường tròn đường kính BE.

b) ta có $AB \perp MN \Rightarrow AM = AN$ nên $AMN = ACM$. Lại có CAM chung nên $\Delta AME \backsim \Delta ACM$(g.g) $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$



Trên nửa mặt phẳng bờ *ME* có chứa điểm *A*, ta vẽ tiếp tuyến *Mx* của đường tròn ngoại tiếp Δ*MCE*

$\Rightarrow EMx = ECM$ mà $EMA = EMC$ (chứng minh câu b)

$\Rightarrow EMx = ECA$ => *MA* và tia *Mx* trùng nhau => *MA* là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ*MCE.* Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *MCE* => $O_1M \perp MA$. Mặt khác ta có $BM \perp MA$ => *M*, O_1, *B* thẳng hàng

Suy ra NO_1 nhỏ nhất khi $NO_1 \perp BM$. Khi đó ta xác định được điểm C như sau: Kẻ $NO_1 \perp BM$ tại O_1. Vẽ đường tròn tâm O_1 bản kính O_1M cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là *C.*

Ví dụ 26

Cho đường tròn (O, R) và hai đường kính *MN, PQ* vuông góc vôi nhau. Lấy điểm *A* trên cung nhỏ *PN, PA* cắt *MN* tại *B. AQ* cắt *MN* tại *E.*

a) Chứng minh: *OABQ* là tứ giác nội tiếp.

b) Nối *AM* cắt *PQ* và *PS* lần lượt tại *C.I.* Chứng minh: Tích *MC.MA* không đổi khi *A* di chuyển trên cung nhỏ *PN* .

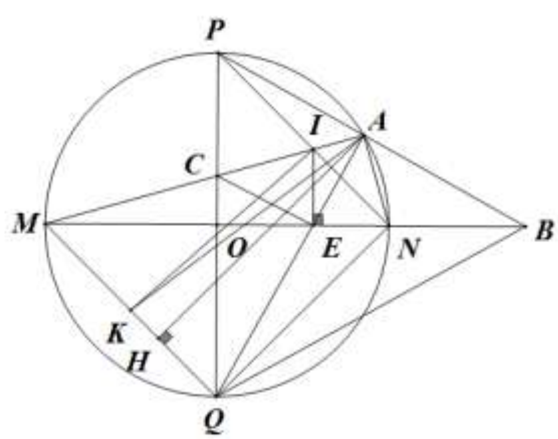
c) Chứng minh: $IN = \sqrt{2}EN$.

d) Tìm vị trí điểm *A* để diện tích tam giác *ACE* lớn nhất.

Giải

Vì điểm *A* nằm trên đường tròn đường kính

$PAQ = 90^0$ suy ra $QAB = 90^0$.



Ta có $QOB = 90^0$ (giả thiết $PQ \perp MN$).

Từ đó suy ra $QAB = QOB = 90^0$ => *OABQ là tứ giác* nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp trên 1 cạnh OA cùng nhìn cạnh *BQ* một góc 90°)

Vì điểm A nằm trên đường tròn đường kính *MN* nên $MAN = 90^0$

Xét các tam giác *MAN* và *MOC* có:

$MAN = MOC = 90^0$ suy ra Δ*MAN* ∽ Δ*MOC* (g.g) suy ra $\frac{MA}{MO}=\frac{MN}{MC}$ (tỷ số đồng dạng) hay *MA.MC= MO.MN* mà *MO = R, MN=2R* *nên MA.MC* = 2R^2 (không đổi).

c. Vì *PQ, MN* là 2 đường kính của (O) và $PQ \perp MN$ nên *PMQN* lả hình vuông.

Xét tứ giác *IANE*.

Ta có: $IAE = MAQ = \frac{1}{2}MOQ = 45^0$ (quan hệ góc nội tiếp với góc ở tâm chắn cùng 1 cung)

$INE = PNO = 45^0$ suy ra $IAE = INE$ do đó *IANE* là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp trên cùng một cạnh *AN* cùng nhìn cạnh *IE* góc bằng nhau). Suy ra

$IAN + IEN = 180^0 \Rightarrow IEN = 180^0 - IAN = 180^0 - 90^0 = 90^0$. Tam giác *IEN* vuông tại E và có $INE = 45^0$ => *IEN* là tam giác vuông cân, dẫn đến $IN = \sqrt{2}EN$.

d. Ta có $S_{ACE} = S_{AMQ} - S_{MCDQ}$

Xét tam giác *MQE* và tam giác *MCQ* ta có: *MQC = QME* = 45^0,

$MCQ = \frac{1}{2}sd(PA + MQ) = \frac{1}{2}sd(PA + MP) = \frac{1}{2}sdMA = MQE$

suy ra $\Delta MQE \backsim \Delta MQC$ (g.g)

suy ra $\frac{MQ}{QC} = \frac{ME}{MQ} \Leftrightarrow QCME = MQ^2 = 2R^2$ suy ra $S_{MCDQ} = \frac{1}{2}QC.ME = R^2$.

Như vậy ta có: $S_{ACE} = S_{AMQ} - R^2$ nên S_{ACE} lớn nhất khi và chỉ khi S_{AMQ} lớn nhất.

Kẻ $AH \perp MQ$, gọi *K* là trung điểm *MQ* thì ta có $OK \perp MQ$ và

$$OK^2 = OM^2 - KM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{2}R}{2}$$

Ta có $S_{AMQ} = \frac{1}{2}AH \cdot MQ = \frac{1}{2}R\sqrt{2}AH$, trong tam giác AHK ta có: AH ≤ AK, mặt khác ta cũng có: $AK \le AO + OK = R + \frac{R\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R$, suy ra

$$S_{ANQ} \le \frac{1}{2}R\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R = \frac{1+\sqrt{2}}{2}R^2$$

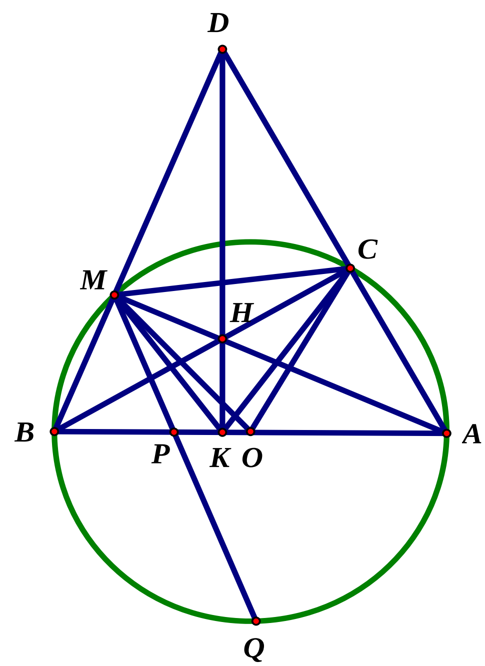
Vậy $S_{ACE} = S_{AMQ} - R^2 \le \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)R^2 - R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)R^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi vả chỉ khi *H≡K* vả *A,O,C* thẳng hàng. Suy ra điểm *A* là điểm chính giữa cung nhỏ *PN.*

Vậy để diện tích tam giác ACE lớn nhất thì điểm A phải là điểm chính giữa cung nhỏ PN

Ví dụ 27

Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C nằm trên (O), lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B,C. Các đường thẳng AC,BM cắt nhau tại D. Phân giác trong góc BMA cắt AB tại P. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{MA+MB}{MP}$.

Giải



Kéo dài MP cắt (O) tại Q.

Ta có : $MPB = AQB$ đối đỉnh.

$BMQ = QAP$ cùng chắn cung BQ của (O).

Suy ra $\Delta MBP \sim \Delta AQP \Rightarrow \dfrac{MB}{AQ} = \dfrac{MP}{AP} \Leftrightarrow MB = \dfrac{MP.AQ}{AP}$.

Tương tự ta có : $MA = \dfrac{MP.BQ}{BP}$.

Suy ra $MA + MB = \dfrac{MP.BQ}{BP} + \dfrac{MP.AQ}{AP} \geq 2\sqrt{\dfrac{BQ.AQ}{BP.AP}}.MP$.

Lại có $BP.AQ \leq \dfrac{(BP+AP)^2}{4} = \dfrac{AB^2}{4} = R^2, BQ = AQ = R\sqrt{2}$.

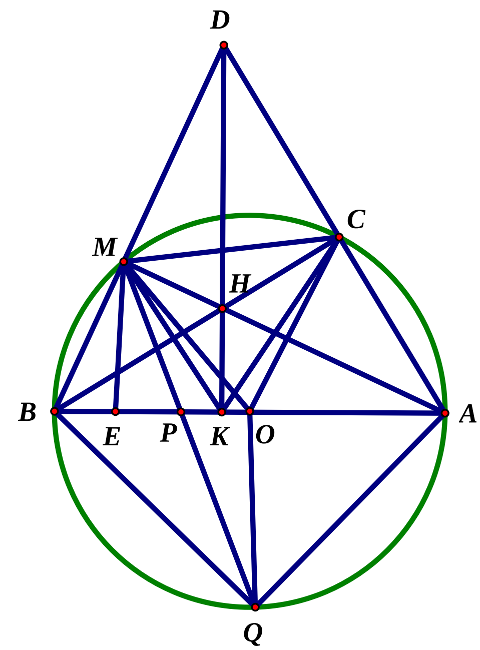
Suy ra $MA + MB \geq 2\sqrt{2}MP$ hay $\dfrac{MA+MB}{MP} \geq 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB, BP = PA$ hay M là điểm chính giữa cung BC.

Cách khác :

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $MBQA$ ta có $MB.QA + MA.QB = MQ.BA$ do Q là điểm chính giữa cung BC nên tam giác ABQ vuông cân tại Q suy ra $QB = QA = R\sqrt{2}, AB = 2R$ dẫn đến $MA + MB = \sqrt{2}MQ.$

Ta suy ra $\dfrac{MP}{MA+MB} = \dfrac{MP}{\sqrt{2}MQ}$, dựng $ME \perp BC$ thì $\dfrac{MQ}{MP} = 1 + \dfrac{PQ}{MP} = 1 + \dfrac{OQ}{ME} \geq 2$ suy ra $\dfrac{MA+MB}{MP} \geq 2\sqrt{2}$ dấu đẳng thức xảy ra khi $ME = OQ$ hay M là điểm chính giữa cung BC.



CHƯƠNG VII: NHỮNG ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC NỔI TIẾNG

I.ĐỊNH LÝ THALETS

1.Định lý Thalets thuận:

Nếu có một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

2.Định lý Thalets đảo:

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

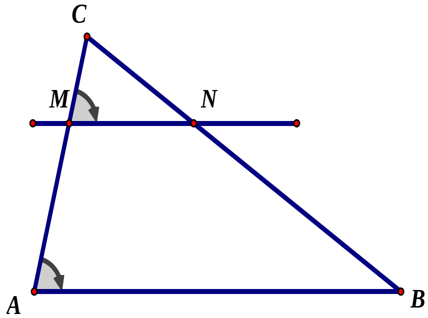
(Chú ý nếu đường thẳng song song với một cạnh và cắt hai cạnh còn lại ở phần kéo dài thì định lý vẫn đúng)

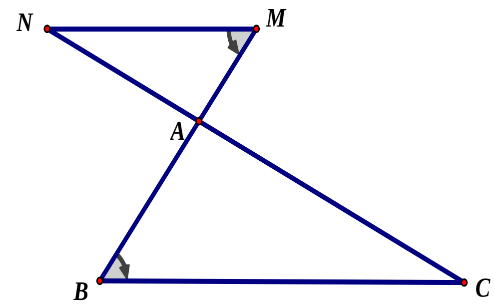
3.Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ ba thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỷ lệ với ba cạnh tam giác đã cho.

$\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC}$





Chú ý: Định lý Thalets cũng đúng cho hình thang: $AB\ //\ EF\ //\ CD$ thì $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{BF}{BC},\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{BF}{FC}$ với

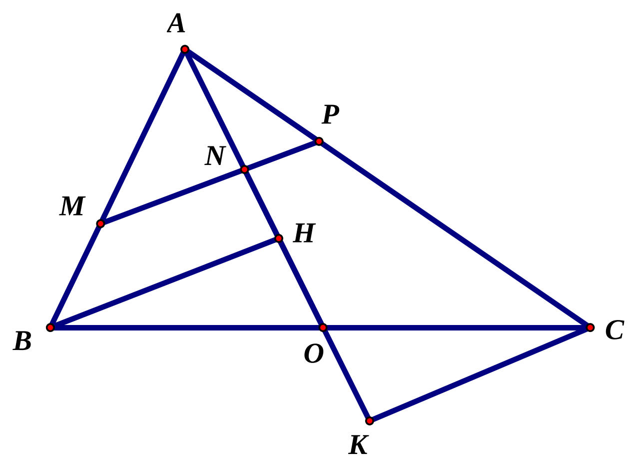
$E\in AD, F\in BC.$

4. Một số kết quả, định lý quan trọng:

a, Cho tam giác ABC có O là trung điểm của BC.

Một đường thẳng bất kì cắt cạnh AB, AO, AC tại M, N, P

khi đó ta có : $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{2AO}{AN}.$



Chứng minh:

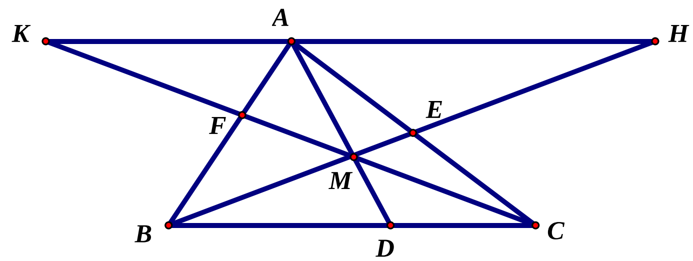
Dựng các đường thẳng qua B, C song song với MP cắt AO lần lượt tại H, K.

Áp dụng định lý Thalets ta có $\dfrac{AP}{AM}=\dfrac{AH}{AN},\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{AK}{AN}$ cộng hai đẳng thức ta có:

$\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{AH+AK}{AN}$. Để ý rằng : $\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AO-AH}{AN},\dfrac{AK}{AN}=\dfrac{AO+OK}{AN}$. Mặt khác $\Delta BOH=\Delta COK$ (g.c.g) suy ra $OH=OK$ nên $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{AH+AK}{AN}=\dfrac{AO-OK+AO+OK}{AN}=\dfrac{2AO}{AN}$ (đpcm).

b) Định lý **Van –Aubel**

Điểm M nằm trong tam giác ABC, các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện tại D, E, F thì $\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$.



Giải

Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt BE, CF lần lượt tại H, K. Áp dụng định lý Thalets ta có :

$\frac{AF}{FB} = \frac{AK}{BC}, \frac{AE}{EC} = \frac{AH}{BC}$ cộng hai đẳng thức ta có $\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{KH}{BC} = \frac{MK}{MC} = \frac{MA}{MD}$ (đpcm).

II. ĐỊNH LÝ MENELAUS

1.Định lý thuận

Cho tam giác ABC và 3 điểm M, N, P nằm trên đường thẳng chứa 3 cạnh AB, BC, AC.

Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$.

Chứng minh

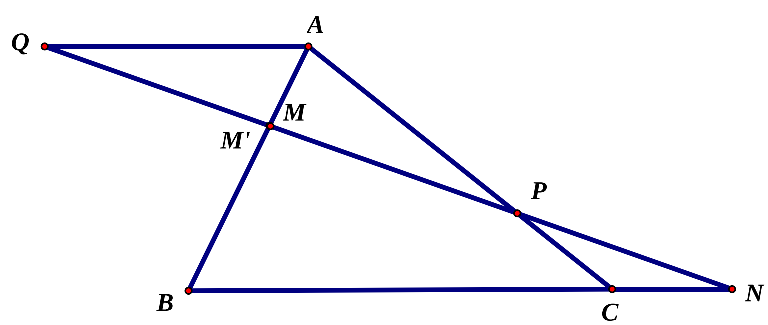
Dựng đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng chứa M, N, P tại Q. Áp dụng định lý Thales ta có:

$\frac{MA}{MB} = \frac{QA}{BN}, \frac{PC}{PA} = \frac{NC}{QA}$.

Suy ra

$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{QA}{BN} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{NC}{QA} = 1$

(đpcm).



2. Định lý menelaus đảo

Nếu 3 điểm M,N,P nằm trên đường thẳng chứa 3 cạnh AB,BC,AC và $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ thì M,N,P thẳng hàng.

Chứng minh:

Giả sử đường thẳng NP cắt AB tại M'. Theo định lý Thales thuận ta có
$\frac{M'A}{M'B}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1.$

Kết hợp với $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ ta suy ra $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$ suy ra $M\equiv M'$ hay M,N,P thẳng hàng.

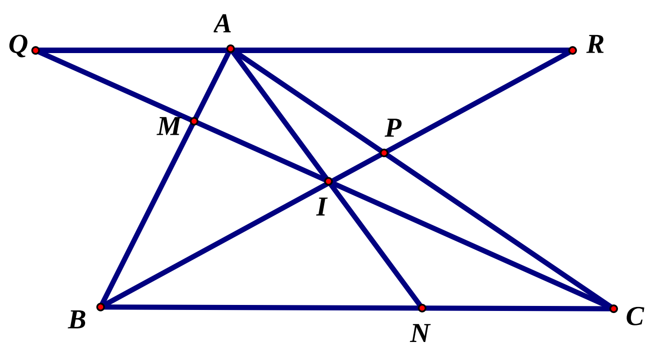
3.Định lý Ceva:

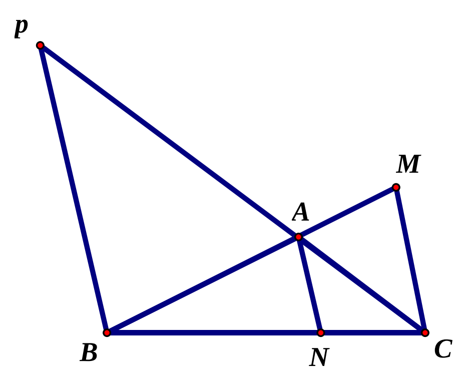
a,Định lý Ceva thuận:

Ba đường thẳng đi qua 3 đỉnh của tam giác ABC đồng quy hoặc cùng song song với nhau và cắt các cạnh AB,BC,AC (hay đường kéo dài) lần lượt tại M,N,P thì ta luôn có
$\frac{AM}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$

b,Định lý Ceva đảo:

Nếu M,N,P lần lượt nằm trên các cạnh AB,BC,AC (hay đường kéo dài) và thỏa mãn $\frac{AM}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ thì các đường thẳng AN,BP,CM đồng quy hoặc song song với nhau.





Chứng minh : Định lý Ceva

Giả sử đường thẳng qua A song song với BC cắt CM,BP lần lượt tại Q,R. Theo định lý Thales ta có :

$\frac{MA}{MB}=\frac{QA}{BC},\frac{PC}{PA}=\frac{CB}{AR}$. Suy ra $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{QA}{BC}.\frac{NB}{NC}.\frac{CB}{AR}$ mặt khác ta cũng có:

$\frac{QA}{NC}=\frac{IA}{IN}=\frac{AR}{BN}$ nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{AR}{BN}.\frac{NB}{AR}=1$ (đpcm)

Trường hợp: AN // BP // CN.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{CN}{BC},\frac{PC}{PA}=\frac{BC}{BN}$ nên $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=\frac{CN}{BC}.\frac{NB}{NC}.\frac{BC}{BN}=1$ đpcm

Chứng minh : Định lý Ceva đảo:

Giả sử BP cắt AN tại I, CI cắt AB tại M'. Theo định lý Ceva thuận: $\frac{M'A}{M'B}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ kết hợp với giả thiết : $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA}=1$ ta suy ra $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$ suy ra $M\equiv M'$.

Trường hợp: AN // BP ta dễ dàng có được kết quả AN // BP // CN.

4.Bổ đề hình thang

Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB,CD khi đó trung điểm các cạnh đáy, giao điểm hai đường chéo và giao điểm của hai cạnh bên nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh:

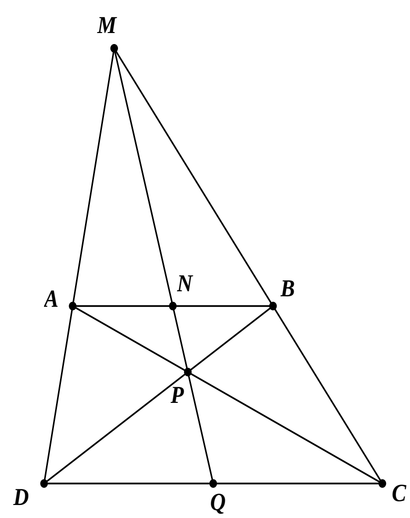
Giả sử các đường thẳng AD,BC cắt nhau tại M.

AC,BD cắt nhau tai P, đường thẳng MP cắt AB,CD lần lượt là trung điểm của $AB,CD.$

Thật vậy: Do AB // CD theo định lí Thales ta có: $\frac{AN}{QD}=\frac{NB}{QC}$ (1), $\frac{AN}{QC}=\frac{BN}{QD}$ (2). Lấy (1) nhân với (2) ta có:

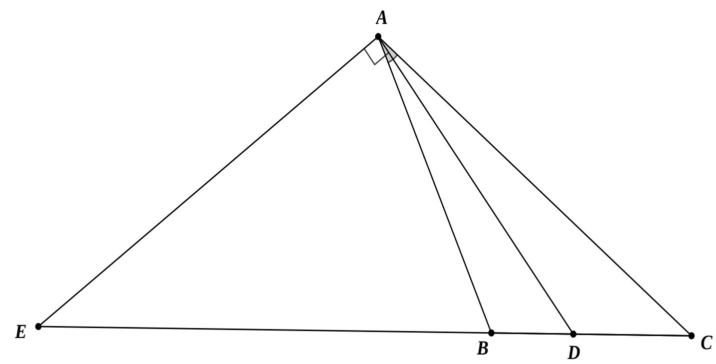
$\frac{AN^2}{QC.QD}=\frac{NB^2}{QC.QD}\Rightarrow AN=NB$ thay vào (1) ta có $QD=QC.$

Hay N,Q lần lượt là trung điểm của $AB,CD.$



5. Tình chất phân giác:

Cho tam giác ABC có đường phân giác trong góc A là AD và phân giác ngoài góc A là AE. Khi đó ta có: $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}$.



MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, điểm N nằm trên cạnh AB sao cho $AN=\frac{1}{3}AB$, điểm Q nằm trên cạnh AC sao cho $AQ=\frac{2}{3}AC$, đường thẳng QN cắt đường thẳng AM và BC lần lượt tại điểm P,R

a) Tính $\frac{RB}{RC},\frac{PA}{PM}$.

b) Một đường thẳng thay đổi cắt các cạnh AB,AC tại E,F sao cho $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=4$. Chứng minh đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định

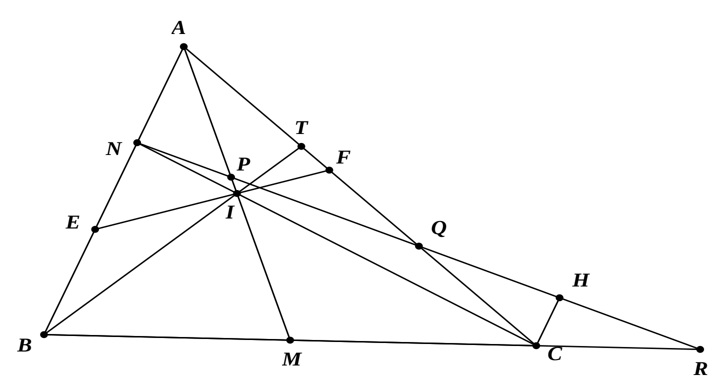
c) Đường thẳng qua N song song với BC cắt AC tại T. Chứng minh: CN,BT cắt nhau tại trung điểm của đoạn thẳng AM.

Giải

a) Để tính tỷ số ta dựng đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng NQ tại H. Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{RC}{RB}=\frac{HC}{NB}=\frac{HC}{2NA}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{HC}{NA}=\frac{1}{2}\frac{QC}{QA}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



Cách khác: Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC và cắt tuyến NQR ta có:

$$\frac{NA}{NB}.\frac{RB}{RC}.\frac{QC}{QA}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{QC}{QA}.\frac{1}{2}=1 \Rightarrow \frac{RB}{RC}=\frac{1}{4}.$$

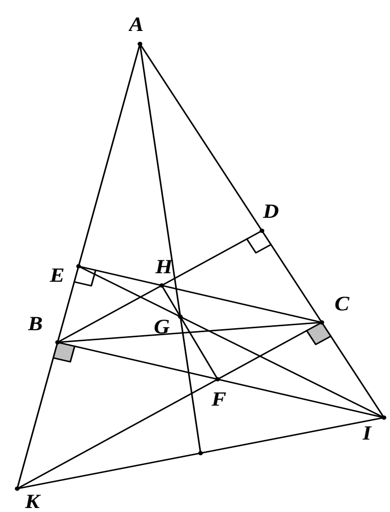
b. Giả sử đường thẳng EF cắt đoạn thẳng AM ở I. ÁP dụng kết quả ở câu 4a) ta có: $\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=\frac{2AM}{AI}$. Từ đó suy ra $\frac{2AM}{AI}=4 \Leftrightarrow AM=2AI$, hay I là trung điểm của AM. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm I của AM.

c. Theo định lý Thales ta có: $\frac{AN}{AB}+\frac{AT}{AC}=\frac{1}{2}$. Giả sử CN, BT cắt nhau tại điểm I' và AI' cắt BC tại M'. Theo định lý Van – Aubel ta có: $\frac{AI'}{I'M'}=\frac{AN}{NB}+\frac{AT}{TB}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\Rightarrow I'$ là trung điểm của AM'. Áp dụng định lý Cave cho 3 đường thẳng đông quy AM', CN, BT ta có: $\frac{AN}{NB}.\frac{M'B}{M'C}.\frac{TC}{TA}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{M'B}{M'C}.2=1 \Rightarrow \frac{M'B}{M'C}=1 \Leftrightarrow M'$ là trung điểm của BC. Như vậy ta có: $M' \equiv M, I' \equiv I$. Hay BT, CN, AM đồng quy tại I.

Ví dụ 2

Cho tam giác nhọn ABC có $A=45°$, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Đường vuông góc với AB tại B, cắt AC ở I. Đường vuông góc với AC tại C, cắt AB ở K. Gọi F là giao của BI và CK, G là giao điểm của FH và EI. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác AIK.

Giải



Tam giác vuông ACK có $A = 45°$ nên là tam giác vuông cân, CE là đường cao nên $AE = EK, IE$ là đường trung tuyến của ΔAIK. Ta sẽ chứng minh $IG = 2GE$ (bằng cách chứng minh $FI = 2EH$).

Ta có $FI = CF\sqrt{2}$ (vì ΔCIF vuông cân), $CF = BH$ (vì $BFCH$ là hình bình hành),

$BH = EH\sqrt{2}$ (vì ΔBEH vuông cân), nên $FI = 2EH$.

Do $EH \,//\, FI$ nên theo định lí Thales, ta có

$\dfrac{IG}{GE} = \dfrac{FI}{EH} = 2,$ suy ra $IG = 2GE$. Vậy G là trọng tâm tam giác AIK.

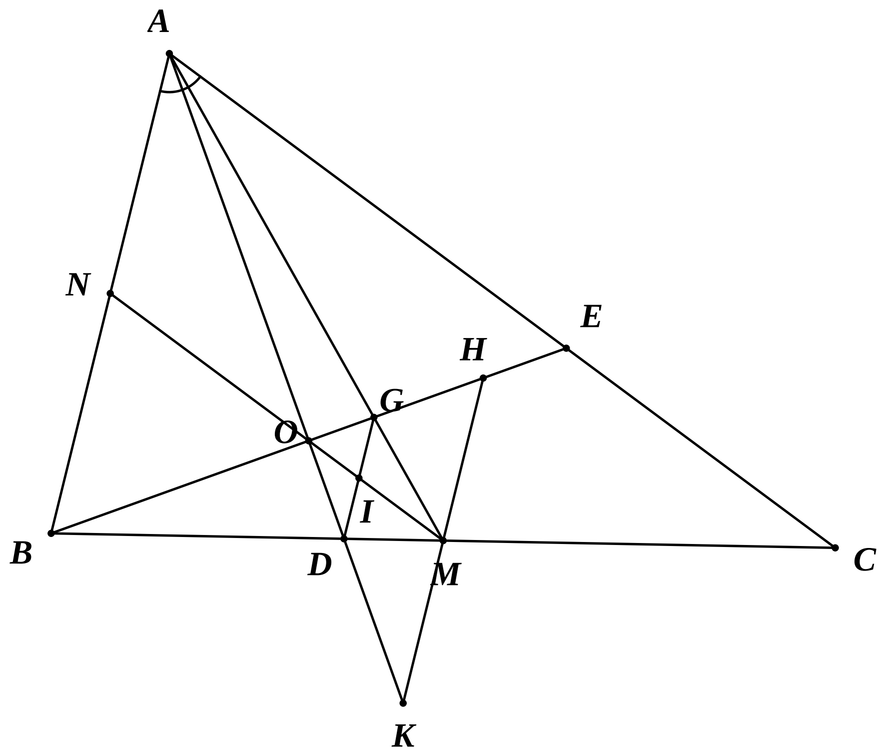
Ví dụ 3

Cho tam giác $ABC(AB < AC),$ đường phân giác $AD,$ đường trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB.$ Gọi O, G theo thứ tự là giao điểm của BE với AD, AM.

a, Chứng minh rằng $DG \,//\, AB.$

b, Gọi I là giao điểm của MO và DG. Chứng mình rằng $DI = IG.$

Giải



a, Tam giác ABE cân tại A, AO là đường phân giác nên $BO = OE$. ΔBEC có OM là đường trung bình nên $OM \,//\, EC$. Tam giác ABC có $BM = MC$ và $OM \,//\, EC$ nên MO đi qua trung điểm N của AB.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BO và AO theo thứ tự tại H và K.

Ta có $HK \,//\, AB$ và $AN \,//\, NB$ nên $MK = MH$ (theo bổ đề hình thang).

Do $HK \,//\, AB$, Theo định lý Thales ta có $\frac{MD}{DB} = \frac{MK}{AB} = \frac{MH}{AB}$ (vì $MK = MH$) $= \frac{MG}{GA}$ Từ đó ta có $\frac{MD}{DB} = \frac{MG}{GA} \Rightarrow DG \,//\, AB$ (định lí Thales đảo).

b, Ta có $DG \,//\, AB$ và $AN = NB$ nên $DI = IG$ (Theo bổ đề hình thang).

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC vuong tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường vuông góc vơi BC cắt đường thẳng BI tại D. Chứng minh rằng $DA = DC$.

Giải

Gọi M là trung điểm của AC, N là giao của MI và AB. Tam giác AHC có MI là đường trung bình nên $MI \,//\, HC$, tức là $MN \,//\, BC$.

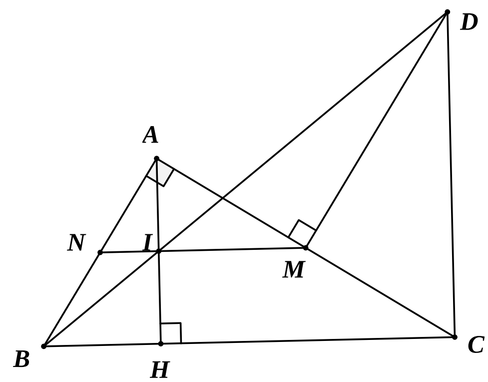
Theo định lí Thales:

Do $AH\ //\ CD$ nên $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{HB}{HC}$. (1)

Do $MN\ //\ BC$ nên

$\dfrac{IN}{HB}=\dfrac{AI}{AH}=\dfrac{IM}{HC}$, (1)

Tức là $\dfrac{IN}{IM}=\dfrac{HB}{HC}$. (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{IN}{IM}$, do đó $BN\ //\ DM$ (định lí Thales đảo)

Ta lại có $BN\perp AC$ nên $DM\perp AC$. Vậy DM là đường trung trức của AC, suy ra $DA=DC$.

Ví dụ 5

Cho hình bình hành $ABCD$ giao 2 đường chéo là O, một đường thẳng đi qua đỉnh D cắt cạnh AB tại M, cắt BC ở N và cắt đường chéo AC tại I, đường thẳng NO cắt CD tại F. Dựng $BE\ //\ AC$, đường thẳng AE cắt BC tại P.

a, Chứng minh: $AM.CN$ không đổi.

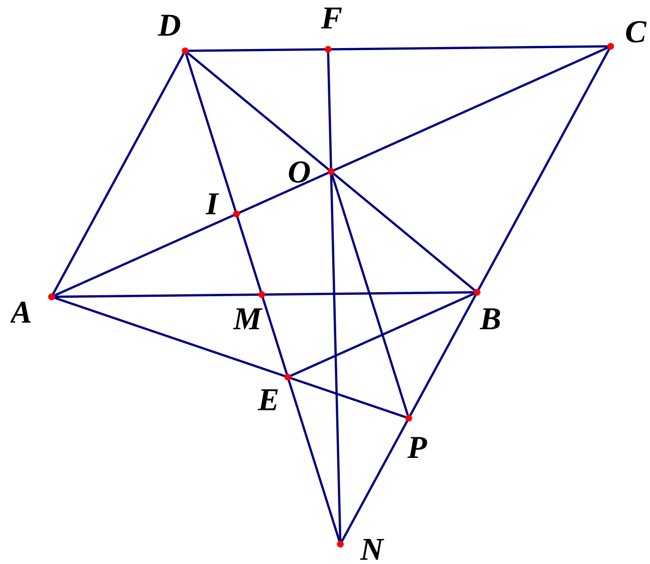
b, Chứng minh: $ID^2=IM.IN$.

c, $\dfrac{EM}{EN}=\dfrac{DM}{DN}$.

d, Chứng minh: $OP\ //\ DN$

e, $\dfrac{1}{DI}=\dfrac{1}{DM}+\dfrac{1}{DN}$.

Giải



a, Do $AM \,//\, CD$ nên ta có: $\dfrac{AM}{CD}=\dfrac{AI}{IC}=\dfrac{AD}{CN} \Rightarrow AM.CN = AD.CD$.

b, Do $AM \,//\, CD$ nên: $\dfrac{IM}{ID}=\dfrac{IA}{IC}=\dfrac{ID}{IN} \Rightarrow ID^2 = IM.IN$.

c, Do $BE \,//\, AC$ nên

$\dfrac{MI}{ME}=\dfrac{MA}{MB} \Rightarrow \dfrac{MI+MA}{ME}=\dfrac{MA+MB}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{EI}{ME}=\dfrac{AB}{MB}=\dfrac{CD}{MB}=\dfrac{CN}{MB}=\dfrac{IN}{EN}$, hay

$\dfrac{EI}{ME}=\dfrac{IN}{EN} \Leftrightarrow \dfrac{ME}{NE}=\dfrac{EI}{NI}=\dfrac{CB}{NC}=\dfrac{DM}{DN}$ đpcm.

Tứ giác $ACBE$ là hình thang, theo bổ đề hình thang OP đi qua trung điểm của EB nên $OP \,//\, DN$.

e, Ta cần chứng minh: $\dfrac{DI}{DM}+\dfrac{DI}{DN}=1$. Ta có: $\dfrac{DI}{DM}=\dfrac{CI}{CA}, \dfrac{DI}{DN}=\dfrac{AI}{AC}$ suy ra

$\dfrac{DI}{DM}+\dfrac{DI}{DN}=\dfrac{CI}{AC}+\dfrac{AI}{AC}=\dfrac{AC}{AC}=1$.

Ví dụ 6

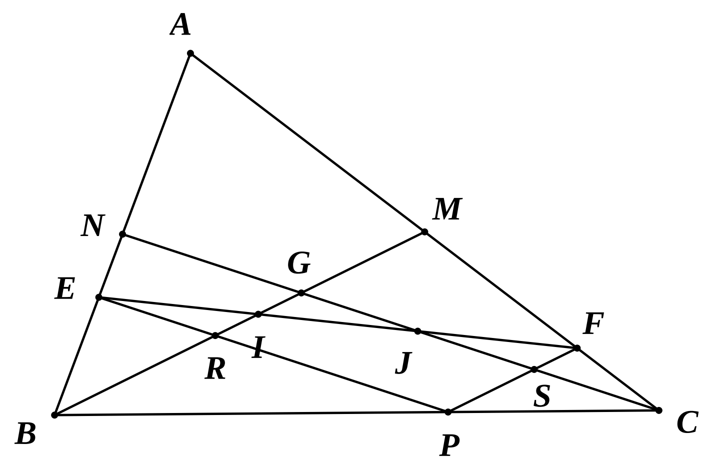
Cho tam giác ABC có trong tâm là điểm G. Gọi P là điểm nằm trên cạnh BC. Các đường thẳng qua P song song với CG, BG cắt AB, AC tại E, F .

a, Chứng minh: $EI=\dfrac{1}{3}EF$.

b, Chứng minh: $IE = IJ$.

c, Chứng minh: PG đi qua trung điểm của EF .

Giải



a, Gọi BM, CN là các đường trung tuyến của tam giác ABC, BG cắt EP tại R, CG cắt FP tại S. Vì $PF // RI$ nên $\frac{EI}{EF} = \frac{ER}{EP}$ (1), vì $PE // NC$ nên $\frac{ER}{EP} = \frac{NG}{NC}$ (2). Từ (1) (2) ta suy ra $\frac{EI}{EF} = \frac{NG}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow EI = \frac{1}{3}EF$.

b, Chứng minh tương tự ta có: $\frac{JF}{EF} = \frac{FS}{EP} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow JF = \frac{1}{3}EF$ từ đó suy ra: $EI = IJ = JF$.

c, Từ chứng minh trên ta có: $\frac{ER}{EP} = \frac{FS}{FP} \Rightarrow EF // RS$. Vì $RGSP$ là hình bình hành nên GP đi qua

Trung điểm của RS nên GP cũng đi qua trung điểm của IJ .

Chú ý: Sử dụng bổ đề hình thang ta cũng suy ra GP đi qua trung điểm của IJ

Ví dụ 7

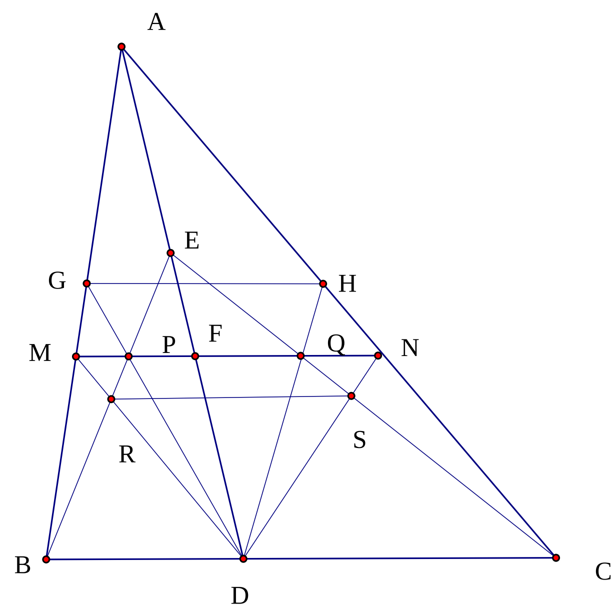
Cho tam giác nhọn ABC và một điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC , lấy một điểm E thuộc đoạn thẳng AD, F thuộc đoạn DE . Một đường thẳng qua F song song với cạnh BC cắt AB, EB, EC, AC theo thứ tự tại M, P, Q, N, đường thẳng MD, EB cắt nhau tại R. ND và EC cắt nhau tại S, DP và AB cắt nhau tại cắt AC tại H

a, Chứng minh: $\frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{DC}$

b, Chứng minh: $RS//BC$

c, Chứng minh: $GH//RS$.

Gọi K là chân đường cao hạ từ A lên cạnh BC , I là một điểm nằm trên AK , các đường thẳng BI, CI cắt AC, AB lần lượt tại X, Y . đường thẳng BI, CI cắt AC, AB lần lượt tại X, Y. Đường thẳng qua I và song song với BC cắt KX, KY lần lượt tại Z, T . Chứng minh: ΔKZT cân



Do $MF//BD$ theo định lý Thales ta có

$\frac{MF}{BD}=\frac{AF}{FD}, NF//CD \Rightarrow \frac{NF}{CD}=\frac{AF}{FD}$

Suy ra $\frac{FM}{BD}=\frac{NF}{CD}$ (1), do $PF//BD \Rightarrow \frac{PF}{BD}=\frac{FE}{FD}$

Do $FQ//CD \Rightarrow \frac{QF}{CD}=\frac{FE}{FD} \Rightarrow \frac{PF}{BD}=\frac{QF}{CD}$ (2)

Từ (1), (2) ta có

: $\frac{MF}{BD}-\frac{PF}{BD}=\frac{NF}{CD}-\frac{QF}{CD} \Leftrightarrow \frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{CD}$

b, ta có

$MP//BD \Rightarrow \frac{MP}{BD}=\frac{MK}{RD}$, $NQ//CD \Rightarrow \frac{NQ}{CD}=\frac{NS}{SD} \Rightarrow \frac{MR}{RD}=\frac{NS}{SD} \Rightarrow RS//MN$

Do $MN//BC \Rightarrow RS//BC$

c, do $MP//BD \Rightarrow \frac{MP}{BD}=\frac{GP}{GD}, FQ//CD \Rightarrow \frac{QN}{CD}=\frac{HQ}{HD}$ theo câu a thì $\frac{MP}{BD}=\frac{NQ}{CD}$ nên

$\frac{GP}{GD}=\frac{HQ}{HD} \Rightarrow \frac{DP}{DG}=\frac{DQ}{DH} \Rightarrow GH//PQ$ hay $GH//BC//RS$

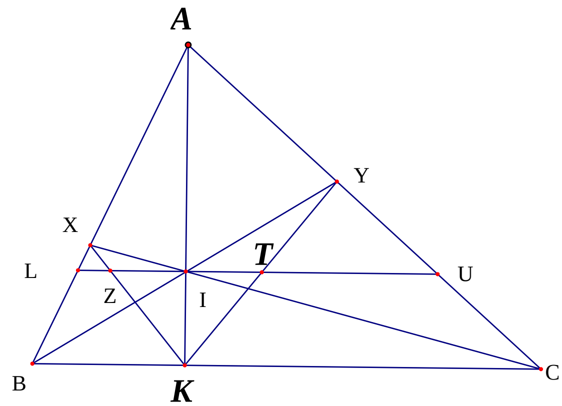
d, giả sử đường thẳng qua I song song với BC cắt AB, AC tại L, U

Do $IZ//KC$ nên $\frac{IZ}{KC}=\frac{XZ}{XK}$, $IL//BC$ nên $\frac{IL}{BC}=\frac{XZ}{XK} \Rightarrow \frac{IZ}{KC}=\frac{IL}{BC} \Leftrightarrow \frac{IZ}{IL}=\frac{KC}{BC}$ (1)

Hay $IZ=\frac{KC}{BC}.IL$, tương tự ta có :

$IT=\frac{BK}{BC}.IU$ (2) từ (1), (2) ta có: $\frac{IZ}{IT}=\frac{KC}{BK}.\frac{IL}{IU}$ nhưng $\frac{KC}{IU}=\frac{KB}{IL}$ nên $\frac{IZ}{IT}=\frac{KC}{BK}.\frac{IL}{IU}=1$ hay $IZ=IT$. Tam giác KZT có đường cao IK đồng thời cũng là đường trung tuyến nên tam giác KZT cân tại K

Chú ý: Với điểm K tùy ý trên BC ta luôn có : $IZ = IT$.



Ví dụ 8

Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ đường phân giác AD, $D \in BC$ hạ $DH \perp AB, DK \perp AC, BK$ cắt D tại M, CH cắt DK tại N

a, chứng minh : $\dfrac{HM}{MD} = \dfrac{BH}{HA}$

b, chứng minh: $MN // BC$

c, Gọi I là giao điểm của KB và CH . Chứng minh: ΔABK ” ΔKAN và $AI \perp BC$

Giải

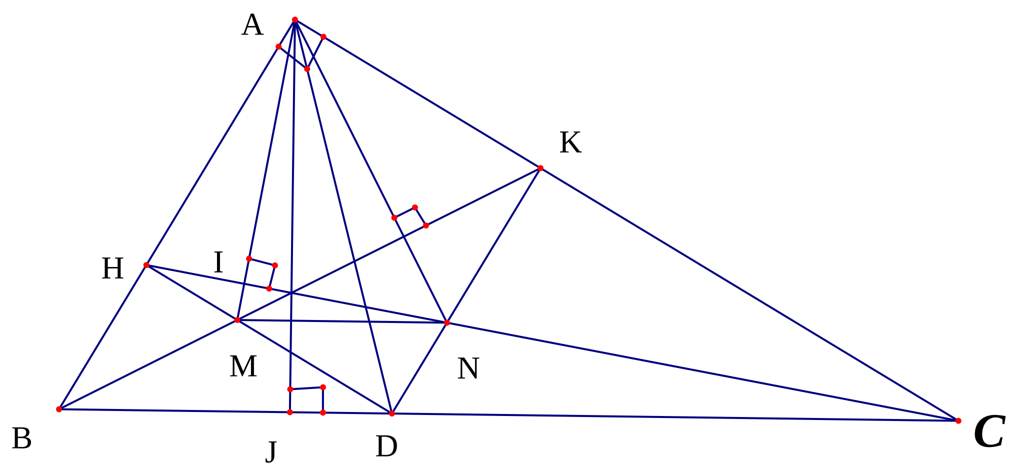
a, Vì $MH // AC$ và $BH // DK$ theo định lý Thales ta có $\dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BM}{MK} = \dfrac{MH}{MD}$ (Đpcm)

b, để chứng minh $MN // BC$ ta chứng minh $\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{NH}{NC}$. Ta dễ chứng minh được tứ giác $AHDK$ là hình vuông nên $HD = AK = HA = DK$. Do $HM // AK, DN // BH$ theo định lý Thales ta có:

$$\frac{MH}{HD} = \frac{MH}{AK} = \frac{BM}{BK} = \frac{BD}{BC} = \frac{NH}{HC} \Leftrightarrow \frac{MH}{HD} = \frac{HN}{HC} \Rightarrow MN // BC$$

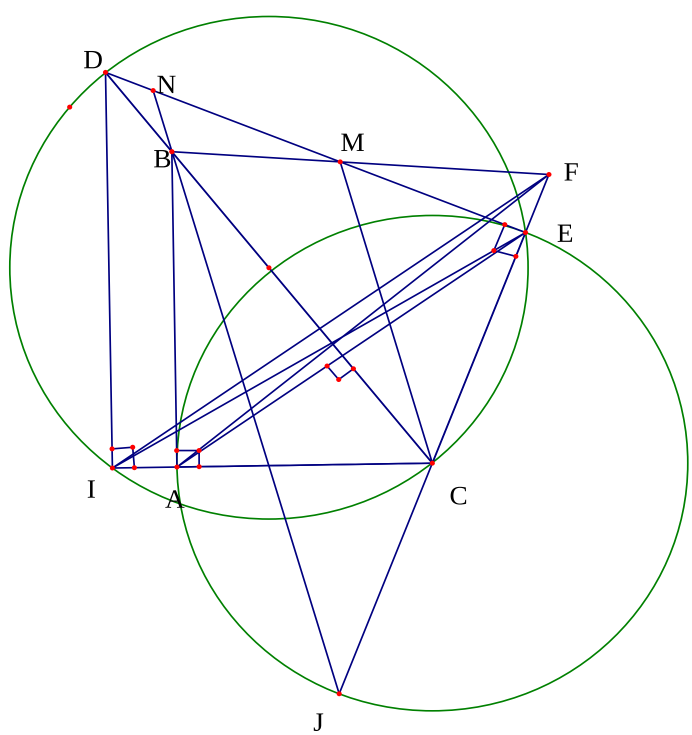
C, Xét tam giác vuông AKN, ABK ta có $\dfrac{KN}{KA} = \dfrac{KN}{AH} = \dfrac{NC}{CH} = \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{DK}{AB} = \dfrac{AK}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{KN}{KA} = \dfrac{AK}{AB}$

hay ΔABK ” ΔKAN (c.g.c) suy ra $ABK = KAN$ nên $AKB + KAN = AKB + ABK = 90^0$ hay $AN \perp BK$. Chứng minh tương tự ta có: $AM \perp CH \Rightarrow BK, CH$ chứa các đường cao xuất phát từ M, N của tam giác AMN nên CH cắt BK tại I thì I là trực tâm của tam giác AMN suy ra $AI \perp MN \Rightarrow AI \perp BC$.



Ví dụ 9
Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm trên tia đối của tia BC, kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn tâm C bán kính CA(A, E ở khác phía nhau so với BC). Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường thẳng CE tại F, đường thẳng BF cắt DE tại N. Gọi J là giao điểm thứ 2 của đường tròn $(C;CA)$ với EC.
a, Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I. Chứng minh : AIFE nội tiếp.
b, Tam giác CIF cân tại C.
c, Chứng minh: M là trung điểm của NE.

Giải



a, đường tròn đường kính DC cắt AC tại I nên $DIC = 90^0 \Rightarrow DECI$ nội tiếp. Suy ra $EIC = \text{EDC} = 90^0 - ECD = CFA \Leftrightarrow AIE\text{=AFE}$ hay tứ giác AIFE nội tiếp

b, do $CA = CE$ mà $CEA = \text{CIF},\ \text{CAE} = CFI \Rightarrow \text{AIF=AFI}$ suy ra tam giác CIF cân tại C và $AE // IF$.

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác BFC với cát tuyến DME ta có : $\frac{MB}{MF}.\frac{\text{EF}}{EC}.\frac{DC}{DB} = 1(*)$. Mặt khác do $AE // FI$ nên ta có : $\frac{\text{FE}}{EC} = \frac{AI}{AC}$ do $AB // DI$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{IC}{IA}$ thay vào (*) ta có $\frac{MB}{MF}.\frac{AI}{AC}.\frac{IC}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AC}{IC} = \frac{CJ}{CF} \Rightarrow BJ // CM$ hay M là trung điểm của NE

Ví dụ 10

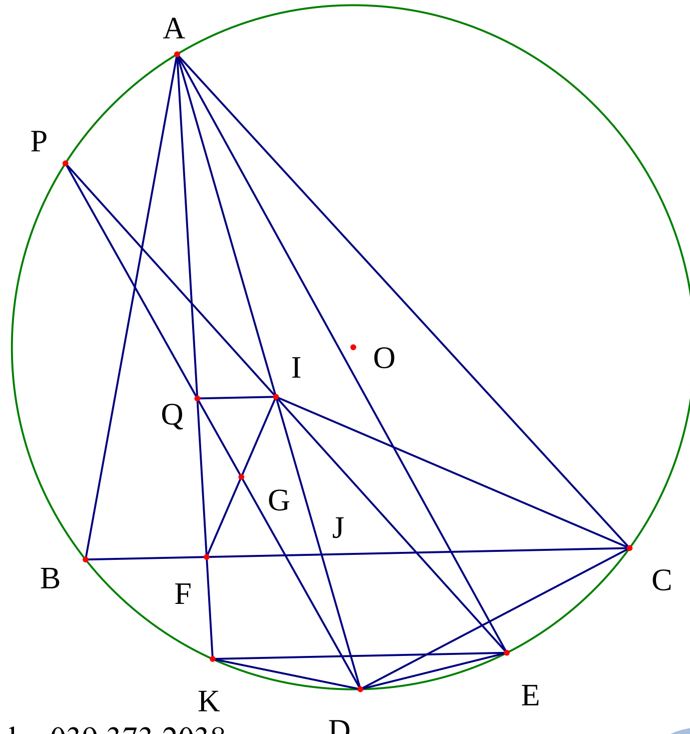
Cho tamgiác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) cắt đường tròn ngoại tiếp tamgiác ABC tại điểm D, E là điểm trên cung BDC , điểm F trên cạnh BC thỏa mãn $\text{BAF=}CAE < \frac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm FI . Đường thẳng EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P , đường thẳng AI cắt BC tại J , FA cắt đường tròn ngoại tiếp ABC tại K cắt DP tại Q .

a, Chứng minh: $APQI$ là tứ giác nội tiếp .

b, **Chứng minh:** ΔDCJ ” ΔDAC .

c, Chứng minh: DG, EI cắt nhau tại 1 điểm trên đường trong ngoại tiếp tam giác ABC .

Giải



a, Do AD là phân giác trong góc A nên BAD=CAD vì $BAK = CDE \Rightarrow KAD = EAD$ mặt khác $EAD = EPD \Leftrightarrow EAD = EPD$ suy ra tứ giác $PQIA$ nội tiếp .

b, Xét tam giác DCJ, DAC ta có $DCJ = DAC$, ADC chung nên

ΔDCJ ” ΔDAC (g,g)

c, Giả sử PD cắt FI tại G' . Ta chứng minh $G \equiv G'$

thật vậy áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AIF và cát tuyến $QG'D$ ta có

$\frac{QA}{QF}.\frac{G'F}{G'I}.\frac{DI}{DA} = 1(*)$ từ chứng minh câu a ta có: $AQI = API = AKE \Rightarrow KE // QI$. Mặt khác cũng do $BAK = CDE \Rightarrow BK = CE$, $KAD = EAD \Rightarrow DK = DE$, $t/g\ BKEC$ là hình thang cân và $EK // BC$. Như vậy $QI // BC // KE$

Theo định lý Thales ta có $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ}$ mặt khác I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất phân giác trong ta cũng có $\frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ}$, do $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ nên

$\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC}$ mà

$DI = DC = DB$ (Tính chất quen thuộc).

Suy ra $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DI}$ như vậy : $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DI}$ suy ra $\frac{QA}{QF}.\frac{DI}{DA} = 1$ thay vào (*) ta có

: $\frac{G'F}{G'I} = 1 \Rightarrow G'$ là trung điểm của IF hay $G \equiv G'$

Ví dụ 11

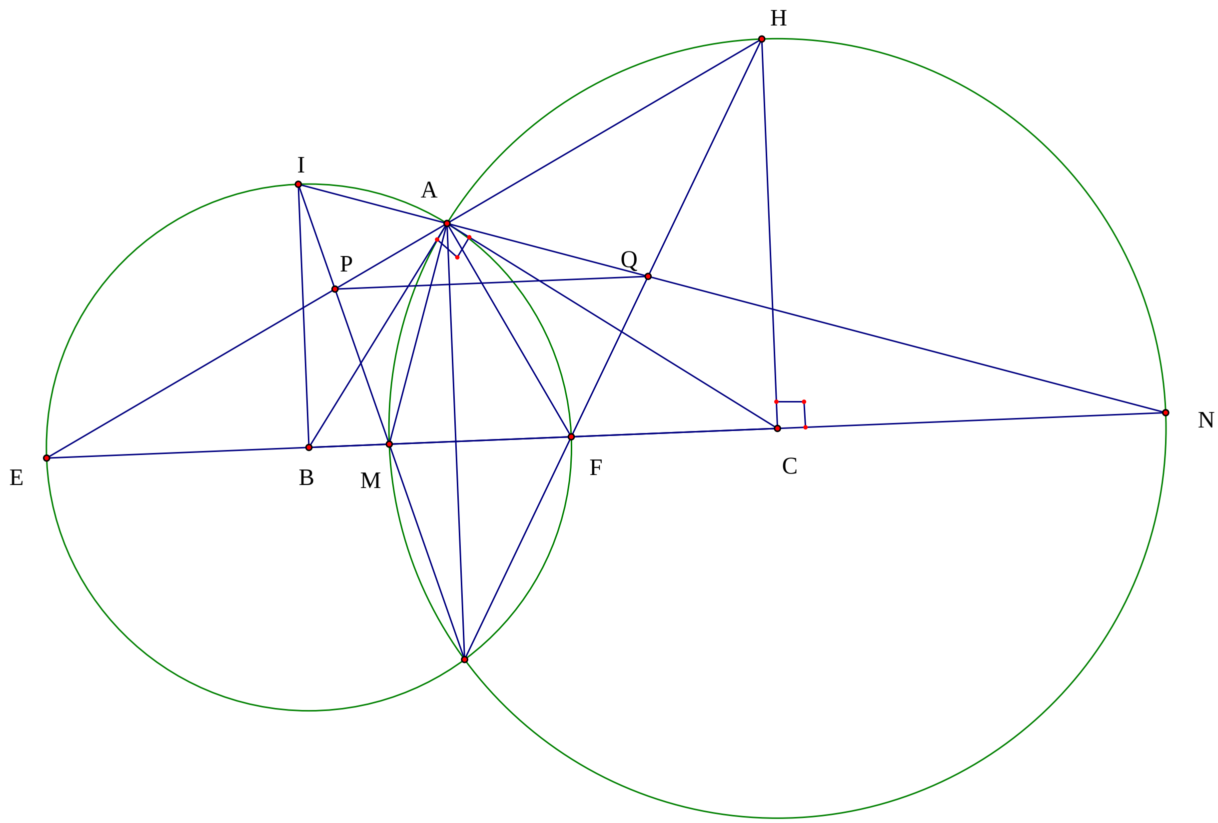
Cho tam giác ABC vuông tại A , đường tròn tâm B bán kính BA và đường tròn tâm C bán kính CA cắt nhau tại D khác A, BC cắt (B) tại E, F (F nằm trong (C) và cắt (C) tại M, N (M nằm trong (B)). Đường thẳng DM cắt AE tại P, DF cắt AN tại Q . Kéo dài DM cắt (B) tại I, DF cắt (C) tại H.

a, Chứng minh: $IB \perp EF$.

b, Chứng minh: Tứ giác $APDQ$ nội tiếp và $PQ // EN$.

c, Chứng minh: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{AB}{AC}$.

Giải



a, ta có:

$$AEN + ANE = \frac{1}{2}\left(ABF + ACM\right) = 45^0$$

Lại có: $AEF = ADF$, $ANM = ADM$

Suy ra $IDH = MDA + FDA = 45^0$

$$IBF = IBA + ABF = 2\left(ADF + ADM\right) = 90^0$$

Do đó $IB \perp FE$

b, từ a suy ra tam giác IBF vuông cân tại B suy ra $IAE = 45^0$ suy ra I, A, N thẳng hàng

Tương tự ta cũng có E, A, H thẳng hàng suy ra $EAN = 135^0 \Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp suy ra $APQ = ADQ = AEF$ nên $PQ // FE$.

Áp dụng định lý Menelaus với tam giác PEM và cát tuyến IAN ta có

$\frac{HF}{HQ}.\frac{AQ}{AN}.\frac{EN}{FE} = 1$. Nhân hai đẳng thức với chú ý : $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AN}$

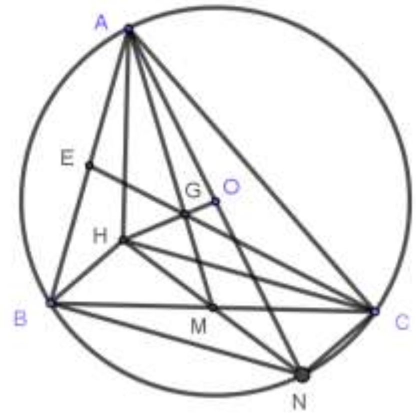
Suy ra : $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{FE}{MN}$

6. Đường thẳng Ơle

Trong một tam giác: trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác O, nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Ơle của tam giác. Đồng thời ta có $HO = 3GO.$

Chứng minh:

Dựng đường kính AN của (O).



Vì AN là đường kính của (O) nên $NC \perp AC$. Do $AH \perp BC \Rightarrow BH // NC.$

Chứng minh tương tự ta cũng có $CH // NB$ nên tứ giác $BHCN$ là hình bình Hành, suy ra hai đường chéo BC, HN cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên N, M, H thẳng hàng.

Ta có MO là đường trung bình của tam giác AHN nên $MO // AH$ và $MO = \frac{1}{2} AH$.

Gọi G là giao điểm của AM và HO, do $MO // AH$ (cùng vuông góc với BC). Theo định lý Thalets ta có: $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC và G, H, O thẳng hàng. Do $\frac{AG}{GM} = \frac{MO}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow HO = 3GO.$

(Đường thẳng đi qua G, H, O được gọi là đường thẳng Ơle của tam giác ABC).

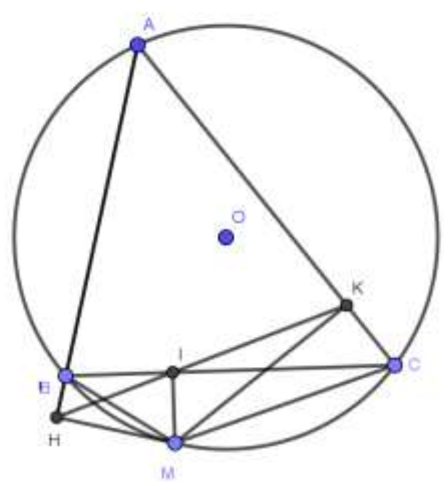
7. Đường thẳng Simson – Đường thẳng Steiner

a) Đường thẳng Simson

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là điểm bất kì trên đường tròn. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với $AB, BC, AC.$ Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Chứng minh:

Tứ giác $MIBH$ có $BHM + BIM = 90^o + 90^o = 180^o$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MIH = MBH$ (cùng chắn cung HM), mà tứ giác



$ABMC$ nội tiếp nên $\Rightarrow MBH = KCM$, do đó $MIH = KCM$. Mặt khác tứ giác $KCMB$ nội tiếp vì ($MIC = MKC = 90^o$) nên $KCM + MIK = 180^o$

$\Rightarrow MIH + MIK = 180^o \Rightarrow HIK = 180^o$. Vậy H, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Ta có bài toán đảo về bài toán Simson như sau: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của M lên ba cạnh của tam giác ABC là ba điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ABC.

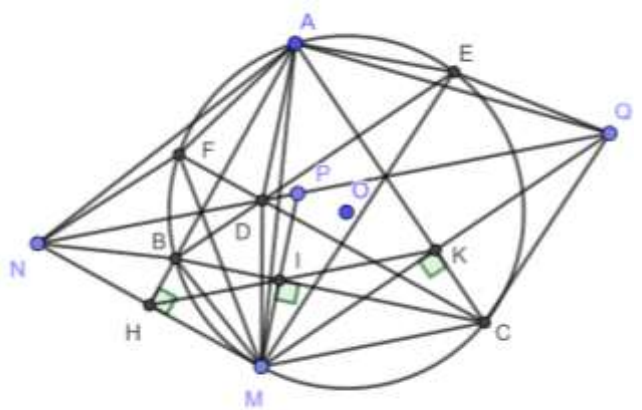
b) Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là điểm bất kì trên đường tròn. Gọi N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB, BC, CA. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, CA; thế thì H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy IH là đường trung bình của tam giác MNP nên $IH // NP$. Tương tự $IK // PQ$. Theo tiên đề Ơ-clit và do H, I, K thẳng hàng suy ra N, P, Q thẳng hàng. Đường thẳng đi qua N, P, Q được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.

Chú ý:



a) Ta có thể chứng minh ba điểm N, P, Q thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự. Các điểm N, P, Q lần lượt là ảnh của phép vị tự tâm M tỉ số 2, mà H, I, K thẳng hàng nên N, P, Q cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm M tỉ số 2. Ngoài ra liên quan đến đường thẳng Simson, Steiner cũng có các kết quả đẹp sau:

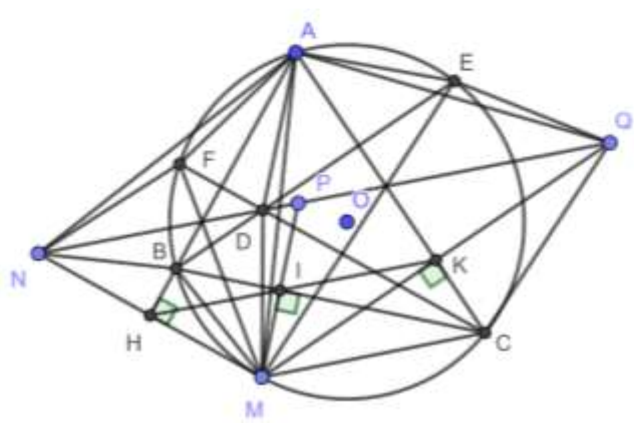
1. Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC (Olympic Nhật Bản1997). Thật vậy, Gọi D là trực tâm của tam giác ABC; $BD; CD$ cắt (O) lần lượt tại $E; F$. Dễ dàng chứng minh được E đối xứng với D qua AC, F đối xứng với D qua AB. Ta có $FDMN$ là hình thang cân và các tứ giác $IBHM; MBFC$ nội tiếp nên ta có:

$DFM = DNM = MBC = IHM$ do đó $ND // IH$.

Tương tự ta cũng có: $DQ // IK$ mà H, I, K thẳng hàng nên N, P, Q thẳng hàng.

Nói cách khác: Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Cách khác:



Gọi AS, BJ, CR là các đường cao của tam giác ABC, D là trực tâm.

Ta có: $ANB = AMB$ (tính chất đối xứng).

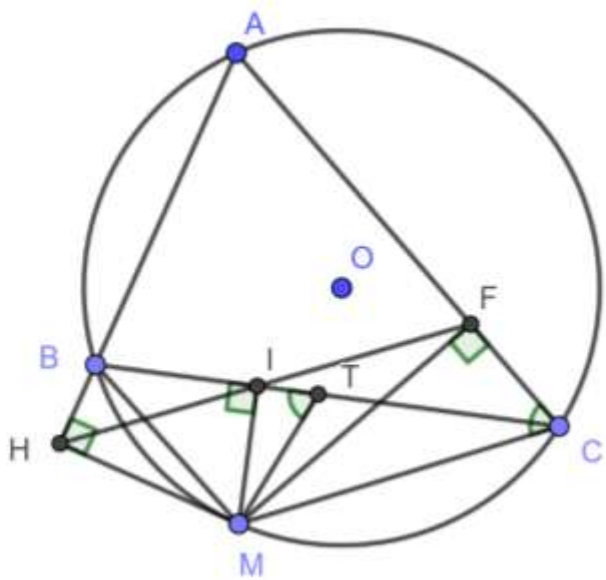
Lại có: $AMB = ADJ$ (cùng bù với SDJ).

Suy ra $ANB = ADJ$ nên $ADBN$ là tứ giác nội tiếp, do đó $NAB = NDB$. Mà $NAB = MAB \Rightarrow NDB = MAB.$

Chứng minh tương tự $CDQ = CAM$. Ta có $NDB + CDQ = MAB + CAM = BAC$

$\Rightarrow NDQ = NDB + BDC + CDQ = BAC + BDC = 180^o$.

Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.



2. $\frac{AB}{MH} + \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{MI}$ (Olympic Toán Mỹ 1979)

Ta lấy điểm T trên cạnh BC sao cho $MTC = MBA$ suy ra $\Delta MBA \backsim \Delta MTC$ (g.g)

Do MH, MI là các đường cao tương ứng nên

Ta có: $\frac{AB}{MH} = \frac{TC}{MI}$. Từ cách dựng điểm T ta cũng suy ra

$\Delta MCA \backsim \Delta MTB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{MK} = \frac{TB}{MI}$.

Cộng hai đẳng thức ta có: $\frac{AB}{MH} + \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{MI}$.

Ta xét một ví dụ:

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, nội tiếp (O). Các đường cao AN, BM, CP của tam giác cũng đi qua điểm H. Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC $(Q \neq B, C)$. Gọi E, F là điểm đối xứng với Q qua AB, AC.

a, Chứng minh: $MH.MA = MP.MN$.

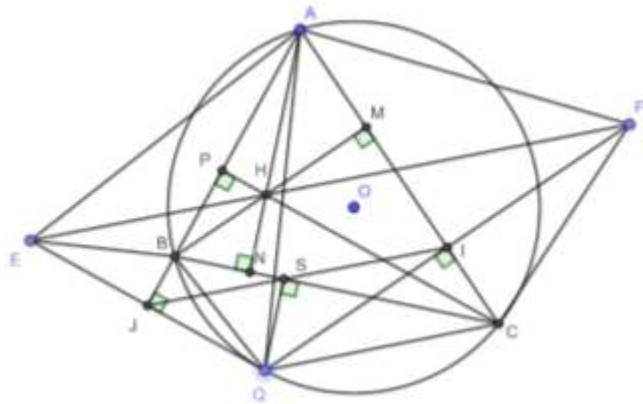
b, Chứng minh E, H, F thẳng hàng.

c, Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí điểm Q để $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015-2016)

Giải:

Câu a) Dành cho bạn đọc.



Gọi S là chân đường vuông góc hạ từ Q lên BC. Ta có I, J, S thẳng hàng (Đường thẳng Simson của điểm Q).

Ta cũng có: E, H, F thẳng hàng (Tính chất đường thẳng Steiner đi qua trực tâm tam giác).

Ta cũng có: $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{BC}{QS}$ nên $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{BC}{QS}$ nhỏ nhất. Tức là QS lớn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bài tập tương tự: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), các đường cao AE, CF cắt nhau tại điểm H. Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B, C), M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên các đường thẳng AB, AC.

a, Chứng minh: $OB \perp \text{EF}$, $\frac{BH}{BO}=\frac{2EF}{AC}$.

b, Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn HP.

(Đề thi vào lớp 10 Trường THPT chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An 2015).

Ví dụ 2

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O), gọi E là điểm trên cung nhỏ AB. Gọi H, K, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC, CD, AE, DE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, HK.

a, Chứng minh: AD, PQ, HK đồng quy.

b, Chứng minh: $MN \perp NB$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- ĐHSP TP Hồ Chí Minh năm 2015).

Giải:

Dựng $BT \perp AD$ thì T, H, K thẳng hàng (Đường thẳng Simson của điểm B).

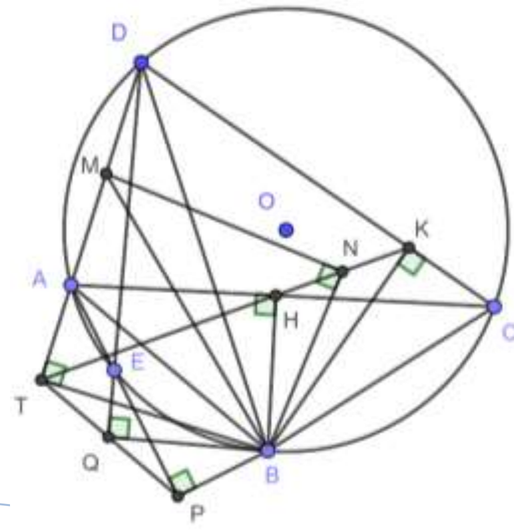
Tương tự các điểm T, Q, P thẳng hàng.

Suy ra AD, PQ, HK đồng quy tại T.

Ta có:

$ADB = HKB$ do $TDKB$ nội tiếp.

$HBK = HCK = ABD$ suy ra



$\Delta BAD \backsim \Delta BHK$

Suy ra $\Delta BAM \backsim \Delta BHN \Rightarrow BMA = BNH \Rightarrow TMNB$

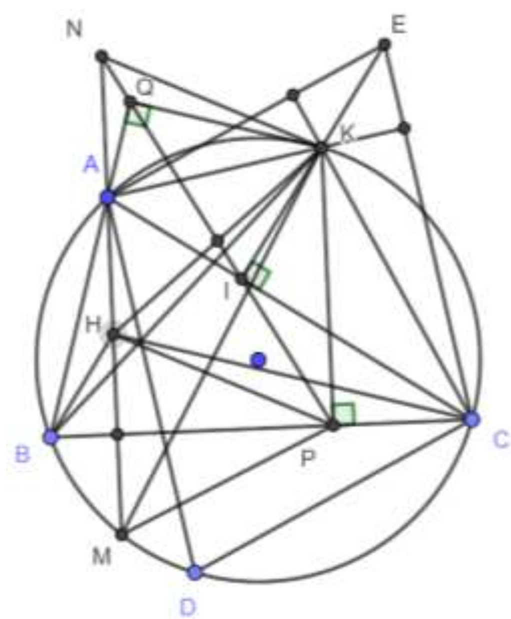
nội tiếp $\Rightarrow MNB = 90^0$.

Ví dụ 3

Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ có trực tâm là điểm H, D là điểm trên cung nhỏ BC, lấy E sao cho $CE//AD, CE = AD$, gọi K là trực tâm tam giác ACE. Gọi P,Q là hình chiếu vuông góc của K trên BC, AB. Chứng minh: PQ đi qua trung điểm của HK.

(Trích đề thi HSG Quốc gia 2004).

Giải:



Do K là trực tâm tam giác EAC và $ADCE$ là hình bình hành nên

$ACK = 180^0 - AEC = 180^0 - ADC$ suy ra tứ giác $ADCK$ nội tiếp. Nói cách khác K nằm trên (O).

Đường thẳng EK cắt AC tại I thì P, I, Q thẳng hàng (Đường thẳng Simson).

Do $KP//AH$ nên ta nghĩ đến tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Giả sử HA cắt (O), PQ lần lượt tại M, N do $KQBP, ABMK$ nội tiếp nên ta có:

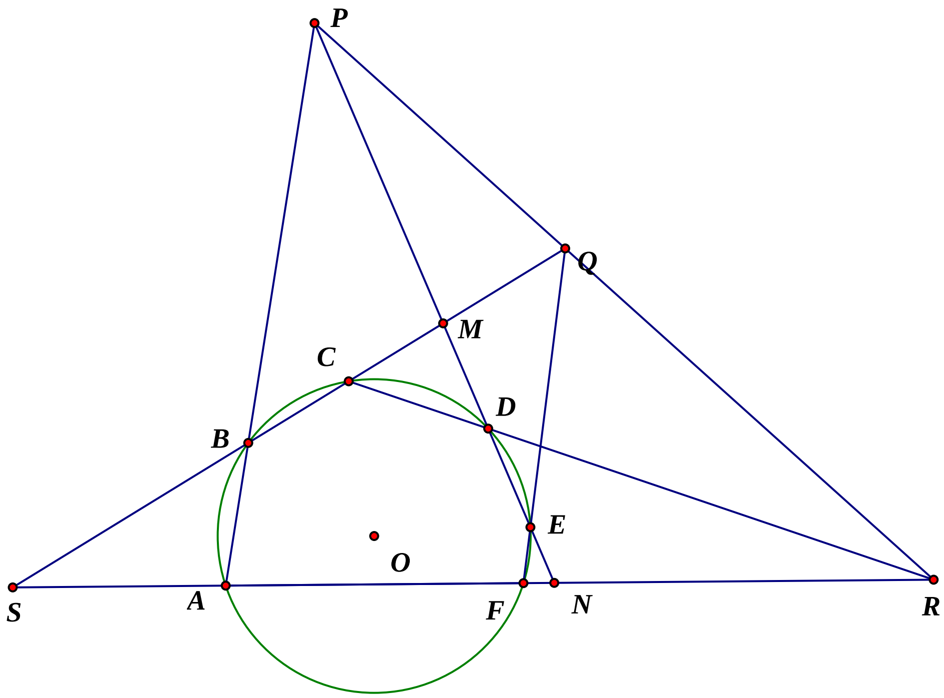
$KPQ = KBQ = KMN$ suy ra $KPMN$ là hình thang cân. Mặt khác ta cũng có tính chất quen thuộc là H, M đối xứng với nhau qua BC nên

$MHP = PMH = KNH \Rightarrow KN//HP$ suy ra $HPKN$ là hình bình hành. Suy ra: PQ đi qua trung điểm của HK.

8. Đường thẳng Pascal

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn (có thể hoán đổi thứ tự). Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của một đường thẳng $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$. Khi đó 3 điểm P, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Pascal.

Chứng minh



Giả sử DE cắt BC tại M cắt AF tại N, BC cắt AF tại S

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến ABP ta có:

$\frac{PM}{PN}\cdot\frac{AN}{AS}\cdot\frac{BS}{BM}=1$ hay $\frac{PM}{PN}=\frac{AS}{AN}\cdot\frac{BM}{BS}(1)$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến CDR ta có:

$\frac{DM}{DN}\cdot\frac{RN}{RS}\cdot\frac{CS}{CM}=1$ hay $\frac{RN}{RS}=\frac{CM}{CS}\cdot\frac{DN}{DM}(2)$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSMN và cát tuyến QEF ta có:

$\frac{QM}{QS}\cdot\frac{FS}{FN}\cdot\frac{EN}{EM}=1$ hay $\frac{QS}{QM}=\frac{FS}{FN}\cdot\frac{EN}{EM}(3)$

Mặt khác các tứ giác nội tiếp nên:

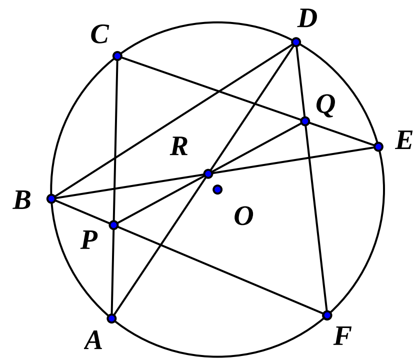
$SB.SC = SA.SF;\ MC.MB = MD.ME;\ NF.NA = ND.NE$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) ta suy ra $\frac{PM}{PN}\cdot\frac{RN}{RS}\cdot\frac{QS}{QM}=1$.

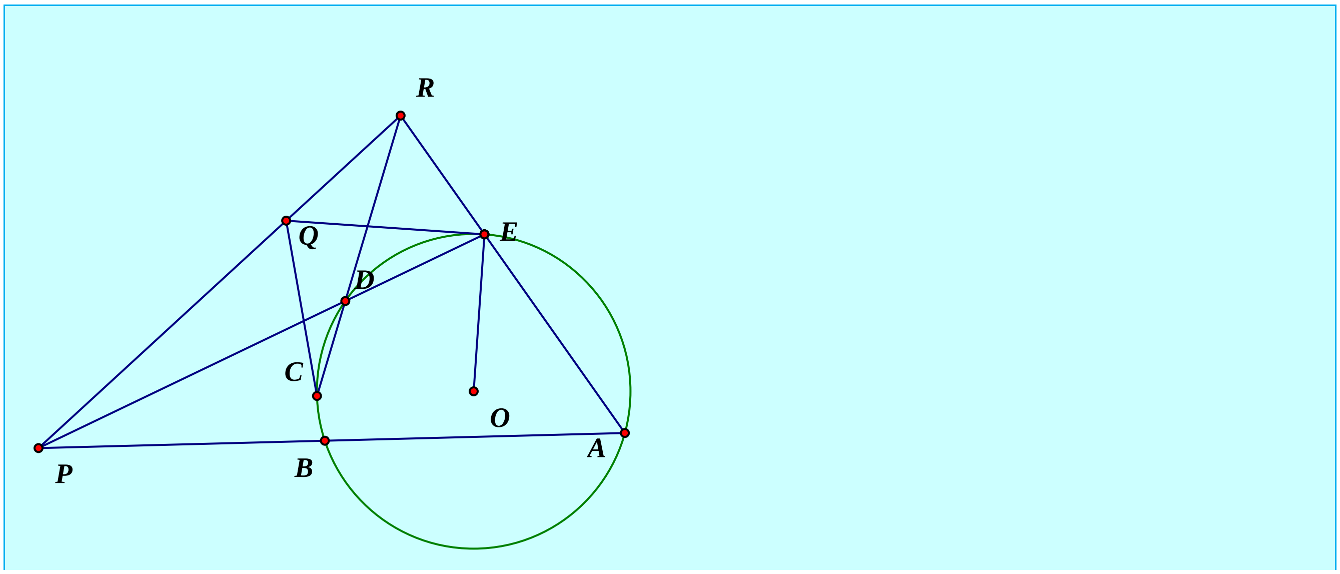
Theo định lý đảo Menelaus ta suy ra P,Q,R thẳng hàng.

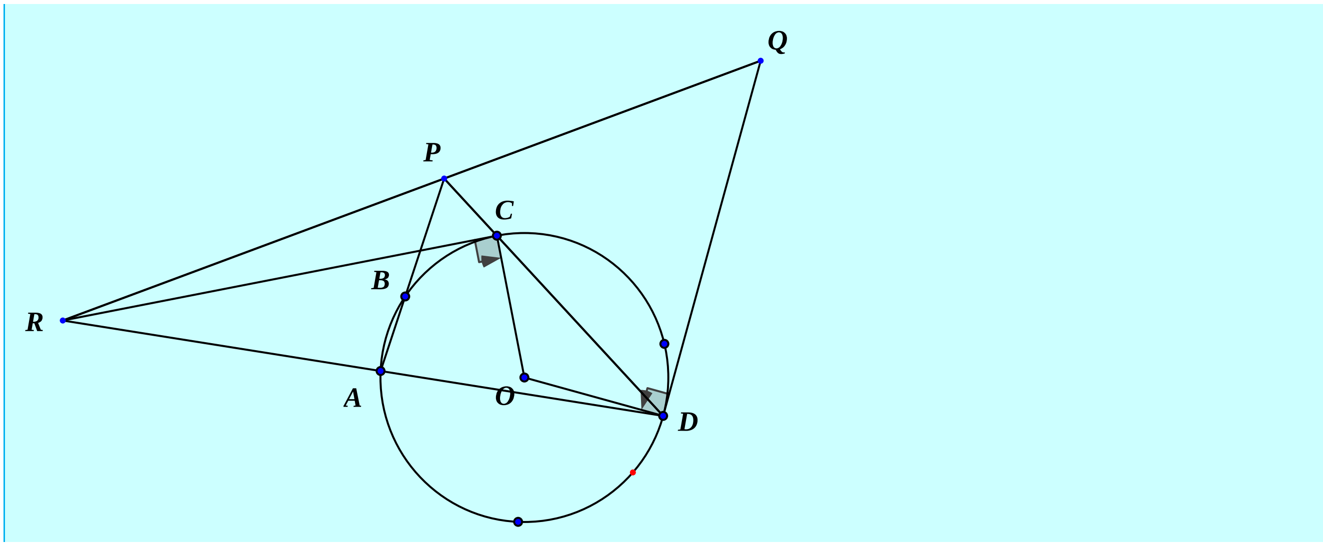
Đường thẳng PRQ ở trên được gọi là đường thẳng Pascal tương ứng với bộ điểm A,B,C,D,E,F

Bằng cách vẽ hoán vị các điểm A,B,C,D,E,F ta thu được rất nhiều đường thẳng Pascal khác nhau, cụ thể có tới 60 đường thẳng Pascal. Chẳng hạn vẽ hình bên minh họa trường hợp điểm $ACEBFD$



Ngoài ra khi các điểm trùng nhau (khi đó lục giác suy biến thành tam giác, tứ giác, ngũ giác), ví dụ $E \equiv F$ thì cạnh EF trở thành tiếp tuyến của đường thẳng tại E , ta còn thu thêm nhiều đường thẳng Pascal khác nhau nữa. Hình vẽ minh họa trường hợp các điểm $ABCDEE, ABCCDD$.

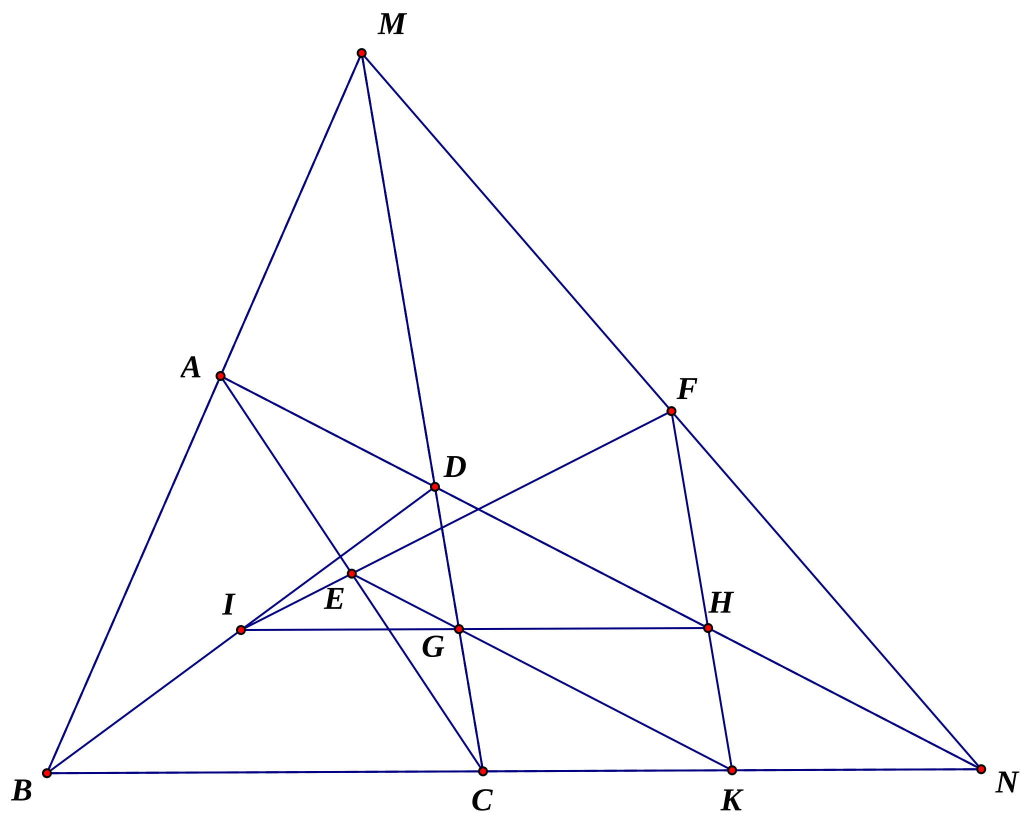



Q
P
C
B
R
A
O
D

9. Đường thẳng Gauss

Cho tứ giác $ABCD$ có AB , CD cắt nhau tại M , $AD,\ BC$ cắt nhau tại N . Khi đó trung điểm các đoạn thẳng $AC,\ BD,\ MN$ nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh



Gọi $I,\ E,\ F$ lần lượt là trung điểm của BD, AC, MN

và $K,\ G,\ H$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $CN,\ CD,\ DN$.

Dễ thấy các điểm $F,\ H,\ K$ thẳng hàng.

$E,\ G,\ K$ thẳng hàng

$I,\ G,\ H$ thẳng hàng

Ta có $FK\ //\ MC,\ IH\ //\ BC,\ EK\ //\ DN$ nên

$$\frac{IG}{IH}=\frac{BC}{BN},\frac{FH}{FK}=\frac{MD}{MC};\frac{EK}{EG}=\frac{AN}{AD}$$

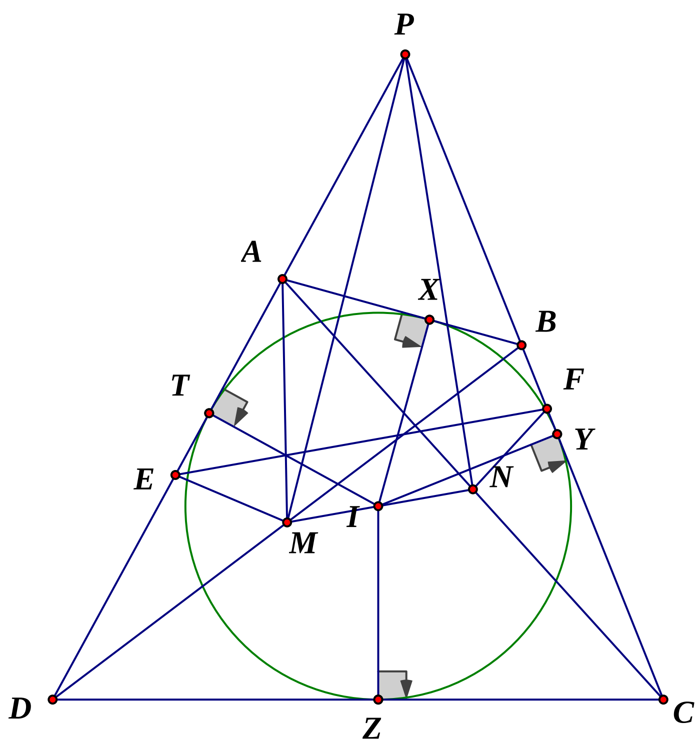
Nhân 3 đẳng thức với nhau ta được

$$\frac{IG}{IH}\cdot\frac{FH}{FK}\cdot\frac{EK}{EG}=\frac{BC}{BN}\cdot\frac{MD}{MC}\cdot\frac{AN}{AD}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDN và đường thẳng đi qua $B,\ A,\ M$ ta có

$\dfrac{BC}{BN}\cdot\dfrac{MD}{MC}\cdot\dfrac{AN}{AD}=1$, suy ra $\dfrac{IG}{IH}\cdot\dfrac{FH}{FK}\cdot\dfrac{EK}{EG}=1$. Theo định luật Menelaus đảo ta suy ra $I,\ E,\ F$ thẳng hàng.

10. Đường thẳng Niutơn
Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Khi đó 3 điểm I, M, N thẳng hàng. Đường thẳng đi qua I, M, N gọi là đường thẳng Niu tơn của tứ giác $ABCD$.



Chứng minh: (ta chỉ xét trường hợp AB không song song với CD)
Gọi các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA lần lượt là X, Y, Z, T thì
$IX = IY = IZ = IT = r$.
Giả sử AD, BC cắt nhau tại P, trên PD lấy E sao cho $PE = AD$, trên PC lấy F sao cho $PF = BC$ thế thì:

$$S_{MAD} + S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{DAB} + \frac{1}{2}S_{DBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$S_{NAD} + S_{NBC} = \frac{1}{2}S_{CAD} + \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Từ đó suy ra:
$S_{MAD} + S_{MBC} = S_{NAD} + S_{NBC}$
Theo cách xác định E, F
Ta có: $S_{MAD} = S_{MPE}$, $S_{MBC} = S_{MPF}$, $S_{NAD} = S_{NPE}$, $S_{NBC} = S_{NPE}$
Suy ra: $S_{MPE} + S_{MPF} = S_{NPE} + S_{NPF}$ hay $S_{MEPF} = S_{NEPF}$ (1)
Lại có: $S_{IAD} = S_{IPE}, S_{IBC} = S_{IPF} \Rightarrow S_{IAD} + S_{IBC} = S_{IPE} + S_{IPF} = S_{IEPF}$

Nhưng $S_{IAD}+S_{IBC}=\frac{1}{2}S_{AXYT}+\frac{1}{2}S_{DZYT}+\frac{1}{2}S_{XIYB}+\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Suy ra $S_{MEPF}=S_{IEPF}$ (2)

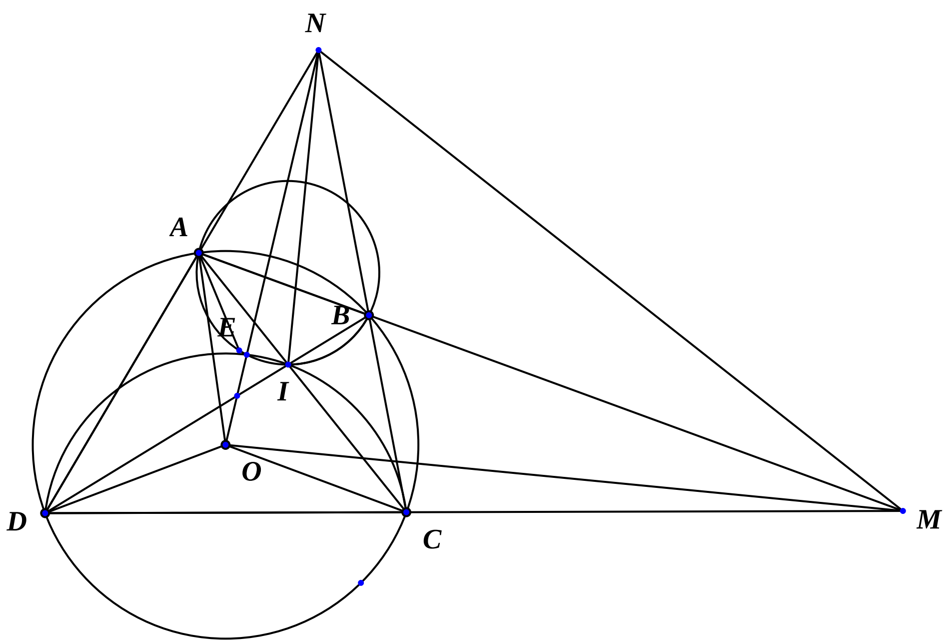
Từ (1) và (2) ta suy ra $S_{MEPF}=S_{NEPF}=S_{IEPF}$ hay $S_{MEF}=S_{NEF}=S_{IEF} \Leftrightarrow MN // FE, MI // EF$

Suy ra M, N, I thẳng hàng.

11. Định lý Brocad

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD; N là giao điểm của AD và BC; I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN.

Chứng minh:



Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn nội tiếp tam giác ABI và CDI.

Trước tiên ta chứng minh :

E, I, M thẳng hàng :

Thật vậy giả sử MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tại E'

thì $MI.ME' = MC.MD$ suy ra 4 điểm D, E', I, C nằm trên một đường tròn suy ra $E \equiv E'$

suy ra M, I, E thẳng hàng.

Ta có: $AED = 360° - DEI - AEI$

$= 180° - DEI + 180° - AEI$

$= ABD + ACD = AOD$

Nên tứ giác $AEOD$ nội tiếp.

Ta cũng có: $BEC = OEC + CEM = OBC + BDC = \frac{180° - BOC}{2} + BDC = 90°$

Suy ra $ME \perp ON$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $NI \perp Om$ suy ra I là trực tâm của tam giác OMN .
Định Lý Brocard là một công cụ hình học khá mạnh để chứng minh quan hệ vuông góc và được sử dụng rất nhiều trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên cũng như kỳ thi học sinh giỏi tỉnh thành, quốc gia.
Có rất nhiều cách để chứng minh, nhưng cách giải trên thuần túy và phù hợp với bậc THCS. Sau đây ta sẽ xét một số ứng dụng của định lý này:

Ví dụ 1

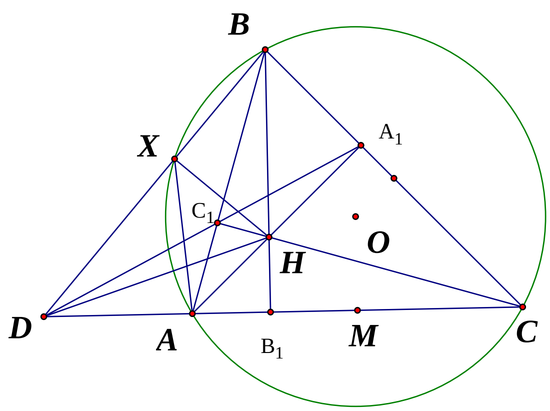
Cho tam giác ABC không cân có 3 góc nhọn, nội tiếp (O), các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại điểm H, cavs đường thẳng A_1C_1, AC cắt nhau tại D, gọi X là giao điểm của BD với (O).

a. Chứng minh: $DX.DB = DC_1.DA_1$

B. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh: $DH \perp BM$.

(Trích đề tuyển sinh vào 10 chuyên ĐHSP – năm học 2013 – 2014)

Giải



a. Các tứ giác $BXAC, ACA_1C_1$ nội tiếp nên ta có: $DX.DB = DC_1.DA_1$

b. Xét tứ giác ACA_1C_1 nội tiếp đường tròn tâm M đường kính AC, hai đường chéo AA_1, CC_1 cắt nhau tại H. theo định lý Brocard ta có H là trực tâm tam giác BMD suy ra $DH \perp BM$

Ví dụ 2

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại E, các tia AD, BC cắt nhau tại F. đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại M. Chứng minh rằng:

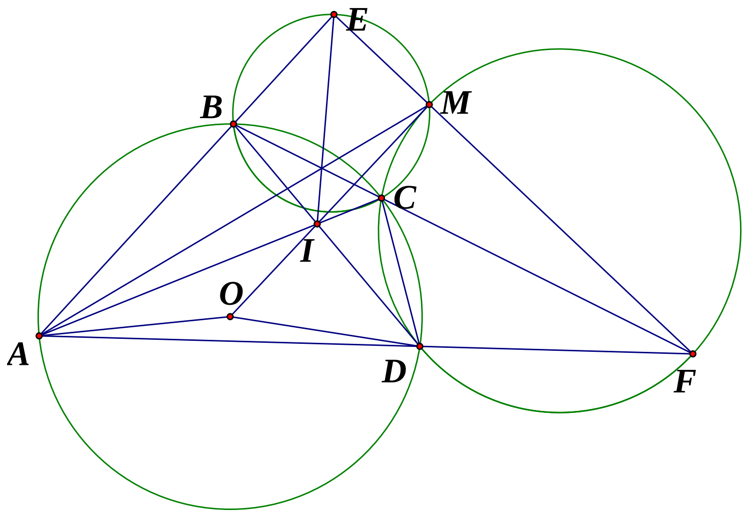
a. Ba điểm E, M, F thẳng hàng và bốn điểm A, D, M, E nằm trên một đường tròn.

b. $OM \perp EF$

c. chứng minh rằng đường thẳng Om đi qua điểm I của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$.

(đề thi học sinh giỏi toán TP HCM – 2013)

Phân tích hướng dẫn giải:



a. Để chứng minh E, M, F thẳng hàng ta chứng minh $EMC + CMF = 180°$

Ta tìm cách quy về hai góc đối nhau trong tứ giác nội tiếp.

Ta có $EMC + CMF = ABC + CDA = 180°$

Ta có $DMF = DCF = DAB$ suy ra 4 điểm A, D, M, E cùng nằm trên một đường tròn.

b. Từ đó ta dễ chứng minh được các tứ giác ABMF, BDFE nội tiếp. Xét tứ giác OAMC ta có: $CMA = 180° - CMF - AME = 180° - ADC - ADC = 180° - 2ADC == 180° - AOC$ suy ra tứ giác OACm nội tiếp. Ta có

$OMF = OMA + AMB = OMA + ABF = OMC + CME = OME$

suy ra $OME = OMF = 90°$

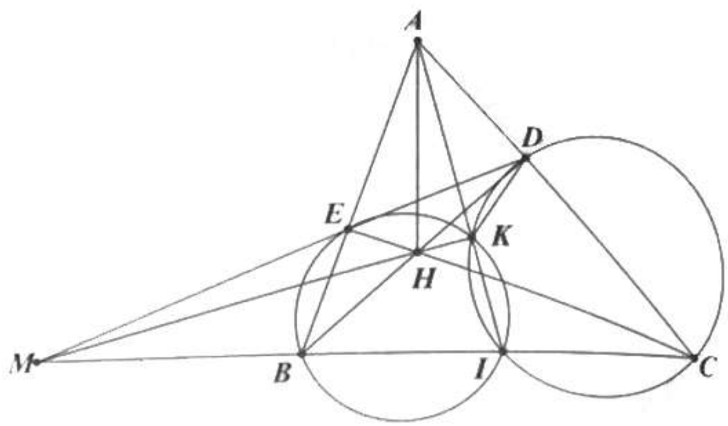
theo định lý brocard ta có : $OI \perp EF$ suy ra O, I, M thẳng hàng.

Ví dụ 3

Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ có các đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDI tại K khác I. Đường thẳng DE cắt BC tại K khác I. Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh rằng M, H, K thẳng hàng.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương năm 2008)

Giải



Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $BEDC$ ta có H là trực tâm của tam giác AMI nên $MH \perp AI\,(1)$.

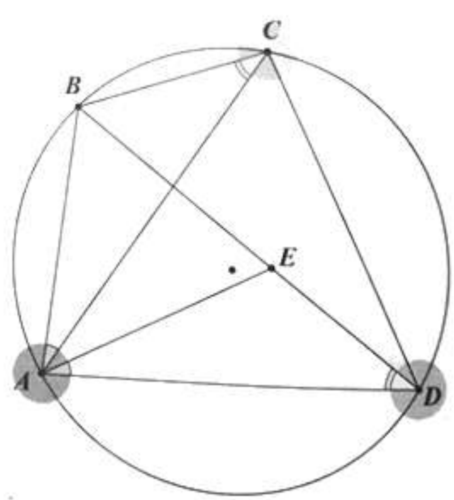
Mặt khác ta cũng dễ chứng minh được A, K, I thẳng hàng (Xem ví dụ 1)

Và $EKD = 360^{\circ} - EKI - DKT = ABC + ACB = 180^{\circ} - BAC$ suy ra $AEKD$ nội tiếp, suy ra $\angle AKH = 90^{o}$, kết hợp với (1) ta suy ra M, H, K thẳng hàng.

12. Định lý Ptolemy

Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Chứng minh:



Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE = BAC$. Ta có $DAE = BAC$ và $ADE = ACB$ (cùng chắn AB) nên $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ (g-g) nên $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\Rightarrow AD.BC = AC.DE\,(1)$. Do $DAE = CAB$ nên $DAC = EAB$, lại có $ABE = ACD$ (cùng chắn AD) nên $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ (g-g)

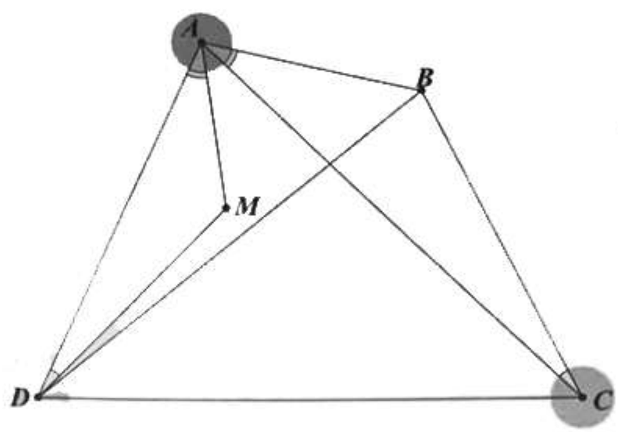
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE\,(2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD$.

13. Định lý Ptolemy cho tứ giác bất kỳ

Cho tứ giác $ABCD$, chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$

Chứng minh:



Bên trong tứ giác $ABCD$ lấy điểm M sao cho $MAD = CAB$ và $MDA = ACB$

Ta có: $\Delta ADM \sim \Delta ACB$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DM\,(1)$$

Do $MAD = CAB$ nên $DAC = MAB$.

Xét tam giác ADC và MAB, có $DAC = MAB$ (chứng minh trên)

$\frac{AD}{AC}=\frac{AM}{AB}$ (do $\Delta AMD\sim\Delta ACB$) nên $\Delta ADC\sim\Delta AMB$ (c-g-c)

$\Rightarrow\frac{DC}{MB}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow AB.CD=AC.MB(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $AB.CD+AD.BC=AC(BM+DM)\geq AC.BD.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M nằm trên đường chéo $BD,$ lúc đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Bây giờ ta sẽ xét một số ví dụ tiêu biểu vận dụng định lý Ptolemy

Ví dụ 1

Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm I nằm trên đoạn thẳng AO, I khác điểm $A,O.$ Đường thẳng qua I vuông góc với AB cắt (O) tại $C,D.$ Gọi E là điểm nằm trên (O) sao cho D là điểm chính giữa của cung $AE.$ Goi K là giao điểm của $AE,CD.$

a. Chứng minh OK đi qua trung điểm của $CE.$

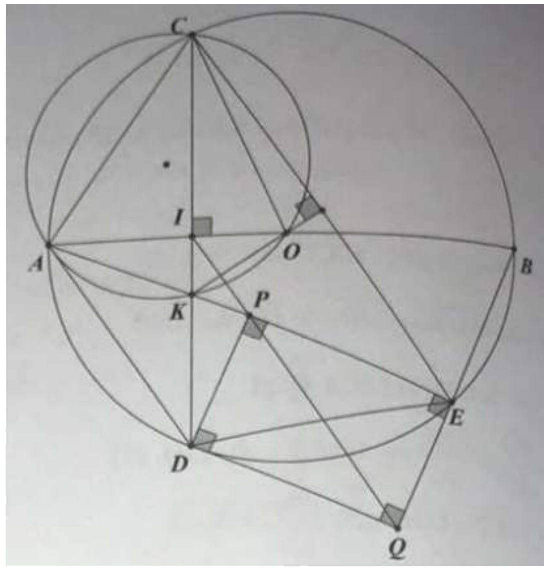
b. Đường thẳng đi qua I song song với CE cắt AE,BE lần lượt tại $P,Q.$ Chứng minh $DPEQ$ là hình chữ nhật.

c. Tìm vị trí điểm I trên đoạn AO sao cho $KC=KA+KO.$

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 *chuyên Toán-Tin Tp Hà Nội năm 2015)*

Giải

a. Từ giả thiết ta suy ra $AC=AD=DC.$



Suy ra tứ giác $CADE$ là hình thang cân có hai đáy là AD, CE. K là giao điểm của hai đường chéo nên K nằm trên trung trực của CE. Suy ra $KO \perp CE$. Nói cách khác KO đi qua trung điểm của CE.

b. Do AB là đường kính của (O) nên $AEB = AEQ = 90^o$

Tứ giác $IPDA$ có $IPA = EPQ = AEC = ADI$

Nên $IPDA$ là tứ giác nội tiếp suy ra $APD = 90^o$ từ đó dễ dàng suy ra O, P, D thẳng hàng, $IPDA$ là hình thang cân và $PD \| CE$. Tứ giác $DPEQ$ có $DEQ = PDE = PDA = DPQ$ nên $DPEQ$ là tứ giác nội tiếp. ÁP dụng định lý *Ptolemy* ta có $KA.OC + AC.KO = CK.AO$ hay $KA + \frac{AC}{AO}.KO = CK$ như vậy để $KC = KA + KO$ thì điều kiện là $\frac{AC}{AO} = 1 \Leftrightarrow AOC$ là tam giác đều, suy ra I là trung điểm của AO.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC.

a. Chứng minh $MA = MB + MC$.

b. Tìm GTLN, GTNN của $P = MA + MB + MC$.

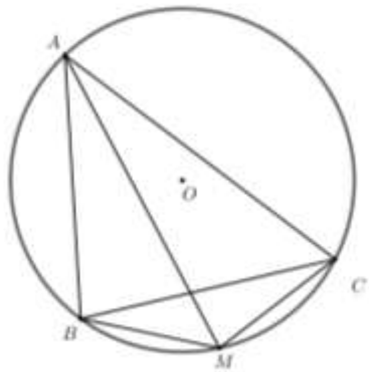
(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 trường chuyên Đại học Vinh 2006)

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$.

(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 trường chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng năm 2009)

Trang 205

Giải



a. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABMC$ ta có $MA.BC = AB.MC + AC.MB$

Do $AB = CB = CA$ suy ra $MA = MB + MC.$

b. Ta có $P = MA + MB + MC = 2MA.$ P nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C.$

P lớn nhất khi và chỉ khi MA là đường kính của $(O).$

c. Với mọi số thực dương x, y ta có $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4$ nên ta suy ra

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$ Áp dụng ta có

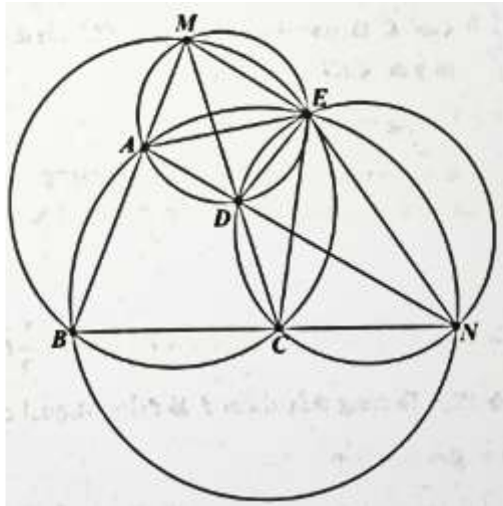
$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB} \geq \frac{4}{2R} = \frac{2}{R}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường kính của $(O).$ Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ $BC.$

14. Điểm Miquel – Định lý Miquel

a. Điểm Miquel của tứ giác toàn phần

Cho tứ giác $ABCD$ có cạnh AB, CD cắt nhau tại M, cạnh AD, BC cắt nhau tại N. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm E (gọi là điểm M iquel của tứ giác $ABCD.$

Chứng minh:

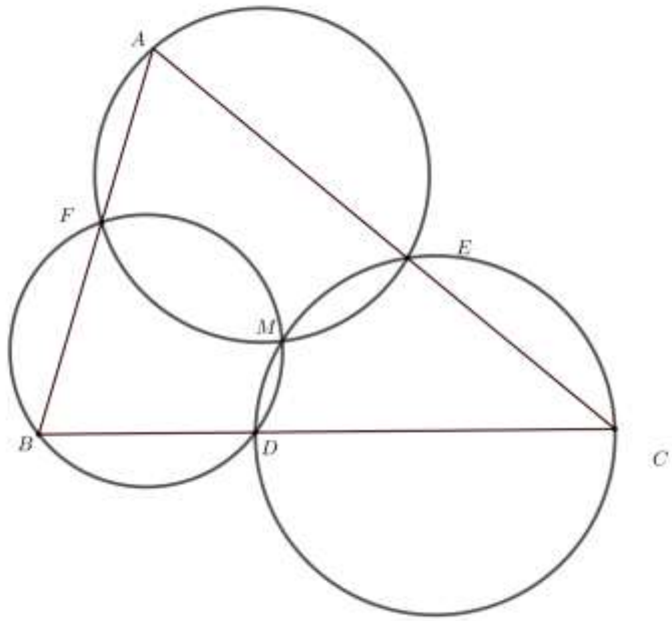


Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MAD, NCD cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là E (khác $D \equiv E$). Ta chứng minh E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC, NAB. Tức là chứng minh các tứ giác $MBCE, NBAE$ nội tiếp. Thật vậy, tứ giác $DCNE$ nội tiếp nên $MDE = CNE$. Tứ giác $ADEM$ nội tiếp nên $MAE = MDE$ suy ra $MAE = CNE \Rightarrow ABNE$ nội tiếp. Mặt khác ta có $ECN = EDN, EDN = AME \Rightarrow AME = ECN$ suy ra $BMEC$ nội tiếp. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN, BCM, MAD, NCD cùng đi qua một điểm E.

b. Định lý Miquel đối với tam giác

Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm F, D, E. Khi đó ba đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M (gọi là điểm Miquel trong tam giác ABC)

Chứng minh



Giả sử đường tròn ngoiạ tiếp tam giác AEF và BDF cắt nhau tại M. Ta có
$EMD = 360^o - EMF - DMF$

$$= 180^o - FAE + 180^o - EMF = \hat{A} + \hat{B} = 180^o - \hat{C}.$$

Vậy $EMDC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFE, BDF, CED cắt nhau tại một điểm M.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC có B, C là góc nhọn và $BAC = 60^o$. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

a. Chứng minh rằng AB_1IC_1 là tứ giác nội tiếp

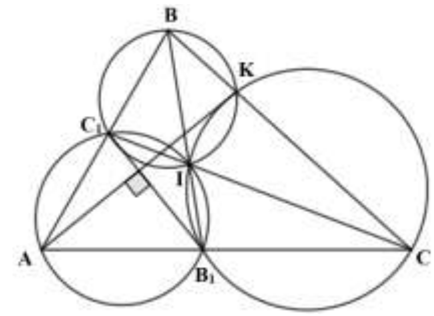
b. Gọi K là giao điểm thứ 2 của BC với đườn tròn ngoiạ tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh rằng tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

c. Chứng minh $AK \perp B_1C_1$.

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Ta thấy

$C_1IB_1 = C_1IA + B_1IA = \hat{A} + \frac{1}{2}\hat{C} + \hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B} = 120^\circ + \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ$.



Nên AB_1IC_1 là tứ giác nội tiếp. Ta cũng thấy điểm I là điểm Miquel của tam giác ABC nên suy ra tứ giác $CKIB_1$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $AB_1K = AB_1I + IB_1K = BC_1I + ICB$

$= 180^0 - B$ nên tứ giác $ABKB_1$ là tứ giác nội tiếp.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: BC_1B_1C, $ACKC_1$ là các tứ giác nội tiếp.

Ta có:

$AC_1B_1 + C_1AK = AIB_1 + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left(A + B + C\right) = 90^0$.

Suy ra $AK \perp C_1B_1$.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh theo cách:

Chỉ ra tam giác AB_1K cân tại B_1 có B_1C_1 là đường phân giác nên cũng là đường cao.

CHƯƠNG VIII. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội - Năm 2006).***

Cho đường tròn $(O;\, R)$ có đường kính AB, C là trung điểm của OA và dây $MN \perp OA$ tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK, MN.

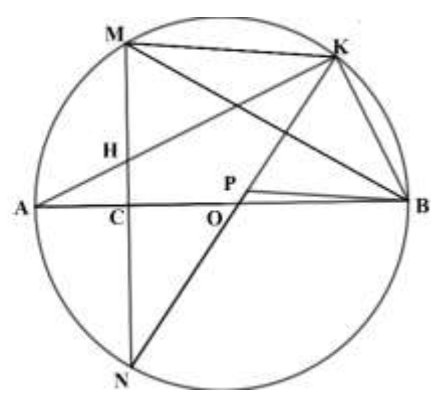
a) Chứng minh: $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính $AH.AK$ theo R.

c) Xác định vị trí K để $KM + KN + KB$ lớn nhất. Tính GTLN đó.

Giải:

a) Do K nằm trên $\left(O; \frac{AB}{2}\right) \Rightarrow AKB = 90^0$.



Lại có $HCB = 90^0$ (giả thiết) suy ra

$AKB + HCB = 180^0$ nên tứ giác $BCHK$ nội tiếp.

(Tổng hai góc đối bằng 180^0).

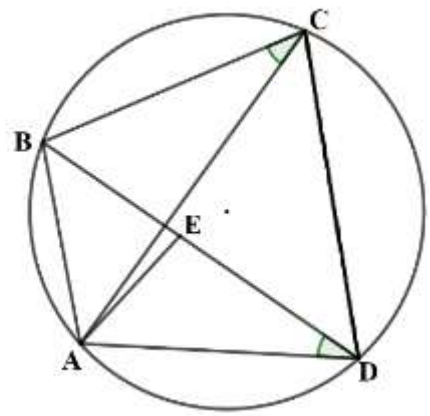
b) Ta có $\Delta ACH \sim \Delta AKB\,(g.g)$ nên

$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AH.AK = AC.AB = \frac{R}{2}.2R = R^2$.

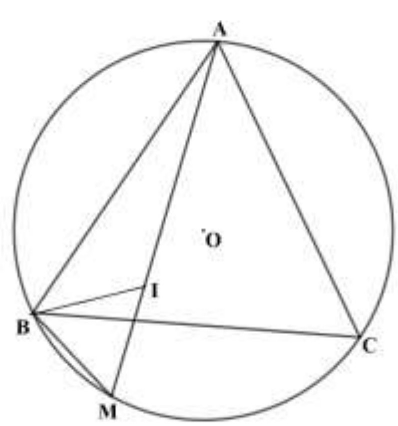
c) Đây là một câu hỏi khá hay. Nếu bạn nào biết định lý Ptolemy hoặc định lý Shooten thì bài toán được giải quyết.

Cách tiếp cận thứ nhất:

Nhận thấy tam giác BMN cân tại B và tam giác AMO đều (do AMO cân tại O và tại M) suy ra tam giác BMN đều nên $NKB = \frac{1}{2}$ sđ $NB = 60^0$. Trên dây KN lấy điểm P sao cho $KP = KB$ thì tam giác KPB đều. Xét tam giác MKB và NPB ta có:
$KB = BP,\ MB = NB,\ MKB = NPB = 120^0$ suy ra
$\Delta MKB = \Delta NPB\ (c.g.c) \Rightarrow KM = PN \Rightarrow KM + KB = KN$. Vậy $KM + KN + KB = 2KN$.
Dễ thấy $KN \le 2R$ nên $KM + KN + KB \le 4R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi K, O, N thẳng hàng.
Từ đó suy ra điểm K là giao điểm của NO với (O) (K khác N).
Cách 2: Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $KMNB$ ta có:
$KM.BN + KB.MN = KN.MB$.
Chú ý rằng: $BM = BN = MN$ suy ra $KM + KB = KN$. Phần còn lại ta làm như trên.
1.1 Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó ta có: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.



Chứng minh:
Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $DAE = BAC$.
Ta có $DAE = BAC$ và $ADE = ACB$ (cùng chắn AB) nên
$\Delta ADE \sim \Delta ACB\ (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE\ (1)$.
Do $DAE = CAB$ nên $DAC = EAB$, lại có $ABE = ACD$ (cùng chắn AD)
$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ACD\ (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE\ (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC(BE + DE) = AC.BD$.
1.2 Định lý Shooten
Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng với mỗi điểm M bất kỳ nằm trên đường tròn (O) thì một trong ba đoạn MA, MB, MC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia.
Chứng minh



Xét điểm M nằm trên cung nhỏ BC.
Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta có $MA.BC = MB.AC + MC.AB$.
Vì $AB = AC = BC$ nên $MA = MB + MC$.
Tương tự điểm M nằm trên cung nhỏ AC và AB thì ta lần lượt có $MB = MC + MA$ và $MC = MA + MB$.
Suy ra đpcm.
Cách khác để chứng minh:
$MA = MB + MC$ (trường hợp điểm M nằm trên các cung

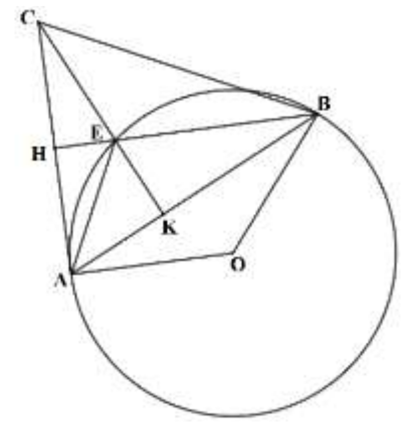
AB, AC tương tự).

Trên MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$ ta cần chứng minh $MC = AI$. Thật vậy, ta có $BMI = ACB = 60^0$ mà $MI = MB$ nên tam giác BIM đều, do đó $BI = BM$ và $IBM = 60^0$.

Ta lại có $ABC = 60^0$ nên $ABC = IBM$, suy ra $CBM = ABI$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta BCM = \Delta BAI$ $(c.g.c)$ nên $MC = AI$.

Bài 2. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội - Năm 2007).***

Cho đường tròn $(O;\, R)$ tiếp xúc với (d) tại A. Trên (d) lấy điểm H không trùng với A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với (d), đường thẳng này cắt (O) tại $B,\, E$ (E nằm giữa B và H).



a) Chứng minh: $ABE = EAH$ và $\Delta ABH \sim \Delta EAH$.

b) Lấy C trên (d) sao cho H là trung điểm của AC, CE cắt AB tại K. Chứng minh: $AHEK$ là tứ giác nội tiếp.

c) Tìm vị trí của H để $AB = R\sqrt{3}$.

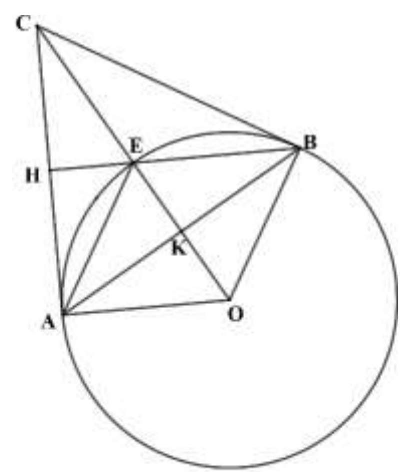
Giải:

a) Do AH là tiếp tuyến của (O) tại A nên $ABE = EAH = \frac{1}{2}$ sđ AE.

Xét tam giác $\Delta ABH, \Delta EAH$ ta có:

AHB chung và $ABE = EAH \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta EAH\,(g.g)$.

b) Vì E nằm trên trung trực của AC nên $EAH = ECH$. Lại có: $EAH = EBA$. Suy ra $\Delta ABH \sim \Delta ACK\,(g.g)$ Suy ra $CKA = BHA = 90^0$. Tứ giác $AHKE$ có $AHE + EKA = 180^0$ suy ra $AHKE$ nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180^0).



c) Khi $AB = R\sqrt{3}$ thì sđ $AEB = 120^0$.

Do tam giác ABC cân tại B nên $AB = BC = R\sqrt{3}$.

Lại có $AEB = BEC = 120^0 \Rightarrow HEA = 60^0 \Rightarrow HAE = 30^0$

$\Rightarrow HBA = 30^0 \Rightarrow AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy điểm H nằm trên (d) sao cho $AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ để $AB = R\sqrt{3}$.

Bài 3. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội - Năm 2008).***

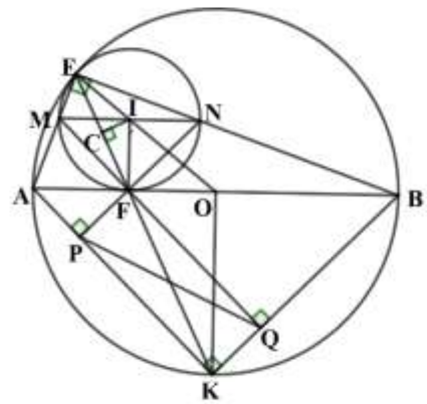
Cho đường tròn $(O;\, R)$ có đường kính AB và điểm E bất kì nằm trên đường tròn (E khác $A,\, B$). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn AB tại F và cắt (O) tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh: $\Delta KAF \sim \Delta KEA$.

b) Gọi I là giao điểm của OE với trung trực của EF. Chứng minh (I) bán kính IE tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với AB tại F.

c) Chứng minh: $MN//AB$, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với (I).

d) Tìm GTNN của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên (O), với P là giao điểm của NF và AK, Q là giao điểm của MF và BK.



Giải:

a) Vì EK là phân giác của góc AEB nên

$AK = KB \Rightarrow AEK = KAB$.

Xét tam giác ΔKAF, ΔKEA ta có:

$AEK = KAB$ và AKE chung.

Suy ra $\Delta KAF \sim \Delta KEA(g.g)$.

b) Vì $I \in OE$, $E \in (O)$ nên $(I;IE)$ tiếp xúc với $(O;OE)$ tại E.

Vì I nằm trên trung trực của EF nên $IE = IF$ hay $F \in (I;IE)$.

Ta có: $IEF = IFE, OEK = OKE$ suy ra $IFE = OKE \Rightarrow IF//OK$, mà $OK \perp AB$ (do K là điểm chính giữa cung AB) từ đó suy ra $IF \perp AB$ (1) hay (I) bán kính IE tiếp xúc AB tại F.

c) Do $MEN = 90^0 \Rightarrow MN$ là đường kính của (I), hay M, I, N thẳng hàng. Lại có $FIN = 2FEN = 90^0$ nên $FI \perp MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $MN//AB$.

d) Ta chưng minh ở câu b ta suy ra $MFN = 90^0 \Rightarrow PFN = 90^0$. Ta có $EAB = EKB$ (cùng chắn cung EB), $EAB = EMN$ (đồng vị), $EMN = EFN$ (cùng chắn cung EN) suy ra $EFN = EKB \Rightarrow FN//BK$. Mặt khác $AK \perp KB \Rightarrow AK \perp NF$ tại P suy ra $PFQK$ là hình chữ nhật và tam giác APF vuông cân tại P nên $KQ = PF = AP.$

Ta kí hiệu chu vi của tam giác KPQ là c thì $c = KP + KQ + PQ = KP + PA + KF = KA + KF$.

Ta có $KA = R\sqrt{2}, KF \ge KO = R$ nên $c \ge R\left(1+\sqrt{2}\right)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $F \equiv O$.

Hay E là điểm chính giữa của cung AB.

Bài 4. (Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2009)

Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B,C là các tiếp điểm).

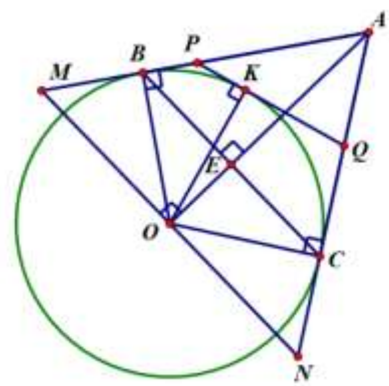
Chứng minh: ABOC là tứ giác nội tiếp.

Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh: $BE \perp OA$ **và** $OE.OA = R^2$.

Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm K bất kỳ (K khác B,C). Tiếp tuyến tại K của (O) cắt AB,AC lần lượt tại P,Q. Chứng minh: Chu vi tam giác APQ không đổi khi K di động trên cung nhỏ BC

Đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB,AC lần lượt tại M,N. Chứng minh: $PM + QN \geq MN$ **.**

Giải:



Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90^0$**. Tứ giác ABOC có** $ABO + ACO = 180^0$ **nên ABOC là tứ giác nội tiếp(tổng 2 góc đối bằng** 180^0**).**

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có: $BC \perp AO$ **tại E. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có:** $OE.OA = R^2$.

Vì điểm A cố định nằm ngoài (O) nên AB,AC cố định suy ra AB+AC không đổi.

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có PK = PB, QK= QC suy ra chu vi tam giác APQ là: AP+AQ +PQ = AP+ AQ + PB+ QC = AB+ AC không đổi.

Giả sử BK cắt PO tại I, CK cắt OQ tại J thì $KIO = KJO = 90^0$ **nên tứ giác KIOJ nội tiếp nên** $KOJ = KIJ = QKC = KBC \Rightarrow IJ // BC \text{ hay } IJ // AO.$ **Từ đó ta có:**

$BPO = BKO = IJO = 90^0 - JAO = QON$

Xét ΔMOP **và** ΔNQO **có:**

$$\left.\begin{array}{l} PMO = ONQ \\ MPO = QON \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MOP \backsim \Delta NQO\left(g.g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{PM}{OM} = \frac{ON}{QN} \Rightarrow PM.QN = OM.ON = \frac{MN^2}{4}$$

Ta có: $PM.QN \le \dfrac{\left(PM.QN\right)^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{MN^2}{4} \le \dfrac{\left(PM.QN\right)^2}{4} \Leftrightarrow PM + QN \ge MN$ **Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi**

$PM = QN \Leftrightarrow PQ//MN \text{ hay } K$ **là điểm chính giữa cung nhỏ BC.**

Nhận xét: **Đây là bài toán khá hay trong đề tuyển sinh vào 10 của TP Hà Nội.**

Một số bài toán ôn tập thêm

Bài1:

Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. kẻ các
tiếp tuyến AB,AC với (O) (B,C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M rồi kẻ các đường thẳng vuông góc MI,MH,MK xuống BC,CA,AB. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM và IK, CM và IH.

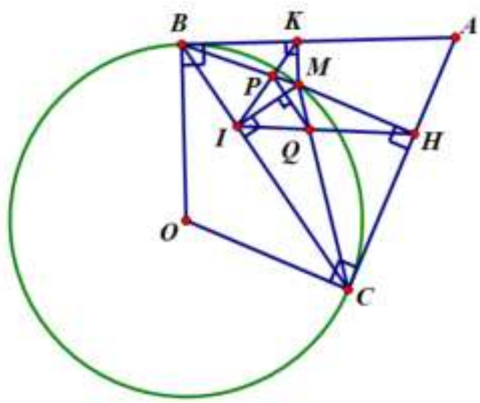
Chứng minh: Các tứ giác BIMK,CIMH là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$.

Chứng minh: IPMQ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$ **.**

Tìm vị trí điểm M để MI.MH.MK đạt GTLN.

Giải:



Từ giả thiết ta có: $BKM = BIM = 90^0$ **suy ra tứ giác BKMI nội tiếp. Tương tự cho tam giác CIMH, AKMH.**

Vì tứ giác BKMI nội tiếp nên: $MKI = MBI$ **(cùng chắn cung MI). Mặt khác ta có:** $MBI = MCH$ **(tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Nhưng** $MCH = MIH$ **(cùng chắn cung MH của tứ giác nội tiếp MHCI). Suy ra** $MKI = MIH$

Hoàn toàn tương tự ta có: $MIK = MHI$

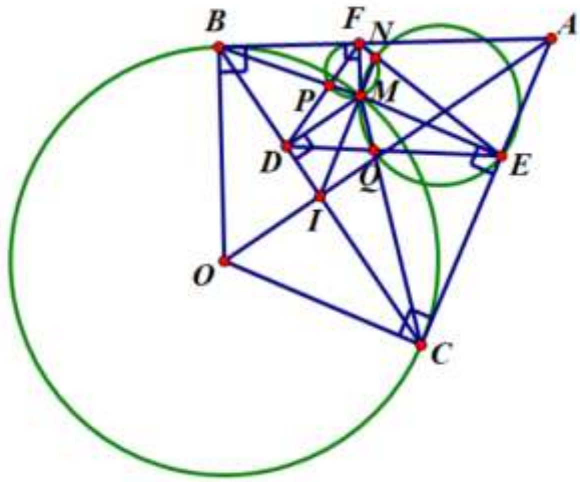
nên $\Delta MIK \backsim \Delta MHI\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MI}{MK} = \dfrac{MH}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MK.MH$

Ta có: $PMQ + PIQ = BMC + PIM + QIM = BMC + MBA + MCA = BMC + MCB + MBC = 180^0$ **Do đó tứ giác PIQM nội tiếp(tổng hai góc đối nhau bằng** 180^0**). Vì PIQM nội tiếp** $\Rightarrow MPQ = MIQ = MKI = MBI \Rightarrow PQ//BC \text{ hay } MI \perp PQ$ **.**

Từ chứng minh ở câu b) ta có $MI^2 = MH.MK \Rightarrow MI^3 = MH.MK.\mathrm{MI}$ **. Suy ra MI.MK.MH lớn nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất. Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC không chứa A.**

Bài 2: Cho đường tròn tâm (O) .Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến AB,AC với (O) (B,C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC của (O) lấy điểm M. Gọi D,E,F thứ tự lá hình chiếu từ M đến BC,AC,AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE cắt nhau tại M, N. Đường thẳng MN cắt PQ, BC theo thứ tự tại K và I.

Ta có các tứ giác MDCE, MDBF nội tiếp nên $MCE = MDE = MBC; MBF = MDF = MCB$

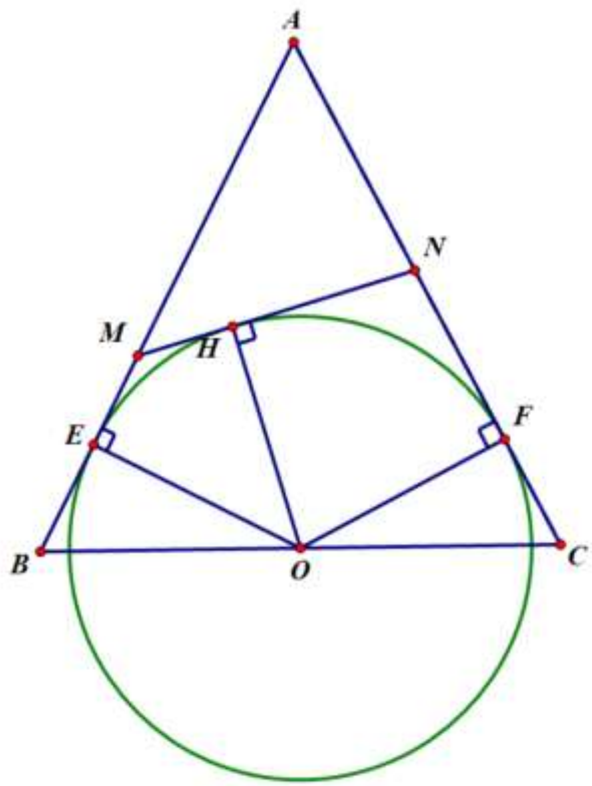
Suy ra $PMQ + PDQ = PMQ + PDM + QDM = PMQ + MCB + MBC = 180^0$

Do đó tứ giác MPDQ là tứ giác nội tiếp. $Suy\,ra\,MQP = MCB = MEQ,\,suy\,ra\,KQ$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MQE. Tương tự KP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFP. Ta có $KM.KN = KQ^2, KM.KN = KP^2. Suy\,ra\,KP = KQ$.

Xét tam giác MBC, PQ // BC, KP = KQ. Theo định lý Thales suy ra I là trung điểm BC. Vậy MN đi qua điểm cố định I là trung điểm BC.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi O là trung điểm BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB ở E tiếp xúc với AC ở F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF tiếp tuyến của đường tròn tại H cắt AB, AC lần lượt tại M,N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Giải:



Dễ thấy OM,ON lần lượt là phân giác EOM, FOH

Từ đó ta có:

$$MON = \frac{180^0 - BAC}{2} = ABC \Rightarrow \Delta MBO" \ \Delta OCN(g.g) \Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = OB.OC = \frac{BC^2}{4} = const\,(1)$$

Ta lại có: $S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$ *nên* S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi R là bán kính của đường tròn (O), ta có:

$S_{BMNC} = S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2}R(BM + MN + NC) = \frac{1}{2}R\left[BE + CF + 2(EM + FN)\right]$ Vì

$(MN = EM + FN)$

$= R(BE + EM + FN)$ vì (BE =

CF) $= R(BE + BM + CN - 2BE) = R(BM + CN - BE)(2)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, từ (1)(2) suy ra

$$S_{BMNC} \ge R\left(\sqrt{BM.CN} - BE\right) = R\left(\frac{BC}{2} - BE\right).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN // BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O). Vậy diện tích tam gics AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

Bài 5: (Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2010)

Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

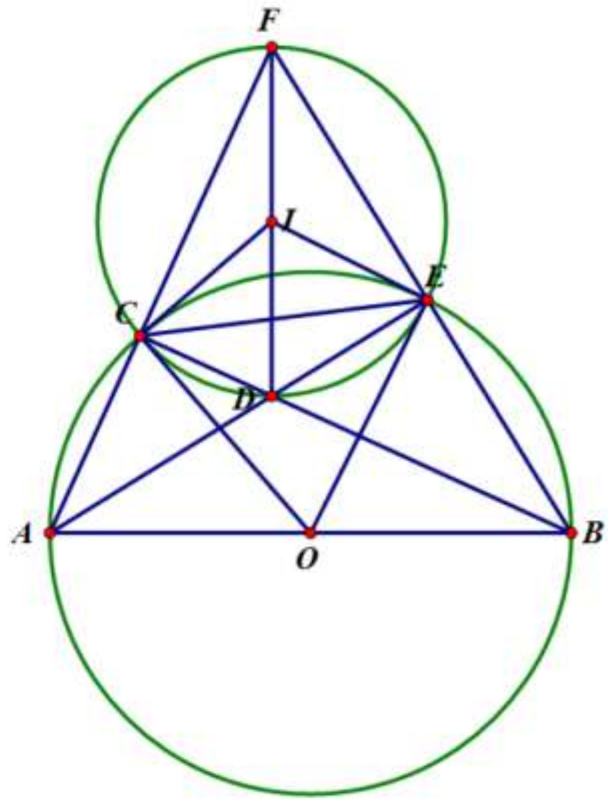
Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh DA.DE = DB.DC

Chứng minh $CFD = OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Cho biết DF = R, chứng minh $\tan AFB = 2$.

Bài giải:



Do C,E nằm trên đường tròn đường kính AB nên

$ACB = AEB = 90^0 \Rightarrow FCD = FED = 90^0$.

Tứ giác FCDE có: $FCD + FED = 180^0$ **nên FCDE là tứ gác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng** 180^0 **).**

Tứ giác ACED nội tiếp (O) nên $ACB = AEB$ (cùng chắn cung AB). Ta có: $CDA = EDB$ (đối đỉnh) nên $\Delta ACD \sim \Delta BED$(g.g)

$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DE}$ *hay* $DA.DE = DB.DC$

Tứ giác ACED nội tiếp nên $CFD = CED$ **(cùng chắn cungCD). Tứ**

giác ACEB nội tiếp nên $CEA = CBA$ (cùng chắn cung AC). Mà $CBA = OCB \Rightarrow CFD = OCB(đpcm)$. Do đó AE,BC là hai đường cao của tam giác AFB nên D là trực tâm của tam giác AFB. Để ý rằng 4 điểm F,C,D,E nằm trên đường tròn đường kính DF nên I là trung điểm của DF suy ra

$IE = IF = \frac{1}{2}DF \Rightarrow IEF = IFE\left(1\right)$

Ta cũng có: $OEB = OBE\left(2\right)$. Từ (1)(2) ta suy ra $IEF + OEB = IEF + OBE = 90^0$

$\Rightarrow IEO = 90^0$ hay IE là tiếp tuyến của (O).

Ta có: $\Delta ACB \sim \Delta DCF \Rightarrow \frac{CB}{CF} = \frac{BA}{FD} = 2$**. Trong tam giác vuông CFB ta có :**

$\tan CFB = \frac{CB}{CF} = 2\left(ĐPCM\right)$

<u>Bài 6.</u> (Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội -Năm 2011)

Cho đường tâm O , đường kính AB = 2R . Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B . Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với Avà B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1 d_2 lần lượt M,N .

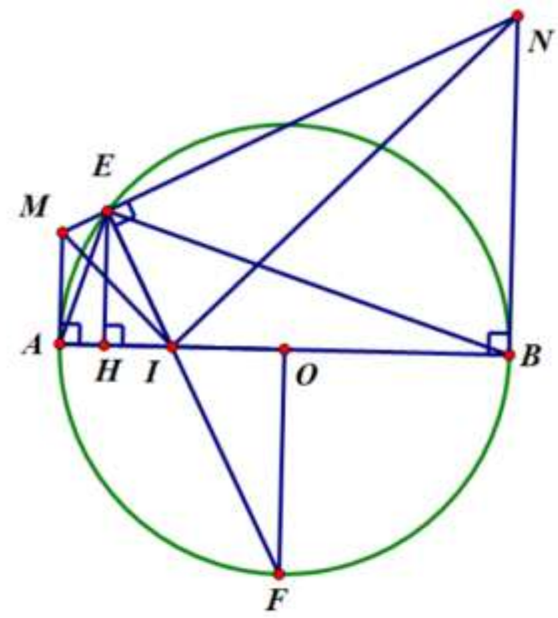
Chứng minh AMEI là tứ giác nội tiếp .

Chứng minh $ENI = EBI$ và $MIN = 90^o$.

Chứng minh AM. BN = AI.BI.

Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa E của đường tròn (O).Hãy tính diện tích của tam giác MN theo R khi ba điểm E,I,F thẳng hàng .

Giải:



Do $MAI = MEI$ =90^O suy ra MAI + MEI = 180^O hay MAIE là góc nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180^o)

Do MAIE là tứ giác nội tiếp nên $EMI = EBI$ (cùng chắn cung EI). Chứng minh tương tự câu a ta có NEIB là tứ giác nội tiếp nên $ENI = EBN$ (cùng chắn cung NB). Từ đó suy ra $\Delta MIN \sim \Delta AEB \Rightarrow MIN = 90^0$

Xét tam giác vuông MAI và IBN ta có:

$$MIA = 180^0 - MIN - NIB = 90^0 - NIB = INB \Rightarrow \Delta MAI \sim \Delta IBN\,(g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{IB}{BN} \Leftrightarrow AM.BN = IA.IB$$

Dựng $EH \perp AB$, Khi F là điểm chính giữa cung AB thì È là phân giác của góc

$$AEB \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{3} \Rightarrow EA^2 + EB^2 = EA^2 + 9EA^2 = AB^2 = 4R^2$$

$$\Rightarrow EA^2 = \frac{2}{3}R^2 \Rightarrow EA = \frac{\sqrt{10}}{5}R$$

$EB = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}R$. Ta cũng có: $\Delta MIN \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{S_{MIN}}{S_{AEB}} = (\dfrac{EI}{EH})^2 = (\dfrac{IF}{OF})^2 = \dfrac{OI^2 + OF^2}{OF^2} = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow S_{MIN} = \dfrac{5}{4}S_{AEB} = \dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2}EA.EB = \dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{10}}{5}R.\dfrac{3\sqrt{10}}{5}R = \dfrac{3}{4}R^2$

Bài 7. ***(Trích đề thi TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2012)***

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là ddiemr bất kỳ trên cung nhỏ $AC(\mathrm{M} \neq \mathrm{A,C})$, BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB

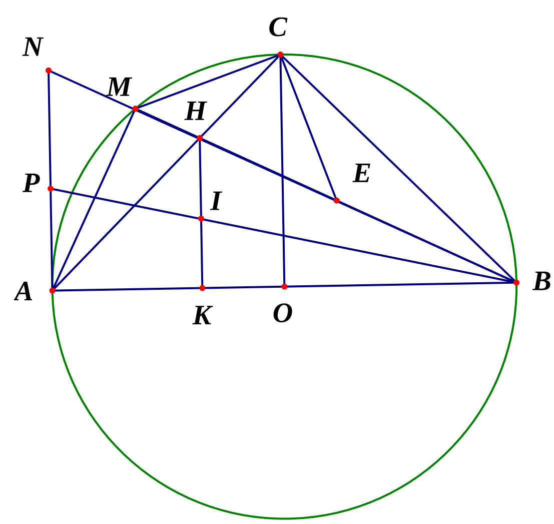
a, Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh $ACM = ACK$

c, Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

d, Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Cho P là điểm bất kỳ trên d sao cho hai điểm P,C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\dfrac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh rằng đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Lời giải



a, Vì C nằm trên đường tròn $(\mathrm{O};\dfrac{AB}{2})$ nên $ACB = 90^\circ$, ta có $HKB = 90^\circ$

$\Rightarrow ACB + HKB = 180^\circ$ nên tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b, Tứ giác $AMCB$ nội tiếp nên $ACM = AMB\,(1)$

Tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp nên $HCK = HBK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ACM = ACK$

c, Do C là điểm chính giữa cung AB nên ΔACB vuông cân tại $C \Rightarrow AC = AB$,

ta cũng có : $MAC = EBC$ (Cùng chắn cung MC),

$AM = BE(gt) \Rightarrow \Delta AMC = \Delta BEC(c.g.c) \Rightarrow CM = CE$.

Lại có: $MCE = MCA + ACE = ECB + ACE = 90^\circ$ Nên tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

D, Giả sử MB kéo dài cắt tiếp tuyến tại A ở N. Ta dễ chứng minh được $\Delta NAB \backsim \Delta AMB$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{AB}{NA} = \dfrac{2R}{NA} \Rightarrow R = \dfrac{NA.MB}{2MA}$ Kết hợp điều kiện $\dfrac{AP.MB}{MA} = R.$ Ta có: $\dfrac{AP.MB}{MA} = \dfrac{NA.MB}{2MA}$

Hay $NA = 2AP$ Nên P là trung điểm của AN. Giả sử BP cắt HK tại I. Do $HK \,//\, NA$ theo định lý Thales ta có: $\dfrac{HI}{NP} = \dfrac{IK}{PI} = \dfrac{BI}{BP}, NP = PI \Rightarrow HI = IK$ Hay I là trung điểm của HK.

<u>Bài 8.</u> ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2013)***

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C $(AB < AC, d$ không đi qua tâm O).

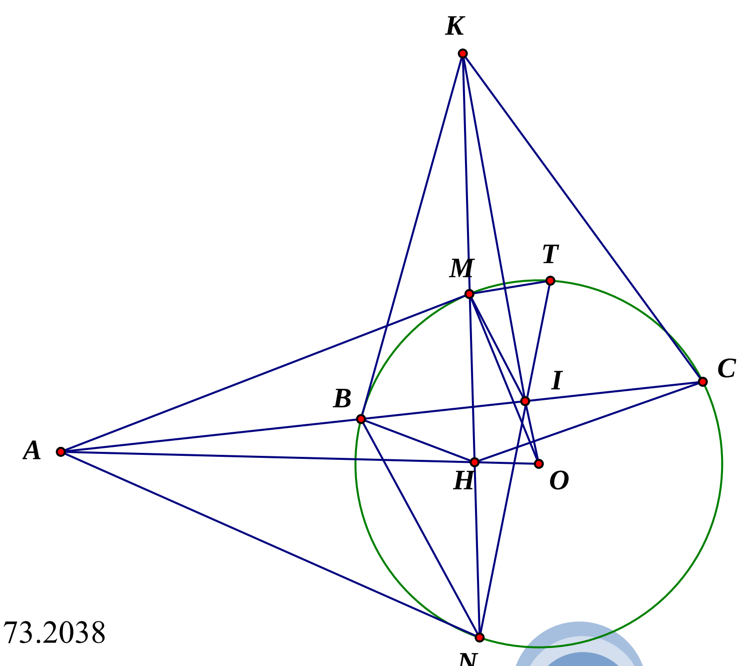
a, Chứng minh tứ giác AMON nội tiếp.

b, Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4cm, AN = 6cm.$

c, Gọi I là trung diểm của BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT \,//\, AC.$

d, Hai tiếp tuyến đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Lời giải



a, Do AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AMO = ANO = 90^\circ$

$\Rightarrow AMO + ANO = 180^\circ$ hay tứ giác AMON nội tiếp.

b, Xét tam giác ANB, ACN ta có $ANB = ACN$, NAC chung.

Nên $\Delta ANB \backsim \Delta ACN(g.g) \Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AC}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.AC.$

c, Do I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC \Rightarrow AIO = 90°$ kết hợp câu a ta suy ra 5 điểm A, M, I, O, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO suy ra $AIN = AMN$ (Cùng chắn cung AN). Mặt khác ta cũng có: $AMN = MTN$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Từ đó suy ra: $AIN = MTN$ (Hai góc này đồng vị) $\Rightarrow MT // AI$

d, Giả sử MN cắt AO tại H . Trong tam giác ANO vuông ta có $AN^2 = AH.AO$ kết hợp câu b suy ra $AH.AO = AB.AC \Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta AOC(g.g) \Rightarrow AHB = ACO \Rightarrow BHOC$ nội tiếp.

Giả sử tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại K , chứng mi h như câu a ta có $KBOC$ nội tiếp, kết hợp với $BHOC$ nội tiếp suy ra 5 điểm K, B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính $KD \Rightarrow KHO = 90°$. Mặt khác $MHO = 90° \Rightarrow K, M, H$ thẳng hàng. Hay K nằm trên đường thẳng cố định MN .

Bài 9. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2014).***

Cho đường tròn $O; R$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $O; R$ M khác A, M khác E Tiếp tuyến của đường tròn $O; R$ tại B cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

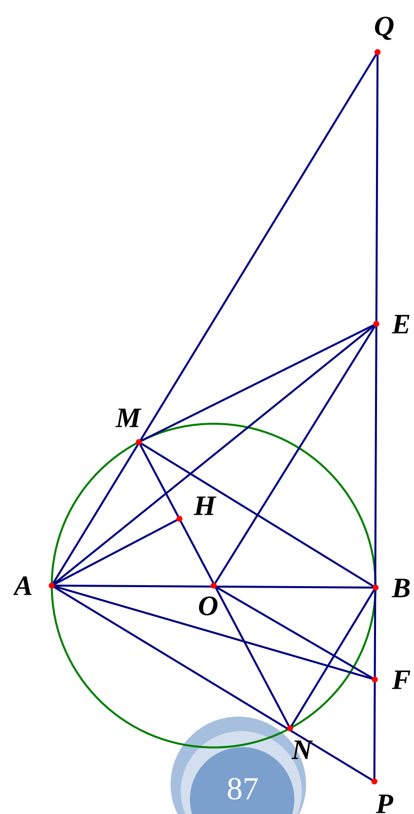
a) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi E là trung điểm của BQ . Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME // NF$.

d) Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



a) Tứ giác $AMBN$ có 4 góc vuông nên là hình chữ nhật,

vì là 4 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

b) Ta có $ANM = ABM$ (cùng chắn cung AM) và $ABM = AQB$ (góc có cạnh thẳng góc)

vậy $ANM = AQB$ nên $MNPQ$ nối tiếp.

c) OE là đường trung bình của tam giác ABQ.

$OF \,//\, AP$ nên OF là đường trung bình của tam giác ABP .Suy ra F là trung điểm của BP.

Mà AP vuông góc với AQ nên OE vuông góc OF.

Xét tam giác vuông NPB có F là trung điểm của cạnh

huyền BP.

Xét và chứng minh được $\Delta NOF = \Delta OFB$ $c-c-c$

nên $ONF = 90^0$.

Tương tự ta có $OME = 90^0$ nên $ME \,//\, NF$ vì cùng vuông góc với MN.

d) $2S_{MNPQ} = 2S_{APQ} - 2S_{AMN} = 2R.PQ - AM.AN = 2R.(PB + BQ) - AM.AN$

Tam giác ABP đồng dạng tam giác QBA suy ra $\dfrac{AB}{QB} = \dfrac{BP}{BA} \Rightarrow AB^2 = BP.QB$

Nên áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có $PB + BQ \geq 2\sqrt{PB.BQ} = 2\sqrt{(2R)^2} = 4R$

Ta có $AM.AN \leq \dfrac{AM^2 + AN^2}{2} = \dfrac{MN^2}{2} = 2R^2$

Do đó, $2S_{MNPQ} \geq 2R.4R - 2R^2 = 6R^2$. Suy ra $S_{MNPQ} \geq 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $AM = AN$ và $PQ = BP$ hay $MN \perp AB$.

<u>Bài 10</u>. *(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2015).*

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB . Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA.CB = CH.CD$.

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm của DH.

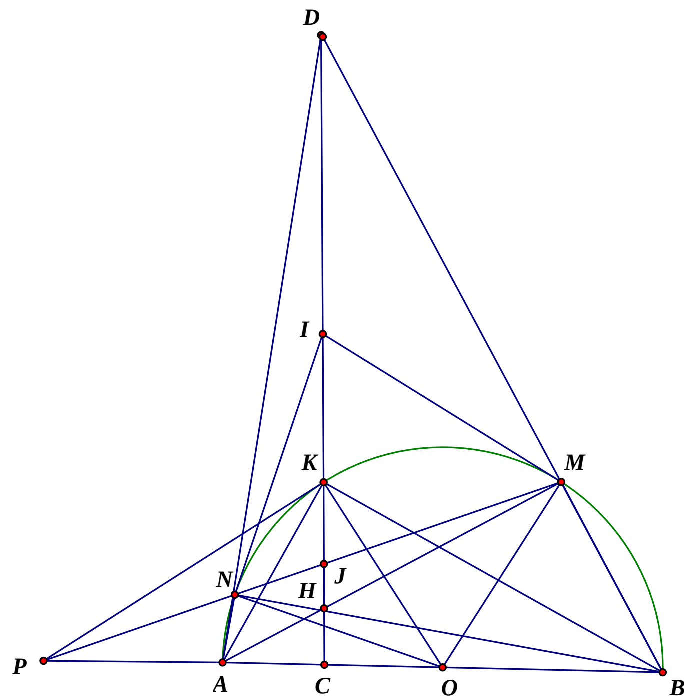
d) Khi M di động trên cung KB , chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Tứ giác $ACMD$ có $ACD = AMD = 90^0$ Nên tứ giác $ACMD$ nội tiếp

b) Xét 2 tam giác vuông :

ΔACH và ΔDCB đồng dạng



(Do có $CDB = MAB$)

Nên ta có

$\frac{CA}{CH} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow CA.CB = CH.CD$

c) Do H là trực tâm của ΔABD

Vì có 2 đường cao DC và AM giao nhau tại H , nên $AD \perp BN$

Hơn nữa $ANB = 90^0$ vì chắn nửa đường tròn đường kính AB.

Nên A, N, D thẳng hàng.

Gọi tiếp tuyến tại N cắt CD tại I ta chứng minh $IND = NDI$.

Ta có $IND = NBA$ cùng chắn cung AN .

Ta có $NDI = NBA$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow IND = NDI$. Vậy trong tam giác vuông ΔDNH , có I là trung điểm của HD.

d) Gọi P là giao điểm của MN với AB. Ta chứng minh P là điểm cố định. Thật vậy do $AMNB$ nội tiếp nên $PNA = PBM \Rightarrow \Delta PMA \backsim \Delta PBM\,(g.g) \Rightarrow \frac{PN}{PA} = \frac{PB}{PM} \Rightarrow PM.PN = PA.PB(3)$ Theo câu c) ta có IN là tiếp tuyến của (O) hoàn toàn tương tự ta cũng có IM là tiếp tuyến của (O) nên suy ra $INO = ICO = IMO = 90^\circ$ hay 5 điểm I, N, C, O, M cùng nằm trên một đường tròn đường kính IO suy ra tứ giác $MNCO$ nội tiếp nên ta cũng suy ra $PM.PN = PC.PO(4)$ Từ (3) và (4) suy ra $PA.PB = PC.PO.$ Từ P ta kẻ tiếp tuyến PK' với (O) thì $PA.PB = PK'^2 = PC.PO.$ Từ đó suy ra $\Delta PCK' \backsim \Delta PK'O(c.g.c) \Rightarrow K'CP = 90^\circ \Rightarrow K' \equiv K.$ Hay P là giao điểm của tiếp tuyến tại K với AB Vậy P là điểm cố định.Vậy MN đi qua điểm cố định P

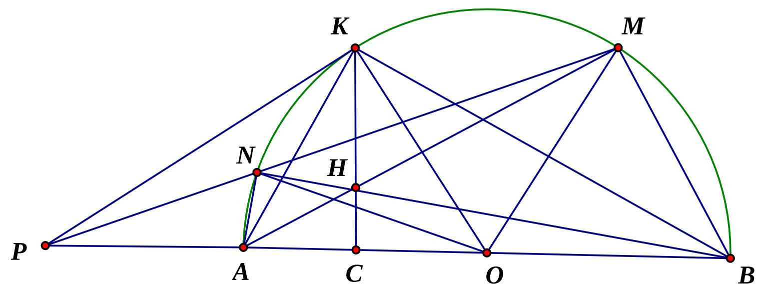
Chú ý:

Ý tưởng tạo câu d) trong bài này và câu d) trong đề TS năm 2013 là giống nhau nên việc phát hiện P là giao điểm của tiếp tuyến tại K với AB là hoàn toàn tự nhiên.

Ngoài ra ta cũng có thể phát biểu câu d) theo một cách khác:

"Qua điểm P ở ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến PK cát tuyến PAB đi qua tâm O, cát tuyến KMN bất kỳ. Gọi H là giao điểm của AM, BN, C là hình chiếu của H trên AB. Khi đó C, H, K thẳng hàng"

Chứng minh:



Từ các tứ giác $ANHC, CHMB, MNAB$ nội tiếp ta có biến đổi góc sau:

$ANC = AHC = ABM = PNA$

$\Rightarrow PNC = 2.PBM = POM$

(TC góc ngoài tam giác cân)

nên $NCOM$ nội tiếp.

Ta cũng có:

$PK^2 = PM.PN = PC.PO \Rightarrow \dfrac{PC}{PK} = \dfrac{PK}{PO} \Rightarrow \Delta PCK \backsim \Delta PKO \Rightarrow PCK = 90^\circ$.

Vì KC, HC cùng vuông góc với AB nên K, H, C thẳng hàng.

<u>**Bài 11**</u>. ***(Trích đề TS lớp 10 TP Hà Nội – Năm 2016).***

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn CO lấy I ($I \neq C, I \neq O$). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D, E(D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của DE.

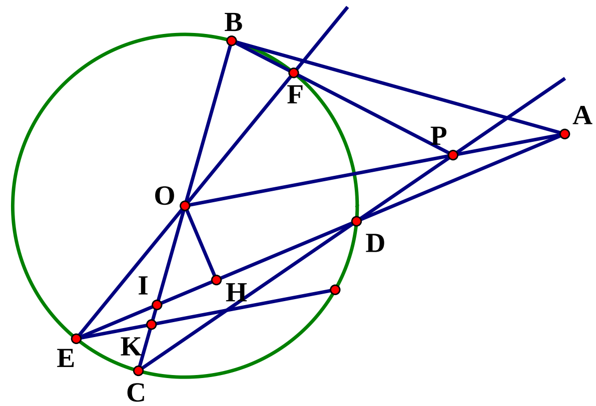
a). Chứng minh: 4 điểm A, B, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b). Chứng minh: $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.

c). Đường thẳng (d) qua E song song với AO, d cắt BC tại K. Chứng minh : $KH // DC$.

d, Tia CD cắt AO tại P, tia EO cắt BP tại F. Chứng minh $BECF$ là hình chữ nhật.

Giải



a, Vì H là trung điểm của DE nên $OH \perp DE$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung). Suy ra $AHO = ABO = 90^0$ nên 4 điểm A, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính .

b, Vì AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow ABD = BEA$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$ (gg) $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{EB}$ (đpcm)

c, Để chứng minh $HK // DC$ ta chứng minh $EHK = EDC$. Ta lại có $EDC = EBC$ nên ta quy về chứng minh $EHK = EBC \Leftrightarrow$ chứng minh $BHKE$ nội tiếp.

Thậy vậy : do $EK // DC \Rightarrow BKE = AOK$ (so le trong). Ta cũng có $AOK = 180^0 - AOB$ mà $AOB = AHB$ (cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOH$). Suy ra $AOK = 180^0 - AHB = BHE$ hay $BKE = BHE$ suy ra tứ giác $BHKE$ nội tiếp(có hai đỉnh liên tiếp H, K cùng nhìn cạnh BE một góc bằng nhau) đpcm.

d, Để chứng minh: $BECF$ là hình chữ nhật ta sẽ chứng minh : Điểm F nằm trên (O) tức là chứng minh : $EBP = 90^0$ hay $EBC + CBP = 90^0$. Thật vậy:

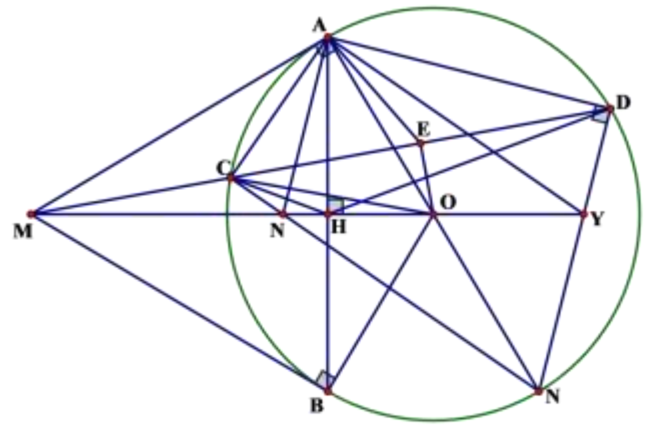
Xét tam giác EHB và tam giác COP ta có: $EHB = COP, BED = BCD$ suy ra $\triangle EHB \backsim \triangle COP$ (g.g). $\Rightarrow \dfrac{EB}{CP} = \dfrac{EH}{CO} = \dfrac{ED}{CB} \Rightarrow \triangle EDB \backsim \triangle CBP (c.g.c) \Rightarrow DEB = CBP$ mà EDB phụ với CDE mà $CDE = EBC$ suy ra $EBP = EBC + CBP = EBD + CDE = 90^0$

hay $BECF$ là hình chữ nhật.

Cách tiếp cận khác:

Ta thấy 3 bài toán trong các năm 2013, 2015, 2016 đều là các tính chất cát tuyến, tiếp tuyến của đường tròn mà trực tiếp là liên quan đến bài toán sau:

Bài toán: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm) và dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$. Gọi E là trung điểm của CD, H là trung điểm AB.



1. Tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

2. AB chứa đường phân giác của CHD

3. Vẽ đường kính AQ, các đường thẳng QC, QD cắt đường thẳng MO lần lượt tại X, Y thì O là trung điểm của XY.

Giải.

1. Vì MA là tiếp tuyến của (O) nên $MAC = ADC$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Xét hai tam giác MAC và MDA ta có $MAC = ADC, AMD$ chung nên

$\triangle MAC \backsim \triangle MDA(g.g)$ suy ra $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (1). Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $MAO, AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$(2) Suy ra $MH.MO = MC.MD$ hay $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$. Xét tam giác MCH, MOD ta có $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ và MOD chung nên $\triangle MCH \backsim \triangle MOD(c.g.c)$ suy ra $MHC = MDO \Rightarrow$ tứ giác $CHOD$ nội tiếp (góc ngoài đỉnh H bằng góc trong đối diện đỉnh H) (3).

2, Từ (3) ta có $MHC = MDO$ (4) mà $MDO = MCO$ (5)(do $\triangle COD$ cân tại O). Mặt khác ta có $COD = OHD$ (6)(góc nộ tiếp cùng chắn OD). Từ (4), (5), (6) suy ra $MHC = OHD$. Các góc CHA, DHA phụ với góc MHC, OHD tương ứng nên suy ra $CHA = DHA$ hay AH là phân giác của CHD.

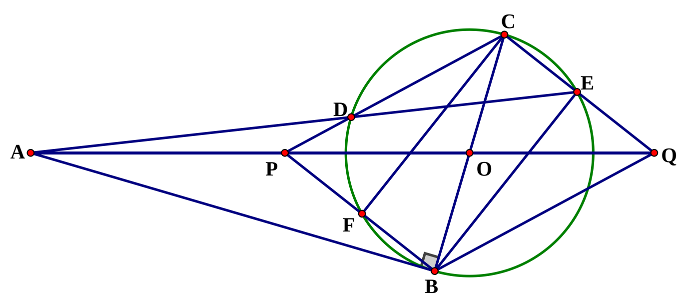
3, Do AQ là đường kính của (O) nên $ADQ = 90^0 \Rightarrow ADYH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $AYD = AHD$. Mặt khác theo 1), 2) ta có CHOD nội tiếp và AH là phân giác của CHD suy ra $AHD = \frac{1}{2}CHD = \frac{1}{2}COD = CQD \Rightarrow AYD = CQD$ suy ra $AY//CQ$. Xét hai tam giác AOY, QOX ta có $OA = OQ, AOY = QOX, YAO = XQO$ nên $\triangle AOY = \triangle QOX$(g.c.g) suy ra $OX = OY$.

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh theo các cách như sau: Tứ giác $AEOM$ nội tiếp nên $AEC \equiv AEM = AOM = QOY, YQO \equiv DQA = DCA \equiv ECA$ nên $\triangle OYQ \backsim \triangle EAC \Rightarrow \frac{QY}{QO} = \frac{CA}{CE}$ hay $\frac{QY}{\frac{1}{2}QA} = \frac{CA}{\frac{1}{2}CD} \Leftrightarrow \frac{QY}{QA} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow \triangle QYA \backsim \triangle CAD(c.g.c)$ nên $YAQ = ADC = ECA = AQC \Rightarrow AY//QX$ nên tứ giác $AXQY$ là hình bình hành suy ra $OX = OY$.

Bài toán: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O), qua A kẻ tiếp tuyến AB, dựng đường kính BC. Trên đoạn CO lấy điểm I, đường thẳng AI cắt (O) tại D, E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm DE. Tia CD cắt AO tại P, tia EO cắt BP tại F. Chứng minh $BECF$ là hình chữ nhật. (**Trích câu d)** đề tuyển sinh lớp 10 TP hà nội 2016).

Giải

Kéo dài CE cắt AO tại Q theo 3 ta có: $OP = OQ$ nên $CPBQ$ là hình bình hành . Suy ra $CEBF$ cũng là hình bình hành. Hơn nữa $CEB = 90^0$ nên $CEBF$ là hình chữ nhật.



Bài toán tương tự:

Cho tam giác ABC, đường cao AH, đường tròn (O) đường kính AH cắt AB, AC tại D, E.

a, Chứng minh $BDEC$.

b, Đường thẳng ED cắt BC tại S. Chứng minh $SH^2 = SB.SC$.

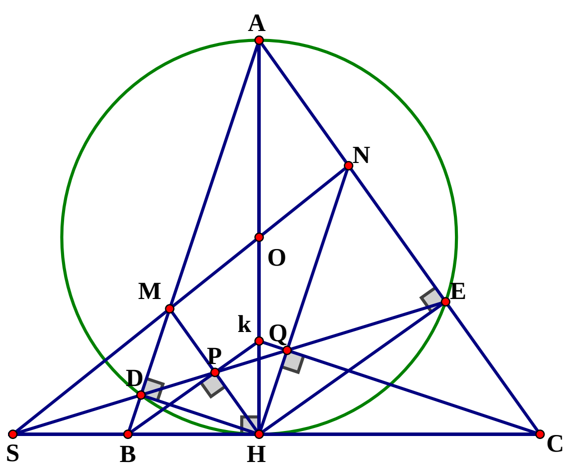
c, SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N. HM, HN cắt DE lần lượt tại P, Q. Chứng minh : BP, CQ, AH đồng quy. (**Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán – ĐHSP Hà Nội 2016).**

Giải

Do $AED = AHD = ABC$ suy ra $BDEC$ là tứ giác nội tiếp suy ra $SB.SC = SD.SE$ mặt khác SH là tiếp tuyến của (O) tại H nên $SH^2 = SD.SE$ suy ra $SH^2 = SB.SC$.

Theo tính chất 3 ta có:

$OM = ON$ nên $AMHN$ là hình bình hành . Suy ra $AM // HN, AN // HM$



$MHB = ACB = ADE$ nên $BDPH$ nội tiếp suy ra $BP \perp MH$ tương tự $CQ \perp NH$ suy ra $CQ \perp AB$, $BP \perp AC$ nên các đường thẳng BP, CQ, AH đồng quy tại trực tâm K nằm trên đường cao AH.

Bài 12. (Trích đề tuyển sinh vào 10 chuyên toán năm 2011 – TP Hà Nội)

Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định (BC<2R). Điểm A di động trên đường tròn (O, R) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC a, Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

b, Gọi E,F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH,CH . Chứng minh $AO\perp EF$.

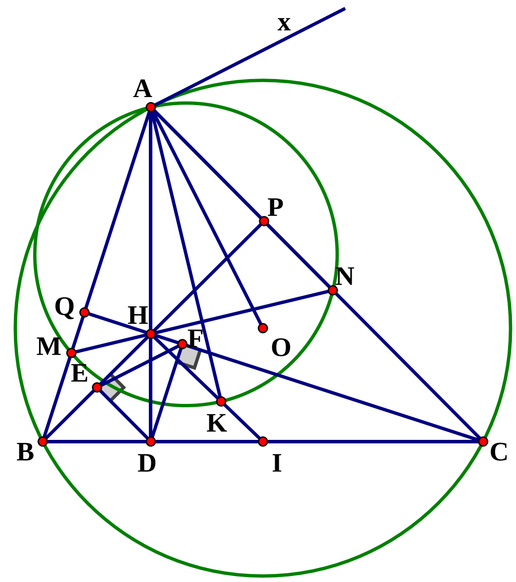
c, Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Giải.

a, Từ gia thiết suy ra HM là phân giác của BHQ, HN là phân giác của PHC. Ta có

$AMN=HMB+MHB,\quad ANM=NHC+NCH$

mà $QHB=PHC$, suy ra suy ra tam giác là tam giác cân.b, Dựng các đường cao BP,CQ của $\triangle ABC$. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) thì $xAC=ABC$, mà $BQPC$



nội tiếp nên $ABC=APQ$ suy ra $xAC=APQ\Rightarrow Ax//PQ\Leftrightarrow PQ\perp OA$. Ta chứng minh $EF//PQ$. Thật vậy $HEDF,\ BQPC$ nội tiếp nên ta có biến đổi $HFE=HDE=HBD=HQP$ hay $HFE=HQP\Leftrightarrow EF//QP$ đpcm.

c, Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt phân giác trong góc A tại K thì AK chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN (ta kí hiệu là (AMN)). Giả sử KN cắt HB tại T, KN cắt SC tại S. Dễ thấy $HTKS$ là hình bình hành nên TS cắt HK tại trung điểm của mỗi đường . Ta chứng minh $TS//BC$ để từ đó suy ra HK đi qua trung điểm I của BC.

Do $TM//QH,\ SN//PH,\ HM$ là phân giác của $QHB,\ HN$ là phân giác của PHC nên ta có biến đổi sau: $\dfrac{TH}{TB}=\dfrac{MQ}{MB}=\dfrac{HQ}{HB}=\dfrac{HOP}{HC}=\dfrac{NP}{NC}=\dfrac{SH}{SC}\Rightarrow\dfrac{TH}{TB}=\dfrac{SH}{SC}\Rightarrow TS//BC.$ Theo bổ đề hình thang thì HK đi qua trung điểm I của BC.

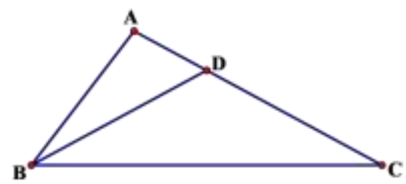
Bài 13

a, Cho tam giác MNP cân tại M và có $NMP = 36^0$. Tính tỉ số $\frac{NM}{NP}$. Cho đường tròn (O, R) ngoại tiếp tam giác ABC. Hai đường cao AE, BF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b, Chứng minh rằng MF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

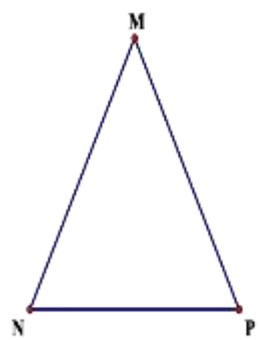
c, Gọi N là trung điểm của $EF; CM$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác (CEF) tại K. Hãy so sánh số đo các góc BCN và BAK.

Giải.



a, Ta chứng minh bổ đề sau: " Cho $\triangle ABC$ có $ABC = 2ACB$. Chứng minh $AC^2 = AB^2 + AB.BC$"

Thật vậy : Dựng phân giác trong BD của tam giác ABC ta có BDC là tam giác cân từ đó suy ra $ADB = 2DBC = ABC$ suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle ADB (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AD.AC$ (1). Theo tính chất đường phân giác ta cũng có: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AD + DC} = \frac{AB}{AB + BC} \Leftrightarrow AD = \frac{AB.AC}{AB + BC}$ thay vào



(1) ta có $AC^2 = AB^2 + AB.BC$.

Có thể biến đổi theo cách:

$\triangle ABC \backsim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB}$ suy ra $AB^2 = AC.AD, AB.BC = AC.DBD = AC.DC$ (do $BD = DC$) từ đó ta có $AB^2 + AB.BC = AC.AD + AC.DC = AC.(AD + DC) = AC^2$

Trở lại bài toán : Tam giác MNP cân tại M và có $NMP = 36^0$ suy ra $N = \hat{P} = 2M$. áp dụng bổ đề trên ta có: $AB^2 = BC^2 + AB.BC$. Chia hai vế cho AB^2 suy ra

$$1 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{BC}{AB} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \frac{BC}{AB} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

b, Tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính CH.

Suy ra $IE = IC = \frac{1}{2}CH \Rightarrow IEC = ICE(1)$. Ta cũng có $MEB = MBE(2)$. Từ (1) và (2) ta suy ra $IEF + OEB = IFE + OBE = 90^0 \Rightarrow IEM = 90^0$ hay ME là tiếp tuyến của (I), tương tự MF cũng là tiếp tuyến của (I).

c) Để ý rằng $MK.MC = ME^2 = MN.MI$ nên ICKN là tứ giác nội tiếp.
Từ đó ta có thể biến đổi góc như sau: $MNK = ICK = NIC$ hay NE là phân giác của CNK
Từ đó ta có $CNE = \frac{1}{2}CNK = \frac{1}{2}CIK = CFK \Rightarrow \Delta CNE \backsim \Delta CFK(g.g) \Rightarrow NCB = FCK = KFM$ (3)
Ta cũng có: $CKF = CEF = CBA = CAB$, KFAM nội tiếp.
Từ đó suy ra $KFM = KAB$ (4)
Từ (3), (4)$\Rightarrow BCN = BAK$

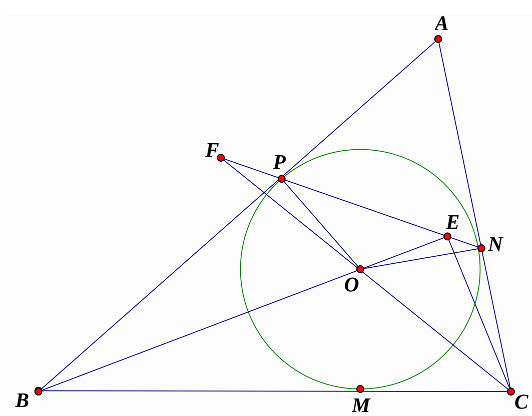
Bài 14 ***(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm 2013 – TP Hà Nội)***
Cho ΔABC không cân. Đường tròn (O) tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Đường thẳng NP cắt BO, CO lần lượt tại E, F.
a) Chứng minh rằng OEN và OCA bằng nhau hoặc bù nhau
b) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn
c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOEF. Chứng minh O, M, K thẳng hàng

Giải

a) Trường hợp 1: E nằm trong đoạn PN

Ta có $EOC = OBC + OCB = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} = ANP$

Nên OENC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow OEN = OCA$



b) Trường hợp 2: E nằm ngoài đoạn PN
Chứng minh tương tự câu a)
ta có BPFO là tứ giác nội tiếp

Từ đó suyu ra $\widehat{OEC} = \widehat{ONC} = 90^0; \widehat{OFC} = \widehat{OPB} = 90^0$

Nên $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Hay 4 điểm B, F, E, C nằm trên đường tròn đường kính BC

c) Gọi D là giao điểm của BF và CE suy ra O là trực tâm của ΔDBC nên D, O, M thẳng hàng

Ta cũng có D,E,O,F nằm trên đường tròn đường kính DO nên K là trung điểm của DO $\Rightarrow$ D,K,O,M thẳng hàng

Bài 15 ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin – TP Hà Nội 2014)***

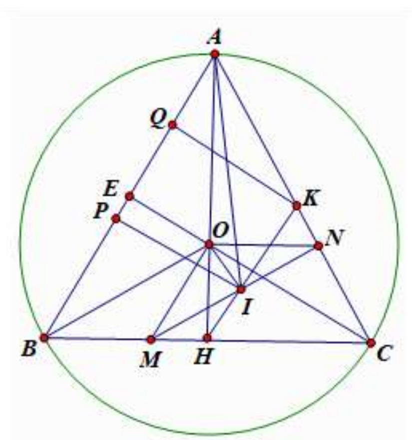
Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O; R), H là trung điểm của BC. M là điểm bất kỳ thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho CN = BM. Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh bốn điểm O,M,H,I cùng thuộc một đường tròn.

b) Xác đinh vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

c) Khi điểm M thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài, chứng minh diện tích ΔIAB không đổi.

Giải



a) Xét ΔBOM và ΔCON có: BM = CN (gt), OB = OC = R, $\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 30^0$ (do ΔABC đều)

$\Rightarrow$ ΔBOM = ΔCON (c.g.c) $\Rightarrow$ OM = ON hay ΔOMN cân tại O.

Do I là trung điểm của MN suy ra OI ⊥ MN

$\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{OHM} = 90^0$ nên tứ giác OMHI nội tiếp (có hai đỉnh liên tiếp H,I cùng nhìn OM dưới góc 90^0)

b) Ta có $180^0 = \widehat{OMB} + \widehat{OMC} = \widehat{OMB} + \widehat{ONC}$ $\Rightarrow$ Tứ giác OMNC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0) nên $\widehat{MON} = 180^0 - \widehat{NCM} = 120^0, \widehat{OMN} = \widehat{OBM} = 30^0$

Trong tam giác vuông OMI và OMH có: $IM = \frac{2OM}{\sqrt{3}} \geq \frac{2OH}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MN \geq \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng H.

c) Từ chứng minh ở câu a), b)

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OHI} = \widehat{OCN} = 30^0 \Rightarrow HI // AB$

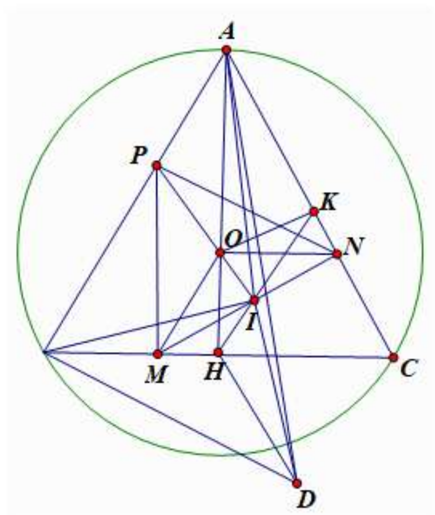
Gọi K là trung điểm của AC thì H,I,K thẳng hàng

Kẻ IP, CE, KQ lần lượt vuông góc với AB thì: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IP.AB = \frac{1}{2}KQ.AB = \frac{1}{4}CE.AB = \frac{\sqrt{3}}{8}AB^2$

không đổi. Suy ra *(đpcm)*

Bài 16. ***(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán năm 2014 – TP Hà Nội)***
Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O), H là trung điểm của BC. M là điểm bất kỳ thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho CN = BM. Gọi I là trung điểm của MN
a) Chứng minh bốn điểm O,M,H,I cùng thuộc một đường tròn
b) Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh ΔMNP là tam giác đều
c) Xác định vị trí điểm M để ΔIAB có chu vi nhỏ nhất.

Giải

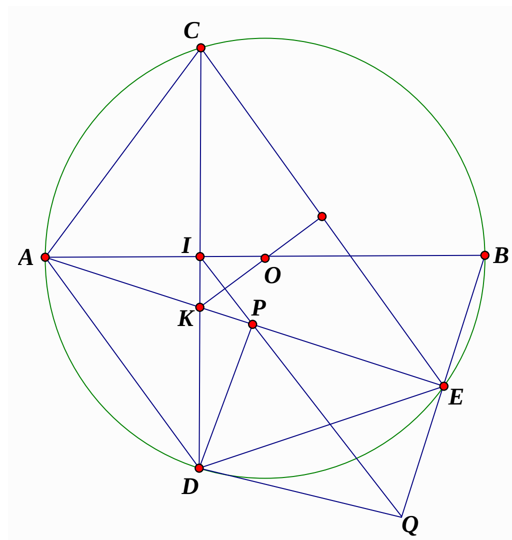


a) Như **bài 15**
b) Do điểm P nằm trên trung trực cạnh MN nên PM = PN (1)
Ta có $180^0 = OMB + OMC = OMB + ONC$
⇒Tứ giác OMNC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)
nên $MON = 180^0 - NCM = 120^0, POM = PON = 120^0 \Rightarrow POM + PBM = 180^0$
Suy ra tứ giác PBMO nội tiếp nên $OPM = OBM = 30^0$
Chứng minh tương tự ta có $OPN = OAN = 30^0 \Rightarrow MPN = 60^0 (2)$
Từ (1) và (2) suy ra ΔPMN là tam giác đều (đpcm)
c) Từ chứng minh ở câu a, b $\Rightarrow OMN = OHI = OCN = 30^0 \Rightarrow HI // AB$
Gọi K là trung điểm của AC thì H,I,K thẳng hàng
Tam giác IAB có AB không đổi nên chu vi tam giác nhỏ nhất khi IA + IB nhỏ nhất
Đường thẳng HI cố định. Gọi D là điểm đối xứng với B qua HI thì điểm D cố định, suy ra độ dài AD không đổi.
Ta có IB = ID suy ra IA + IB = IA + ID ≥ AD. Dấu "=" xảy ra ⇔ A,D,I thẳng hàng
Tức điểm I chính là giao điểm của AD và HK.

Mặt khác ta dễ dàng chưng minh được AHDK là hình bình hành. Nên dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của HK, khi đó điểm M trùng H.

Bài 17. ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin – TP Hà Nội 2015)***
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AO (I khác A, O). Đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại các điểm C và D. Gọi E là điểm trên đường tròn (O) sao cho D là điểm chính giữa của cung AE. Gọi K là giao điểm của AE và CD.
a) Chứng minh: OK đi qua trung điểm của CE .
b) Đường thẳng qua I song song với CE cắt AE, BE lần lượt tại P, Q. Chứng minh: DPEQ là hình chữ nhật.
c) Tìm vị trí điểm I trên đoạn thẳng AO sao cho KC = KA + KO.

Giải



a) Từ giả thiết suy ra AC = AD = DC
$\Rightarrow$ CADE là hình thang cân có hai đáy là AD, CE
Do K là gia điểm của hai đường chéo
nên K nằm trên trung trực của CE $\Rightarrow$KO $\perp$ CE
Nói cách khác KO đi qua trung điểm của CE

b) Do AB là đường kính của (O) nên $AEB = AEQ =$
Tứ giác IPDA có $IPA = EPQ = AEC = ADI$
nên IPDA là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow APD = 90^0$
Từ đó suy ra O,P,D thẳng hàng, IPDA là hình tha
và PD // CE.
Tứ giác DPEQ có $DEQ = PDE = PDA = DPQ$
nên DPEQ là tứ giác nội tiếp
Kết hợp $DPE = AEQ = 90^0$ suy ra DPEQ là hình chữ nhật (đpcm)

c) Xét tứ giác COKA có: $COA = sd\,AC = \frac{1}{2}(sd\,AC + sd\,DE) = CKA$. Từ đó suy ra COKA là tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lí Ptolemy ta có: KA.OC+AC.KO = CK.AO hay

$KA + \frac{AC}{AO}.KO = CK$

Như vậy để KC = KA + KO thì điều kiện là $\frac{AC}{AO} = 1 \Leftrightarrow AC = AO$ hay ACO là tam giác đều

Suy ra I phải là trung điểm của AO.

Bài 18 ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2015)***
Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (Q khác B, C). Gọi E, F theo thứ tự là là điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng AB và AC.
a) Chứng minh MH.MA = MP.MN.

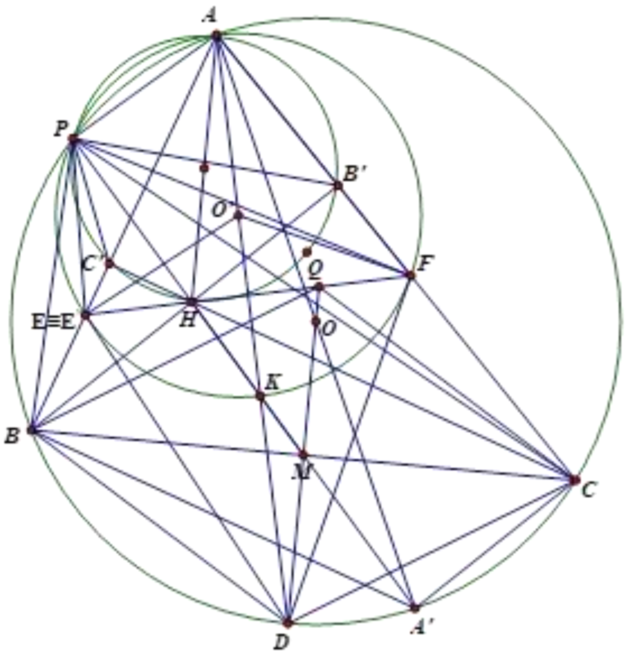
b) Chứng minh 3 điểm E, H, F thẳng hàng.
c) Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của điểm Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Giải

a) Xét tam giác MHP và tam giác MNA ta có:
APMC, MHCN nội tiếp nên $AMP = ACP = NMH, MPH = HAN$ nên
$\Delta MHP \backsim \Delta MNA \Rightarrow \frac{MH}{MN}=\frac{MP}{MA}$ hay MH.MA = MN.MP
b) Dựng QK ⊥ BC ta có các tứ giác: JBKQ, QKIC, ABQC nội tiếp nên ta có:
$JKQ = JBQ = ACQ = 180^0 - QKI$ hay $QKI = 180^0$ nên J, K, I thẳng hàng
Giả sử tia CH, BH cắt (O) tại giao điểm thứ hai là R, S thì $RAB = RCB = HAB$
tương tự $RBA = HBA$ nên suy ra H đối xứng với R qua AB. Tương tự H đối xứng với S qua AC
Ta có tứ giác ERHQ là hình thang cân và CRBQ, KBJQ nội tiếp nên
$HEQ = HRQ = CBQ = KJQ$ Nên suy ra HE//KJ. Chứng minh tương tự ta có: HF//KI
Mà I,K,J thẳng hàng nên suy ra E,F,H thẳng hàng
c) Trên BC lấy điểm T sao cho $QCT = QBA \Rightarrow \Delta QBA \backsim \Delta QCT$
Do QJ, QK là các đường cao tương ứng nên suy ra $\frac{AB}{QJ}=\frac{TC}{QK}$ (1)
Tương tự $\Delta BQT \backsim \Delta AQC \Rightarrow \frac{AC}{QI}=\frac{TB}{QK}$(2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{TC}{QK}+\frac{TB}{QK}=\frac{BC}{QK} \Rightarrow \frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QJ}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{BC}{QK}$ nhor nhất hay QK lớn nhất suy ra Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC

Bài 19: ***(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Tin – TP Hà Nội 2016)***
Cho ΔABC nhọn có AB < AC và nội tiếp (O). Các đường cao BB' và CC' cắt nhau tại H. Gọi M là trung đểm của BC, tia MH cắt (O) tại điểm P.
a) Chứng minh: $\Delta BPC' \backsim \Delta CPB'$
b, Các đường phân giác của BPC', CPB' lần lượt cắt AB, AC tại E, F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, K là giao điểm của HM và AO'.
+ Chứng minh : $PEKF$ nội tiếp.
+ Chứng minh các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nàm trên (O).

Lời giải



a) Gọi *A'* là điểm đối xứng của *A* qua *O*, khi đó $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow P, H, A', M$ thẳng hàng. Suy ra $APH = 90^0$. Vậy A, P, C', H, B cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

Ta có $AB'P = AC'P = PB'C$ và $PBC' = PBA = PCA = PCB'$.

Vậy $\Delta BPC' \# \Delta CPB'$ (g.g) (1)

b) + Chứng minh : $PEKF$ nội tiếp.

Vì PE là tia phân giác của $BPC' \Rightarrow \dfrac{EB}{EC'} = \dfrac{PB}{PC'}$.

Tương tự ta có $\dfrac{FC}{FB'} = \dfrac{PC}{PB'}$ mà $\dfrac{PB}{PC'} = \dfrac{PC}{PB'}$ (theo (1)).

Từ đó suy ra $\dfrac{EB}{EC'} = \dfrac{FC}{FB'}$ (2).

mặt khác, $\Delta BHC \# \Delta CHB'$ (3).

Từ (2) và (3) ta có E, H, F thẳng hàng và theo (1) ta có $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{BC'}{CB'} = \dfrac{HE}{HF}$ $\Rightarrow PH$ là tia phân giác của EPF.

Vậy PH đi qua điểm chính giữa của cung EF không chứa *A*.

Lại có ΔAEF cân tại *A* suy ra phân giác AO' đi qua điểm chính giữa của cung EF không chứa *A*. Như vậy giao điểm *K* của AO' và PH thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Vậy tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

+ Gọi *D* là điểm chính giữa của cung BC không chứa *A* của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Q là điểm đối xứng của *D* qua BC nên $BHQC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $HBQ = HCQ$. Gọi *E'* là giao điểm của HQ và AB, khi đó $BHE' = QCB$. Ta lại có:

$QHC = QBC$, $QHC = E'HC'$, $QBC = QCB \Rightarrow BHE' = C'HE'$

$\Rightarrow HE'$ là phân giác của BHC'

$\Rightarrow E' \equiv E$, vậy $Q \in EF$.

Ta có DQ là phân giác của BDC nên $QDB = \dfrac{180^0 - A}{2} = AEF$ suy ra tứ giác $BDQE$ nội tiếp. Ta có $BED = BQD = \dfrac{180^0 - A}{2} = 90^0 - \dfrac{A}{2} \Rightarrow AEO' + BED = 90^0 \Rightarrow O'E \perp DE$ hay DE là tiếp tuyến của (O').

Chứng minh tương tự, DF là tiếp tuyến của (O'). Tức là các tiếp tuyến của (O') tại *E* và *F* cắt nhau tại *D* nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Nhận xét : Đây là bài toán khó nhất trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán từ trước đến nay. Bài toán này là bài tương tự của đề thi VMO 2016, một bài toán khác cũng từng xuất hiện trên báo THTT.

Bài toán

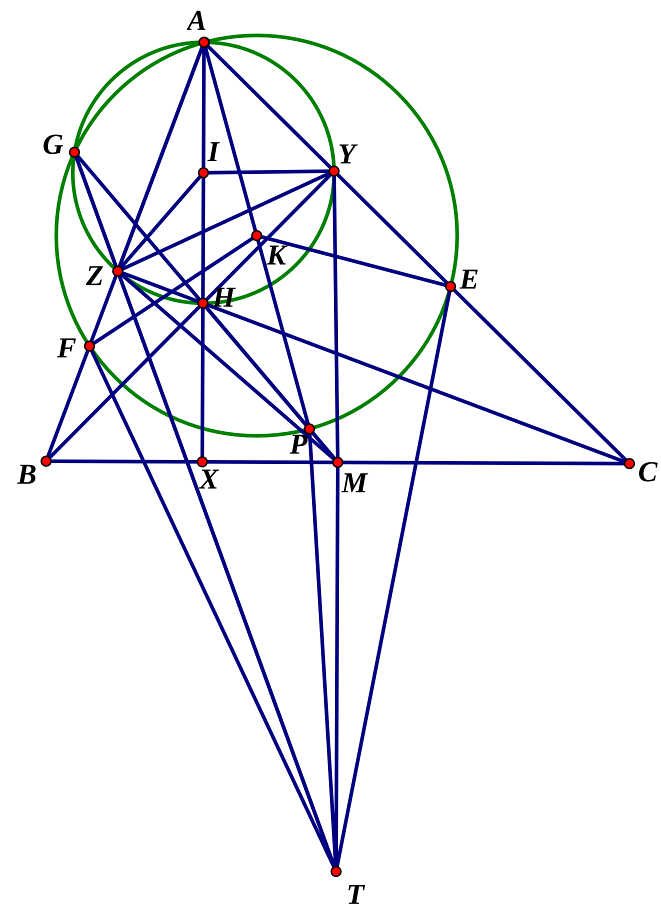
Cho ΔABC có ba đường cao là AX, BY, CZ cắt nhau tại điểm H, M là trung điểm của BC, P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại điểm G khác A.

a, Chứng minh: P, H, G thẳng hàng.

b, Chứng minh tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên đường trung trực của BC.

Phân tích định hướng giải

Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AZY có đường kính là AH nên $HG \perp GA$, mặt khác $PG \perp GA$ nên P, H, G thẳng hàng.



Xét ΔGYE và ΔGZF ta có:

$YEG = ZFG$ (cùng chắn cung GA)

$GYE = GZF$ (cùng bù với $AYG = AZG$).

Do đó $\Delta GYE \backsim \Delta GZF$ (g.g)

Xét ΔGYZ và ΔGEF ta có:

$GYZ = GAZ \equiv GAF = GEF$

$ZGY = ZAY \equiv FAE = FGE$

Suy ra $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$ (g.g)

Do $MYB = MBY = YAH$, $MZH = MCZ = ZAH$ suy ra M là giao điểm của các tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ.

Tương tự ta cũng có T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Ta có $GFT = GFE + EFT = 180^0 - GAY + FAE$

$= 180^0 - \left(GAY - FAE\right) = 180^0 - GAZ$

và $GZM = GZH + HZM$

$= 180^0 - GAH + HAZ = 180^0 - GAZ$ nên

$GFT = GZM$ mặt khác cũng từ $\Delta MYZ \backsim \Delta TFE$ và

$\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$ ta suy ra $\frac{TF}{ZM} = \frac{EF}{ZY} = \frac{GF}{GZ}$ hay $\Delta GFT \backsim \Delta GZM$ suy ra $\Delta GZF \backsim \Delta GMT$ suy ra $GMT = GZF = 180^0 - GZA = 180^0 - GHA = AHP$ hay $TM // AH \perp BC$.

Bài 20

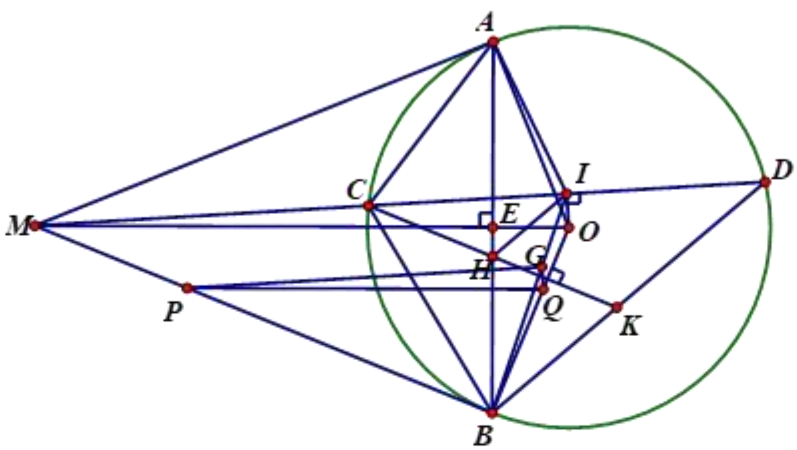
Từ điểm M cố định ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn $MC < MD$, tia MC nằm giữa tia MA, MO. Gọi I là trung điểm của CD.

a, Giả sử CD cắt AB tại N. Chứng minh: $BMD = IAB$ và $\dfrac{NA.IB}{IA.NB} = 1$.

b, Đường thẳng qua C song song với MB cắt AB, BD lần lượt tại H, K. Chứng minh: H là trung điểm của CK.

c, Giả sử M cố định, (O) không đổi và cát tuyến MCD thay đổi. Chứng minh: Trọng tâm G của tam giác BCD nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



a, Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $MAO = MBO = 90^0$ nên các điểm M, A, O, B nằm trên đường tròn đường kính MO. Do I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$ suy ra điểm I nằm trên đường tròn đường kính MO. Như vậy năm điểm M, A, O, I, B nằm trên đường tròn đường kính MO do đó $BMD = IAB$ (góc nội tiếp chắn cung IB).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MA = MB \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra $AIM = BIM$ (tính chất các góc nội tiếp một đường tròn chắn cung bằng nhau). Từ đó suy ra MI là phân giác của AIB.

Xét ΔIAB ta có: IN là phân giác trong của AIB suy ra $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{NA}{NB} \Leftrightarrow \dfrac{IA}{IB}.\dfrac{NB}{NA} = 1$.

b, Vì $CH // MB$ nên $BMI = HCI$ (đồng vị). Mặt khác $BMI = HAI$ (cùng chắn cung BI của tứ giác nội tiếp $MAIB$). Từ đó suy ra $HAI = HCI$ suy ra tứ giác $ACHI$ nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh HI góc bằng nhau). Từ đó suy ra $CAH = CIH$ (cùng chắn cung CH). Mà $CAH = CDB \Rightarrow CIH = CDB$ hay $HI // BD$ mà I là trung điểm của CD suy ra H là trung điểm của CK.

c, Qua G kẻ các đường thẳng song song với IO, MD cắt OB, MB lần lượt tại Q, R.

Ta có các điểm B, O, M cố định và $\dfrac{BQ}{BO} = \dfrac{BG}{BI} = \dfrac{BP}{BM} = \dfrac{PQ}{MO} = \dfrac{2}{3}$, suy ra P, Q cố định và $PGQ = 90^0$. Suy ra G thuộc đường tròn đường kính $PQ = \dfrac{2}{3}MO$.

Bài 21

Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1, Chứng minh $ABCD$ là hình chữ nhật

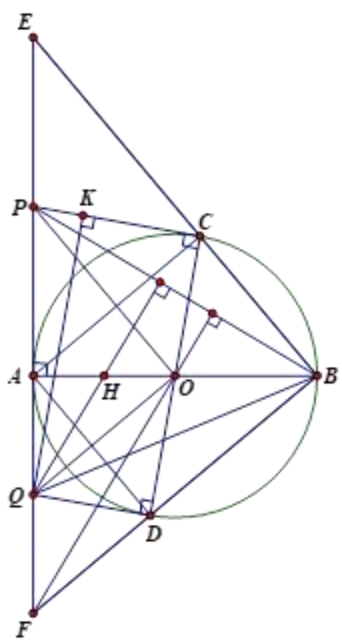
2, Chứng minh CP, DQ là các là các tiếp tuyến của (O) và $\Delta ABE \backsim \Delta BFB$

3, Chứng minh tứ giác $ECDF$ là tứ giác nội tiếp.

4, Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ. Chứng minh H là trung điểm của OA.

5, Tìm vị trú điểm C trên (O) để diện tích tam giác BPQ lớn nhất.

Giải



1, Vì AB, CD là các đường kính của (O) nên $ACBD$ là hình bình hành. Mặt khác $ACB = 90^0$. Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật. (cũng có thể lập luận: Tứ giác $ACBD$ có 4 góc vuông nên $ACBD$ là hình chữ nhật)

2, Do tam giác ECA vuông tại C và P là trung điểm của EA $\Rightarrow PA = PE = PC$. (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)

Từ đó suy ra $\Delta PAO = \Delta PCO$ (c.c.c) nên $PCO = PAO = 90^0$ hay PC là tiếp tuyến của (O).

Tương tự ta có QD là tiếp tuyến của (O).

Xét $\Delta vABE$ và $\Delta vAFB$ ta có: $AEB = ABF$

(cùng phụ với góc EBA) suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta BFB$(g.g)

3, Xét tứ giác $ECDF$ ta có $BCD = BED$ (cùng chắn cung AD của tứ giác nội tiếp $ACBD$)

Mà $BAD = DFE$ (cùng phụ với DAF). Từ đó suy ra $BCD = DFE$ nên tứ giác $ECDF$ nội tiếp (góc ngoài đỉnh C bằng góc trong đối diện của đỉnh C).

4, Vì PC, PA là các tiếp tuyến của (O) nên $PO \perp AC$, do $AC // BD$ $\Rightarrow PO \perp BD$, mặt khác $BO \perp PF$ suy ra O là trực tâm của tam giác PBF $\Rightarrow PO \perp PB$. Do H là trực tâm của tam giác PBQ $\Rightarrow QH \perp PB$ từ đó suy ra $QH // FO \Rightarrow H$ là trung điểm của AO

Ta cũng có thể chứng minh bằng cách khác. Họi H là trung điểm của OA, ta chứng minh H là trực tâm của tam giác PBQ

Dễ chứng minh được: $\Delta ABE \backsim \Delta AFB \backsim \Delta AQO$ suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{AQ}{AO} \Leftrightarrow \frac{AB}{2AP} = \frac{AQ}{2AH} \Leftrightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AQ}{AH}$

$\Rightarrow \Delta ABP \backsim \Delta AQH \Rightarrow QH \perp PB$, hay H là trực tâm của tam giác PBQ.

5, Ta có $S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = R.PQ$. Suy ra S_{PBQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi PQ nhỏ nhất. Dựng $QK \perp CP$ $\Rightarrow QKCD$ là hình chữ nhật nên $QK = CD = 2R$. Trong tam giác vuông PQK thì

$PQ \ge QK = 2R \Rightarrow S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = R.PQ \ge 2R^2$. Vậy diện tích tam giác PBQ nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi và chỉ khi $P \equiv K \Leftrightarrow CD // PQ \Leftrightarrow CD \perp AB$.

Cũng có thể luật luận bằng cách khác: $S_{PBQ} = \frac{1}{2}BA.PQ = \frac{1}{2}R.2PQ = \frac{1}{2}R.EF = \frac{1}{2}R(AE + AF)$.

Chú ý rằng: $AE.AF = BA^2 = 4R^2$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $AE + AF \ge 2\sqrt{AE.AF} = 4R$.
Suy ra $S_{PBQ} \ge 2R^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$AE = AF = 2R \Leftrightarrow AP = AQ = R \Leftrightarrow APCO$ là hình vuông. Suy ra $CD \perp AB$.

Bài 22

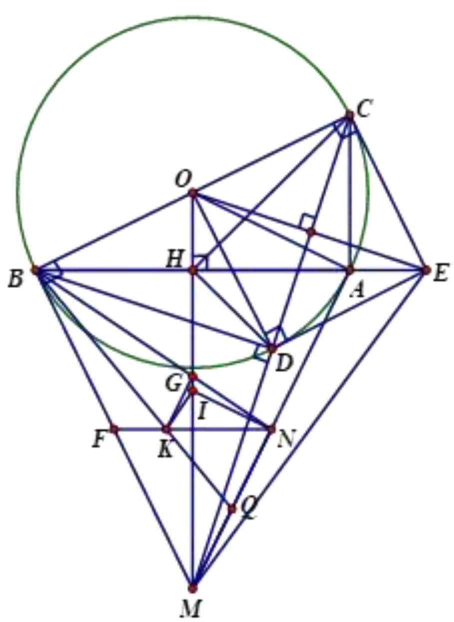
Cho đường tròn tâm O đường kính BC, điểm A nằm trên (O), $(A \ne B, C)$. Các tiếp tuyến tại B, A của (O) cắt nhau tại điểm M, MC cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D. Gọi H là trung điểm AB, N là trung điểm của AM. I, K lần lượt là tâm vòng tròn ngoại tiếp, trọng tâm các tam giác MAB, MNB.

a, Chứng minh: $BHDM$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh: $OHDE$ là tứ giác nội tiếp.

c, Chứng minh: $IK \perp BN$.

Giải



a, Vì điểm D nằm trên đường tròn đường kính BC nên $BDC = 90^0 \Rightarrow BDM = 90^0, BHM = 90^0$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra $BDM = BHM = 90^0$. Vậy tứ giác $BHDM$ nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp H, D cùng nhìn BM một góc vuông).

b, Xét tam giác OBM và tam giác BCE.

Ta có: $OBM = BCE = 90^0, OMB = CBE$ (cùng phụ với ABM). Từ đó suy ra $\Delta OBM \backsim \Delta BCE$ (g.g) suy ra $\frac{OB}{BM} = \frac{CE}{CB} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}CB}{BM} = \frac{CE}{2CO}$ hay $\frac{CB}{BM} = \frac{CE}{CO} \Rightarrow \Delta CBM \backsim \Delta OCE$ (c.g.c), suy ra $OCD + COE = OCD + CMB = 90^0$ hay $OE \perp CM$ tại trung điểm của CD do đó $\Delta OCE \backsim \Delta ODE$ (c.c.c) $\Rightarrow OCE = ODE = 90^0$ vậy ED là tiếp tuyến của (O).

Vì $OCE = ODE = OHE = 90^0$ nên 5 điểm O, C, E, D, H nằm trên đường tròn đường kính OE. Hay $OHDE$ là tứ giác nội tiếp.

c, Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABM nên I nằm trên đường cao AH của tam giác MAB và $IN \perp AM$. Gọi Q, F lần lượt là trung điểm MN, MB, G là trọng tâm tam giác MAB thì $\frac{BG}{BN} = \frac{BK}{BQ} = \frac{2}{3}$ theo định lý Thales đảo ta suy ra $GK \,//\, AM \Rightarrow IN \perp GK$. Mặt khác tam giác MAB cân tại M nên $GI \perp NF \Leftrightarrow GI \perp NK$. Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác GKN do đó $IK \perp BN$.

Bài 23. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. EF là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho E thuộc cung AF và $EF = \frac{AB}{2}$. Gọi H là giao điểm của AF, BE, C là giao điểm của AE, BF, I là giao điểm của CH, AB.

a, Chứng minh 4 điểm A, C, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

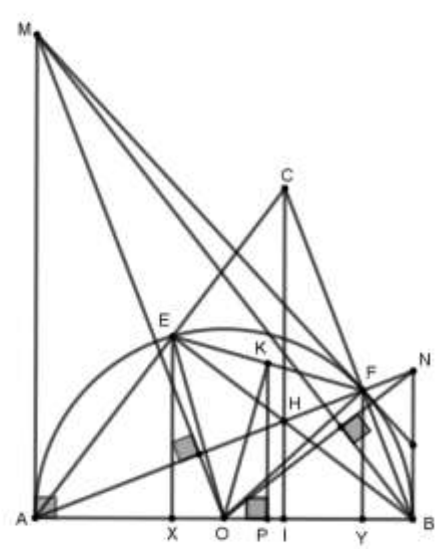
b, Chứng minh: $AE.AC + BF.BC$ có giá trị không đổi khi EF di chuyển trên nửa đường tròn (O).

c, Đường thẳng AF cắt tiếp tuyến tại B ở N, các tiếp tuyến tại A, F của (O) cắt nhau ở M. Chứng minh: $ON \perp MB$.

d, Xác định vị trí EF trên nửa đường tròn để tứ giác $ABEF$ có diện tích lớn nhất.

Giải:

a, Vì các điểm E, F nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $AEB = AFB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).



Do C là giao điểm của AE, BF suy ra $BE \perp AC, AF \perp BC$ suy ra BE, AF cắt nhau tại điểm H là trực tâm tam giác CAB suy ra $CI \perp AB$.

Tứ giác $ACFI$ có $AFC = AIC = 90^0$ suy ra tứ giác $ACFI$ là tứ giác nội tiếp (Hai đỉnh liên tiếp F, I cùng nhìn AC góc 90^0).

b, Xét tam giác vuông ACI và tam giác vuông ABE ta có $AIC = AEB = 90^0, CAB$ chung.

Suy ra $\Delta ACI \backsim \Delta ABE$ do đó: $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AC.AE = AI.AB$

Tương tự ta cũng có: $BC.BF = BI.AB$. Cộng hai đẳng thức ta có:
$AE.AC + BF.BC = AB(AI + BI) = AB^2 = 4R^2$.

c, Xét tam giác MAO và tam giác ABN. Ta có: $OAM = NBA = 90^0, OMA = BAN$ (cùng phụ với NAM). Từ đó suy ra $\Delta MAO \backsim \Delta ABN$ (g.g) suy ra $\frac{MA}{AO} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow \frac{MA}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2OB}{BN}$ hay

$\frac{MA}{AB} = \frac{OB}{BN} \Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta OBN$ (c.g.c), suy ra $NOB + MBA = BMA + MBA = 90^0$ hay
$ON \perp MB$.

d, Dễ thấy: Tam giác OMN là tam giác đều có cạnh $MN = R$. Gọi K là trung điểm của EF thì $OK \perp EF$. Từ đó ta tính được: $OK^2 = OE^2 - KE^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \Rightarrow OK = \frac{\sqrt{3}R}{2}$. Tam giác OMN có diện tích là: $S_1 = \frac{1}{2}OK.EF = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$. Dựng EX, FY lần lượt vuông góc với AB tại E, F thì tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông, dựng $KP \perp AB$ suy ra P là trung điểm XY nên KP là đường trung bình hình thang $EFYX$.

Kí hiệu S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác AOE, BOF thì

$S_2 = \frac{1}{2}OA.EX = \frac{1}{2}R.EX; S_3 = \frac{1}{2}OB.FY = \frac{1}{2}R.FY$. Ta có: $S_{AEFB} = S_1 + S_2 + S_3$ mà S_1 không đổi nên S_{AEFB} lớn nhất khi và chỉ khi $S_2 + S_3$ lớn nhất.

Ta có: $S_2 + S_3 = \frac{1}{2}R(EX + FY) = \frac{1}{2}R.2KP = R.KP$. Trong tam giác vuông OKP ta có:

$KP \le KO = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Suy ra $S_2 + S_3 \le \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv O \Leftrightarrow PK \perp EF \Leftrightarrow EF \,//\, AB$. Vậy GTLN của S_{AEFB} là $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ khi và chỉ khi $EF \,//\, AB$.

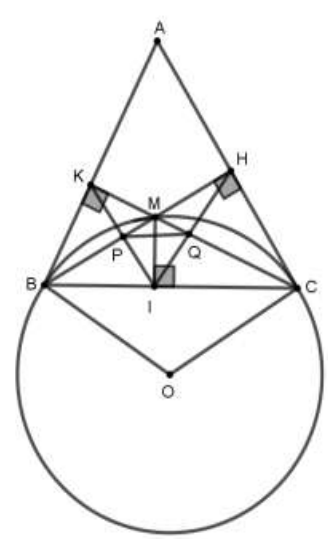
Bài 24. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) với B, C là các tiếp điểm. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống BC, CA, AB. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM và IK, CM và IH.

a, Chứng minh: Các tứ giác $BIMK, CIMH$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh: $MI^2 = MH.MK$.

c, Chứng minh: $IPMQ$ nội tiếp rồi suy ra $PQ \perp MI$.

d, Tìm vị trí điểm M để $MI.MH.MK$ đạt GTLN.



Giải:

a, Từ giả thiết ta có: $BKM = BIM = 90^0$ suy ra tứ giác $BKMI$ nội tiếp. Tương tự cho tứ giác $CIMH, AKMH$.

b, Vì tứ giác $BKMI$ nội tiếp nên: $MKI = MBI$ (cùng chắn cung MI). Mặt khác ta có: $MBI = MCH$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Nhưng $MCH = MIH$ (cùng chắn cung MH của tứ giác nội tiếp $MHCI$). Suy ra $MKI = MIH$

Hoàn toàn tương tự ta có: $MIK = MHI$ nên $\Delta MIK \backsim \Delta MHI$ (g.g)

Suy ra $\dfrac{MI}{MK} = \dfrac{MH}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MH.MK$.

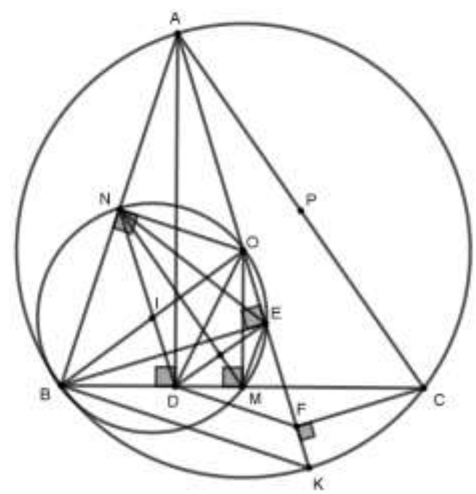
c, Ta có:

$PMQ + PIQ = BMC + PIM + QIM = BMC + MBA + MCA = BMC + MCB + MBC = 180^0$.

Do đó tứ giác $PIQM$ nội tiếp (Tổng hai góc đối nhau bằng 180^0).

Vì $PIQM$ nội tiếp suy ra $MPQ = MIQ = MKI = MBI$ suy ra $PQ \,//\, BC$ hay $MI \perp PQ$.

d, Từ chứng minh ở câu b) ta có $MI^2 = MH.MK \Rightarrow MI^3 = MI.MH.MK$. Suy ra $MI.MH.MK$ lớn nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất. Hay M là điểm chính giữa cung nhỏ BC không chứa A.



Bài 25. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O;R)$. Dựng đường cao AD của tam giác và đường kính AK của (O). Hạ BE, CF lần lượt vuông góc với AK.
a, Chứng minh: $ABDE, ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.
b, Chứng minh: $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ và $DF \perp AB$.
c, Cho BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Giải:

a, Vì $ABD = AEB = 90^0$ suy ra 4 điểm A, B, D, E nằm trên đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm N của AB.

$ADC = AFC = 90^0$ nên 4 điểm A, D, F, C nằm trên đường tròn đường kính AC có tâm là trung điểm P của AC.

b, Do tứ giác $ADFC$ nội tiếp nên: $DFA = DCA$ cùng chắn cung AD.

Ta có $DEF = 90^0 - BED = 90^0 - BAD = ABD$. Từ đó suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (g.g).

Ta có: $DFA = DCA = BKA \Rightarrow BK \,//\, DF$ mà $BK \perp AB \Rightarrow DF \perp AB$.

c, Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của BO thì $ON \perp AB, OM \perp BC$ suy ra 5 điểm N, O, E, M, B nằm trên đường tròn đường kính BO. Ta có:

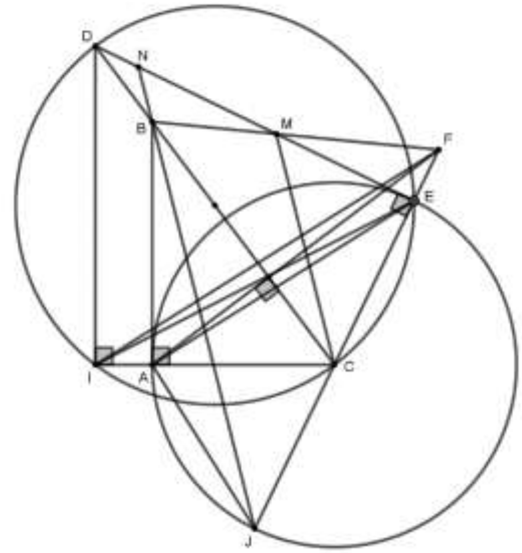
$MNE = MBE \equiv DBE = DAE = \dfrac{1}{2} DNE$ suy ra MN là tia phân giác của góc DNE. Tam giác DNE cân tại N suy ra MN cũng là trung trực của DE, tương tự ta cũng có MP là trung trực của DF. Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M cố định.

Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, D là điểm trên tia đối của tia $BC,$ kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn tâm C bán kính $CA(A, E$ ở khác phía nhau so với $BC)$. Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường thẳng CE tại F, đường thẳng BF cắt DE tại M, qua B kẻ đường thẳng song song với CM cắt DE tại N. Gọi J là giao điểm thứ 2 của đường tròn $(C;CA)$ với EC.

a, Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I. Chứng minh: $AIFE$ nội tiếp.

b, Tam giác CIF cân tại C.

c, Chứng minh: M là trung điểm của NE.



Giải:

a, Đường tròn đường kính DC cắt AC tại I nên $DIC = 90^0 \Rightarrow DECI$ nội tiếp. Suy ra

$EIC = EDC = 90^0 - ECD = CFA \Leftrightarrow AIE = AFE$

Hay tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

b, Do $CA = CE$ mà $CEA = CIF, CAE = CFI \Rightarrow AIF = AFI$ suy ra tam giác CIF cân tại C và $AE // IF$.

c, Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác BFC với cát tuyến DME ta có:

$$\frac{MB}{MF}.\frac{EF}{EC}.\frac{DC}{DB} = 1(*).$$

Mặt khác do $AE // IF$ nên ta có: $\frac{EF}{EC} = \frac{AI}{AC}$, do $AB // DI$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{IC}{IA}$ thay vào (*) ta có:

$$\frac{MB}{MF}.\frac{AI}{AC}.\frac{IC}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AC}{IC} = \frac{CJ}{CF} \Rightarrow BJ // CM$$ hay M là trung điểm của NE.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm M cố định.

Bài 27. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D, E là điểm trên cung BDC, điểm F trên cạnh BC thỏa mãn $BAF = CAE < \frac{1}{2}BAC$. Gọi G là trung điểm của IF. Đường thẳng EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P, đường thẳng AI cắt BC tại J, AF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K cắt DP tại Q.

a, Chứng minh: $APQI$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh: $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$.

c, Chứng minh: DG, EI cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải:

a, Do AD là phân giác trong góc A nên $BAD = CAD,$ vì $BAK = CDE \Rightarrow KAD = EAD,$ mặt khác $EAD = EPD$

$\Leftrightarrow EAD = EPD$ suy ra tứ giác $APQI$ nội tiếp.

b, Xét tam giác DCJ, DAC ta có: $DCJ = DAC,$

ADC chung nên $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ (g.g)

c) Giả sử PD cắt FI tại G'. Ta chứng minh $G' \equiv G$.

Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AIF về cát tuyến $QG'D$ ta có

$\frac{QA}{QF}.\frac{G'F}{G'I}.\frac{DI}{DA} = 1$ (*). Từ chứng minh câu a) ta có: $AQI = API = AKE$ suy ra $KE // QI$. Mặt khác cũng do $BAK = CDE$ suy ra $BK = CE$, $KAD = EAD \Rightarrow DK = DE,$ $BKEC$ là hình thang cân và $EK // BC$. Như vậy $QI // BC // KE$.

Theo định lý Thales ta có: $\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ},$ mặt khác I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác trong ta cũng có: $\frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ},$ do $\Delta DCJ \backsim \Delta DAC$ nên $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC}$ mà $DI = DC = DB$ (tính chất quen thuộc). Suy ra $\frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DI}$ như vậy

$\frac{QA}{QF} = \frac{IA}{IJ} = \frac{CA}{CJ} = \frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DI}$ suy ra $\frac{QA}{QF}.\frac{DI}{DA} = 1$

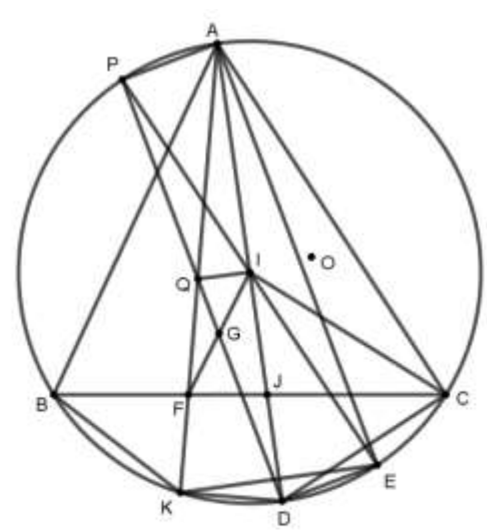
Thay vào (*) ta có: $\frac{G'F}{G'I} = 1 \Rightarrow G'$ là trung điểm IF hay $G' \equiv G$.

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường tròn tâm B bán kính BA và đường tròn tâm C bán kính CA cắt nhau tại D khác A, BC cắt (B) tại E, F (F nằm trong (C)) và cắt (C) tại M, N (M nằm trong (B)). Đường thẳng DM cắt AE tại P, DF cắt AN tại Q. Kéo dài DM cắt (B) tại I, DF cắt (C) tại H.

a, Chứng minh: $IB \perp EF$.

b, Chứng minh: tứ giác $APDQ$ nội tiếp và $PQ || EN$.

c, Chứng minh: $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{AB}{AC}$.



Giải

a) Ta có

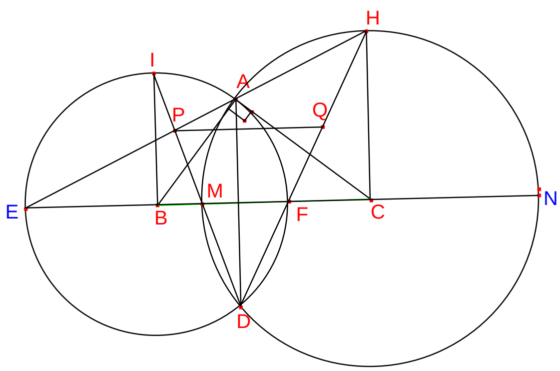
$AEN + ANE = \frac{1}{2}\left(ABF + ACM\right) = 45^{o}$.

Lại có $AEF = ADF, ANM = ADM$

Suy ra $IDH = MDA + FDA = 45^{o}$,

$IBF = IBA + ABF = 2\left(ADF + ADM\right) = 90^{o}$

Do đó $IB \perp EF$.



b) Từ a) suy ra tam giác IBF vuông cân tại B suy ra $IAF = 45^o$ suy ra I, A, N thẳng hàng.

Tương tự ta cũng có E, A, H thẳng hàng suy ra $EAN = 135^o \Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp suy ra $APQ = ADQ = AEF$ nên $PQ//EF$.

c) Áp dụng định lý Menelaus với tam giác PEM và cát tuyến IAN ta có: $\frac{IP}{IM}.\frac{NM}{NE}.\frac{AE}{AP} = 1$,

tương tự với tam giác QFN và cát tuyến HAE ta cũng có $\frac{HF}{HQ}.\frac{AQ}{AN}.\frac{EN}{EF} = 1$. Nhân hai đẳng thức với chú ý $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AN}$ suy ra $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{EF}{MN}$.

Cho tam giác nhọn ABC

Bài 29.

b. Từ a) suy ra tam giác IBF vuông cân tại B suy ra $IAE = 45°$ suy ra I, A, N thẳng hàng.
Tương tự ta cũng có: E, A, H thẳng hàng suy ra $EAN = 135°$ $\Rightarrow$ tứ giác $APDQ$ nội tiếp suy ra $APQ = ADQ = AEF$ nên $PQ // EF$.

c. Áp dụng định lý Menelaus với tam giác PEM và cát tuyến IAN ta có: $\frac{IP}{IM}.\frac{NM}{NE}.\frac{AE}{AP} = 1$,

tương tự với tam giác QFN và cát tuyến HAE ta cũng có: $\frac{HF}{HQ}.\frac{AQ}{AN}.\frac{EN}{EF} = 1$.

Nhân hai đẳng thức với chú ý: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AN}$ suy ra $\frac{IP}{IM}.\frac{HF}{HQ} = \frac{EF}{MN}$.

Bài 29

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có $AB < AC$. Gọi I là trung điểm của cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D $(D \neq B)$. Trên tia DI lấy điểm M sao cho $CM // AD$. Đường thẳng KM cắt BC tại điểm N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P $(P \neq B)$.

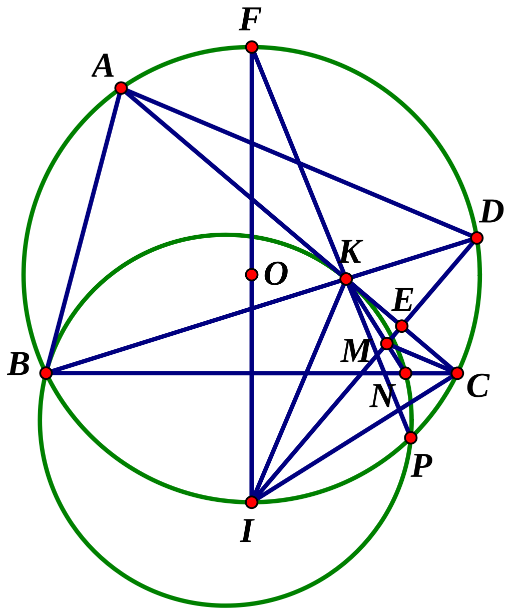
a. Chứng minh: K đối xứng với B qua AI.

b. Chứng minh: AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN .

c. Gọi E là giao điểm của DI và AC. Chứng minh: Tứ giác $EPIK$ nội tiếp.

d. Gọi F là giao điểm của PK và (O). Chứng minh: KF đi qua trung điểm của AD.

Lời giải



a. Ta có: $AKI = 180° - IKC = 180° - ACI = ABI$.

Từ đó suy ra $BIA = KIA \Rightarrow \Delta ABI = \Delta AKI$ (c.g.c)

Do đó $AB = AK$ hay K đối xứng với B qua AI.

b. Ta có: $DKI = 180^0 - BKI = 180^0 - DBI = DCI$.

Kết hợp với $BDI = CDI \Rightarrow KID = CID \Rightarrow \Delta IKD = \Delta ICD$.

Suy ra $DK = DC$ nên DI là đường trung trực của KC.

Do đó $MK = MC$.

Ta có: $CKN = KCM = DFP = KBP$ nên KC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.

c. Ta có $EKP = KBP = DIP = EIP$ suy ra tứ giác $EPIK$ nội tiếp.

d. Từ câu c) ta có: $KPI = KEI = 90°$ mà PK cắt (O) tại F suy ra IF là đường kính của (O).

Suy ra $AF \perp AI$, mặt khác $BD \perp AI$ suy ra $DB \,//\, AF \Leftrightarrow AF \,//\, KD$. Mặt khác FD, EK cùng vuông góc với AC nên $FD \,//\, KE$ suy ra tứ giác $AFDK$ là hình bình hành. Vậy FK đi qua trung điểm của AD.

Bài 30

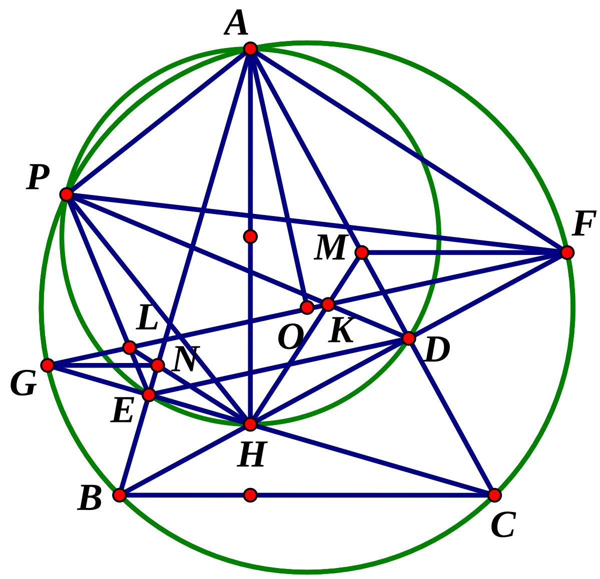
Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trực tâm là H. Các đường cao BD, CE cắt (O) tại giao điểm thứ hai là F, G. Dựng $FM \,//\, GN \,//\, BC$ $(M \in AC, N \in AB)$. Các đường thẳng HM, HN theo thứ tự cắt FG tại K, L. Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED với (O), P khác A.

a. Chứng minh: Tứ giác $HLPF$ nội tiếp.

b. Chứng minh: Các điểm P, L, E thẳng hàng.

c. Chứng minh: DK, EL cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

Lời giải



a. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AED có đường kính AH, ta cũng có các tính chất quen thuộc là G, F lần lượt đối xứng với H qua AB, AC.

Theo tính chất góc ngoài, ta có: $FLH = LGH + LHG = FBC + NGH$. Do $GN \,//\, BC$ nên $NGH = GCB = HCB$ suy ra $FLH = HBC + HCB = 180° - BHC = BAC = 90° - ABF = APH - APF = HPF$ suy ra tứ giác $HLPF$ nội tiếp.

b. Ta có: $LPH = LFH = GCB = BAH = EAH = EPH$ suy ra hai tia LP, EP trùng nhau. Hay E, L, P thẳng hàng.

c. Ta có: $GKH = KFH + KHF = GCB + MFH = HCB + HBC = BAC$,

$GPH = GPA - HPA = GPA - 90° = 180° - GBA - 90° = 90° - GBA = 90° - HBA = BAC$. Suy ra tứ giác $PKHG$ nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh được: P, K, D thẳng hàng. Suy ra DK, EL cắt nhau tại điểm P nằm trên (O).

Bài 31

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao BK, CL cắt nhau tại H. Các đường AH, BH, CH cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D, E, F. Lấy điểm M sao cho tam giác MFH và tam giác HBC đồng dạng (M, A nằm cùng phía so với KL) ML cắt (O) tại N (M, A, N nằm cùng phía so với KL) Kẻ $DP \,//\, KL$ $\left(P \in (O)\right)$.

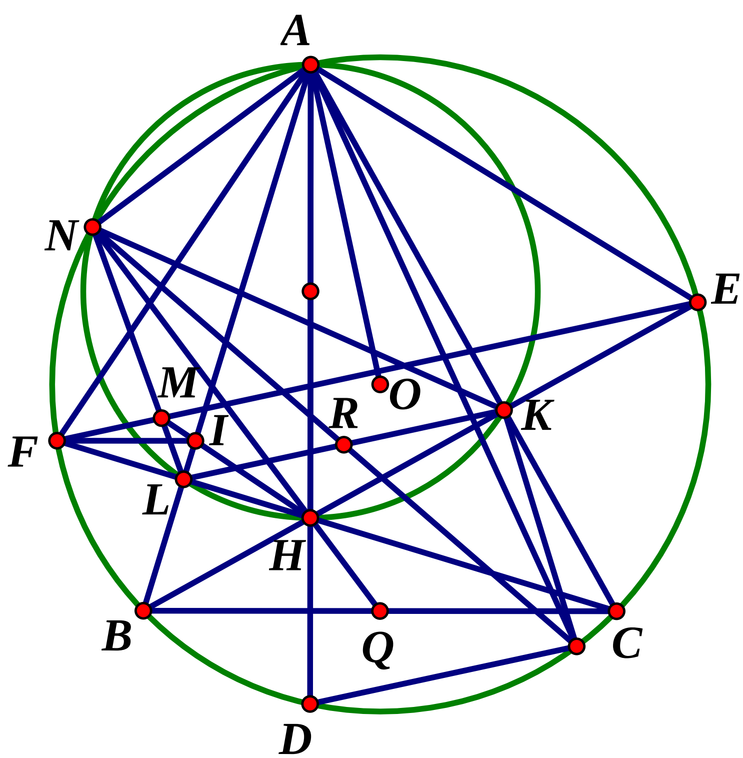
a. Chứng minh: $HM \perp AF$.

b. Chứng minh: Tứ giác $ANLK$ nội tiếp.

c. Giả sử NH cắt BC tại Q. Chứng minh: Q là trung điểm của BC và QK, QL là tiếp tuyến của (AKL).

d. Gọi R là trung điểm của KL. Chứng minh: N, R, P thẳng hàng.

Lời giải

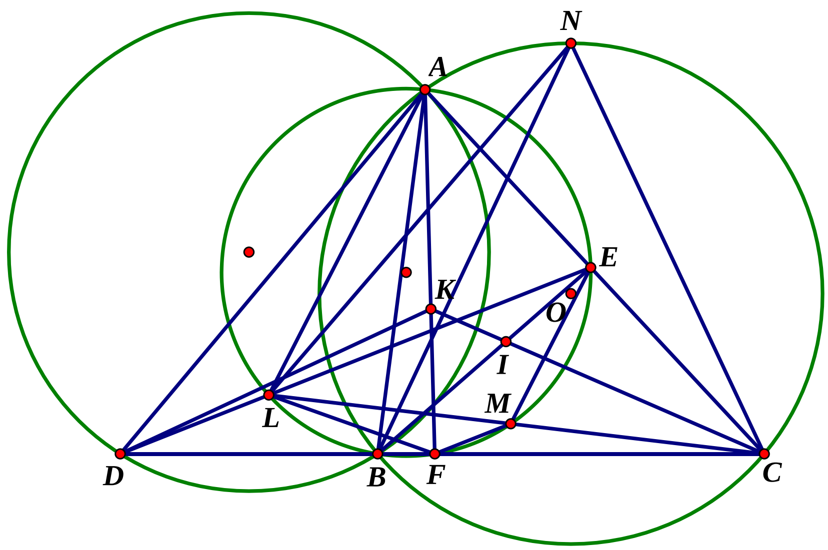


a. Ta có các tính chất quen thuộc: F đối xứng với H qua AB, $EF \,//\, LK$ và $\Delta HBC \backsim \Delta HLK$.
Vì $\Delta HBC \backsim \Delta MFH \Rightarrow MFH = HBC = HLK = LFE$ Suy ra $M \in EF$.
Ta có: $AFH + FHM = AHL + HCB = AHL + HAB = 90^\circ$ hay $HM \perp AF$.
b. Do 4 điểm A, L, K, H nằm trên đường tròn đường kính AH. Giả sử MH cắt AB tại I thì suy ra $FI \,//\, BC$. Gọi N' là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính AH thì
$HME = MFH + MHF = HBC + HCB = 180^\circ - BHC = BAC = 90^\circ - ABK = HN'A - AN'E = HN'E$. Suy ra tứ giác $HLN'E$ nội tiếp.
Ta có: $MN'H = MEH = FCB = BAH = EAH = LN'H$ suy ra hai tia LN', MN' trùng nhau. Hay L, M, N' thẳng hàng, suy ra $N \equiv N'$. Suy ra N nằm trên đường tròn đường kính AH, tức là tứ giác $ANLK$ nội tiếp.
c. Q là trung điểm của BC. Đây là tính chất quen thuộc (Kẻ đường kính AA'). Ngoài ra ta cũng có $OA \perp KL \Rightarrow OA \perp DP$ suy ra $AD = AP$, QK, QL là các tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.
d. Ta có: $ANR = ANK + KNR = ALK + LNH = ACB + BAD = ACD = ANP$ suy ra N, R, P thẳng hàng.

Bài 32
Cho tam giác ABC có đường phân giác trong là BE. Đường tròn qua A, B tiếp xúc với AC cắt BC tại D khác B. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC, EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L. Giả sử AK cắt BC tại F.
a. Chứng minh: Tứ giác $AEFB$ nội tiếp.
b. Giả sử CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại M khác L. Chứng minh: $\Delta CEM \backsim \Delta CLA$; $\Delta CBM \backsim \Delta CLF$ và LC là phân giác của góc BLE.

c. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC là điểm chính giữa cung BC chứa điểm A.

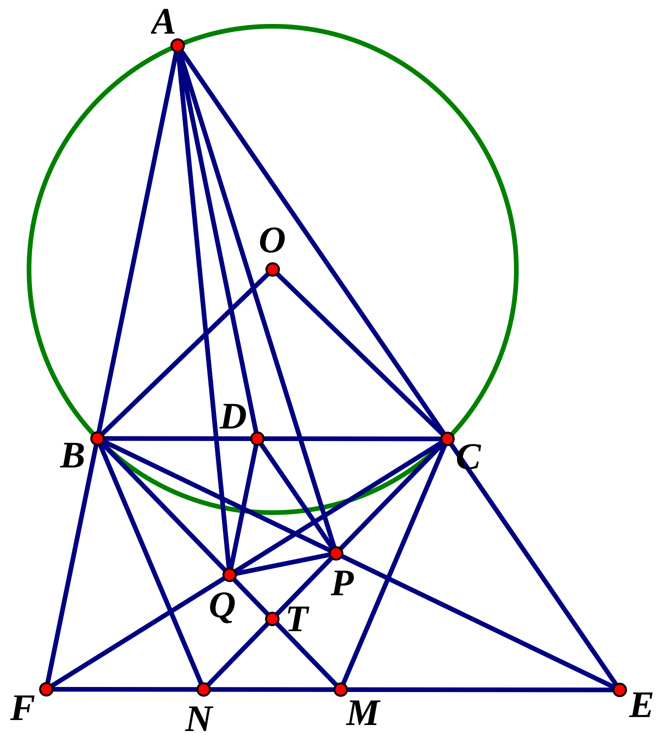
Lời giải



a. Ta có: $FAC = \frac{1}{2}DAC$, mặt khác do CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên
$CA^2 = CB.CD \Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CBA$ (c.g.c).
Suy ra $DAC = ABC = 2ABE$ nên $FAE = ABE$. Suy ra tứ giác $AEFB$ nội tiếp.
b. Do BE là phân giác của ABC nên E là điểm chính giữa cung AF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEFB$. Suy ra LE là phân giác của góc $ALF \Rightarrow \frac{LA}{LF} = \frac{KA}{KF} = \frac{CA}{CF}$.
Ta có: $\Delta CEM \backsim \Delta CLA$ (g.g), $\Delta CBM \backsim \Delta CLF$ (g.g) suy ra $\frac{ME}{MC} = \frac{LA}{CA} = \frac{LF}{CF} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow ME = MB$ hay LC là phân giác của góc BLE.
c. Gọi N là điểm chính giữa cung BC chứa A của (ABC) thì $NB = NC$, $BNC = BAC = 2BLC$ suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BLC.

Bài 33
Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB lần lượt tại E, F. BE giao CT tại P. CF giao BT tại Q. Dựng đường phân giác trong AD của tam giác ABC.
a. Chứng minh: $FBM = ACB$.
b. Chứng minh: $QD // BF$.
c. Chứng minh: $DP = DQ$ và $AP = AQ$.

Lời giải



a.Tam giác BTC, TMN cân tại T, suy ra MN // BC.

Xét tam giác ABC và tam giác MFB ta có: $ABC = BFM$ (đồng vị).

$BAC = MBC = BMF \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta MFB$ (g.g)

Suy ra $FBM = ACB$.

b. Do FM // BC ta có: $\frac{QC}{QF} = \frac{BC}{FM} = \frac{BM}{FM} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow QD$ // BF, tương tự ta có PD // CE.

Theo định lí Ta lét và tính chất tia phân giác ta có:

$\frac{DQ}{DB} = \frac{DB}{BF} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{DP} = \frac{CD}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BD} = 1 \Rightarrow DP = DQ$

Ta lại có $ADQ = ADB + BDQ = \frac{1}{2}BAC + ACB + ABC$, tương tự ta cũng có $ADP = \frac{1}{2}BAC + ACB + ABC$

Suy ra $\Delta ADQ = \Delta ADP \Rightarrow AP = AQ$

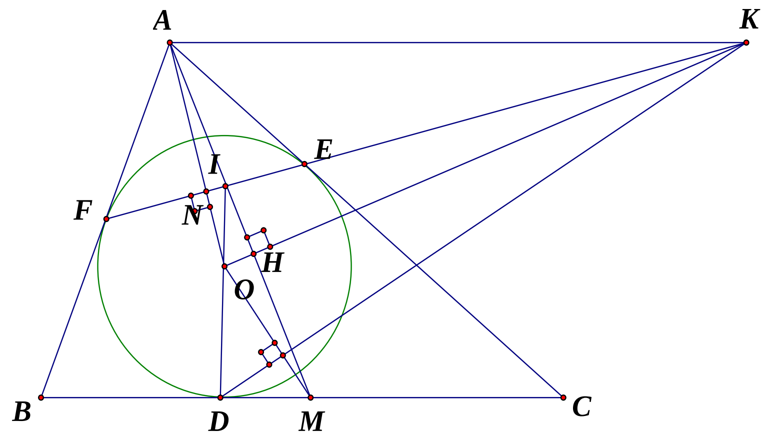
Bài 34

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại K. Gọi I là giao điểm của OD và EF. Gọi N là giao điểm của OA và EF.

Giả sử AI cắt OK tại H, chứng minh bốn điểm : A, N, H, K cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh $\Delta OHD \backsim \Delta ODK$ **và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK nằm trên một đường thẳng cố định**

Gọi M là giao điểm của AI và BC. Chứng minh OM $\perp$ **DK**



Giải

Vì AE, AF là các tiếp tiếp tuyến của (O) tại E, F nên $AO \perp EF$ **. Vì** $OI \perp OB$ **suy ra OI** $\perp$ **AK.**

Từ đó suy ra I là trực tâm của $\Delta AOK \Rightarrow$ **AI** $\perp$ **OK tại H, suy ra tứ giác ANHK nội tiếp**

Vì tứ giác ANHK nội tiếp nên OH.OK = ON.OK = OF^2= OD^2$\Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OK}$ **suy**

ra $\Delta OHD \backsim \Delta ODK$(c.g.c) **Từ đó suy ra** $ODH = OKD$ **nên OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HDK. Mà** $OD \perp BC$ **suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDK nằm trên đường thẳng cố định BC**

Tứ giác ODMH nội tiếp suy ra $ODH = OMH$ **,** $\Delta OHD \backsim \Delta ODK \Rightarrow ODH = OKD \Rightarrow OMH = OKD$ **mà** OMH **cùng phụ với** $MOH \Rightarrow OM \perp DK$

Bài 35

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Gọi K là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (O’) ngoại tiếp tam giác AEF. Gọi I là giao điểm thứ hai của AN với (O)

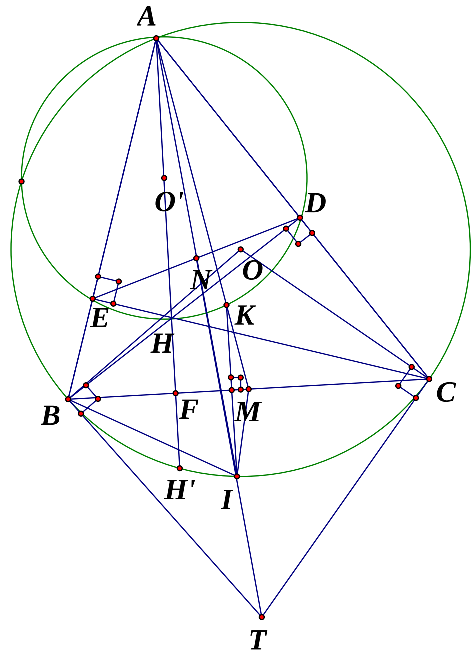
Chứng minh $NAE = MAC$

Chứng minh $\Delta MCK \backsim \Delta MAC$

Chứng minh: Tứ giác BHKC nội tiếp và K đối xứng với I qua BC.

d) Các tiếp tuyến tại B , C của (O) cắt nhau ở T. Chứng minh A, I, T thẳng hàng.

Giải



Do tứ giác BEDC nội tiếp nên $ADE = ABC$

Ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ADC(g.g)$, AN, AM là các trung tuyến tương ứng nên $\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow NAE = MAC$

Đường tròn (O') có đường kính AH nên $AKH = 90^0$, gọi F là giao điểm của AH với BC, Do các tứ giác HFMK, HFCD nội tiếp nên suy ra AH.AF= AK.AM= AD.AC, suy ra tứ giác MKDC nội tiếp nên $MKC = MDC = MCD$

do đó $\Delta MCK \backsim \Delta MAC(g.g)$

Ta có

$HKC = 360^0 - HKD - DKC = 180^0 + HAC - DMC$

$= 180^0 + DBC - 2DBC = 180^0 - DBC$

suy ra BHKC nội tiếp . Từ chứng minh câu b, a ta có: $KBC = MAC = NAB = ICB$. Tương tự ta cũng có $KBC = IBC$, suy ra K, I đối xứng nhau qua BC.

Giải sử AT cắt (O) tại giao điểm thứ hai là I' (khác A). Ta chứng minh $BAI' = MAC$. Thật vậy ta có: TI'.TA= TB2 = TM.TO, suy ra AOMI' là tứ giác nội tiếp, suy ra

$I'\text{MT} = OAI' = OI'A = OMA$ nên MB là tia phân giác của AMI'. Ta có

$MAC = 180^0 - AMB = 180^0 - \frac{1}{2}AMI'$

$= 180^0 - \frac{1}{2}AOI' = 180^0 - ACI' = ABI'$

suy ra $\Delta ABI' \backsim \Delta AMC$. Do đó $MAC = BAI'$ điều đó chứng tỏ I', A, N thẳng hàng . Suy ra $I \equiv I'$

Bài 36

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt DE, DF lần lượt tại M và N.

Chứng minh M, N, E, F cùng nằm trên một đường tròn

Chứng minh MF, NE cắt nhau tại một điểm K nằm trên (I)

Gọi AK cắt (I)tại điểm L khác K. Chứng minh L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.

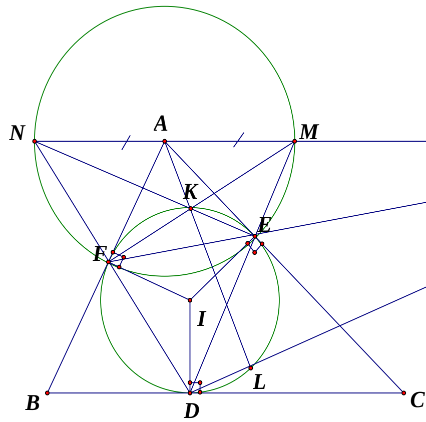
Giải

Ta có $MNF = FDB = DEF$ **suy ra tứ giác MNFE nội tiếp. Do đó** $ANF = FDB = NFA$ **neen tam giác NFA cân tại A, suy ra AN = AF. Tương tự AM = AE mà AE = AF, suy ra AM = AN = AE = AF. Nói cách khác 4 điểm M, N, F, E nằm trên đường tròn tâm A**

Suy ra $\widehat{NEM} = \widehat{NFM} = 90^0$ **suy ra tứ giác FKED nội tiếp**

Giải sử đường tròn (I) cắt đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác DMN tại điểm L, ta chưngs minh X, A, L thẳng hàng. Thật vậy kẻ đường kính DX của đường tròn (J). Ta dễ chứng minh đuoực tứ giác KMXL là hình bình hành suy ra X, A, K thẳng hàng (1)

Ta cũng có $\widehat{KLD} = \widehat{XLD} = 90^0 \Rightarrow$ **X, K, L thẳng hàng (2). Từ (1), (2) suy ra A,K, L thẳng hàng (đpcm).**



Bài 37

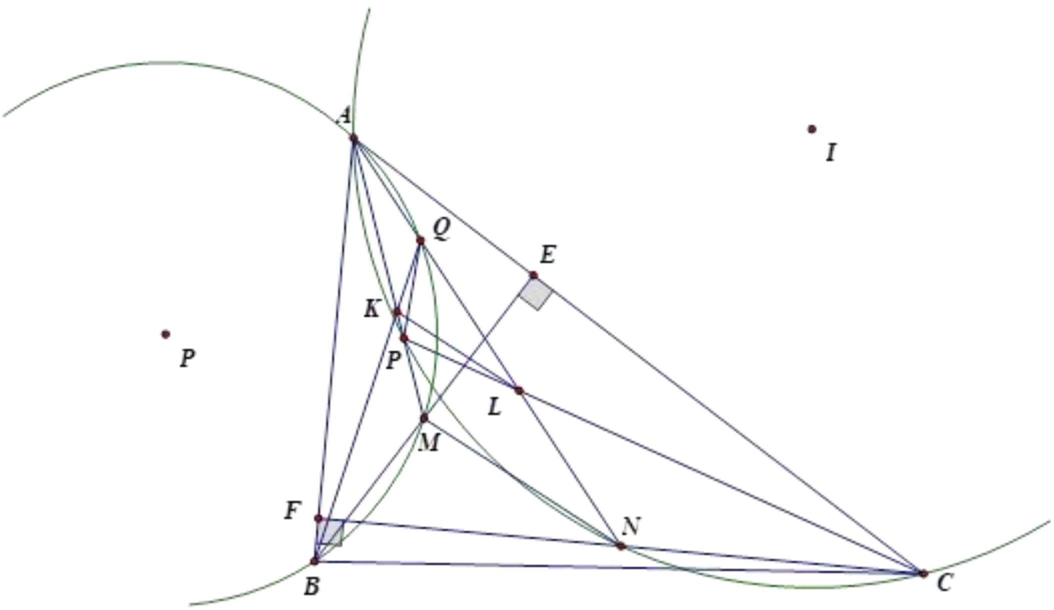
Cho tam giác ABC nhọn, không cân có hai đường cao là BE và CF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE và CF.

Chứng minh: $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$

Gọi AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC tại P khác A. Gọi AN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB tại Q khác A. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, P, Q nằm trên một đuường tròn.

Gọi BQ cắt AM tại K, CP cắt AN tại L. Chứng minh KL//MN

Giải



Ta có $\Delta ABE \backsim \Delta ACF \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} \Leftrightarrow \frac{AB}{2BM} = \frac{AC}{2CN} \Leftrightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$ **suy ra** $\Delta ABM \backsim \Delta ACN \Rightarrow MAB = NAC$

b) Ta có $APC = ANC = AMB = AQB, BAQ = CAP$ **suy ra** $\Delta APC \backsim \Delta AQB \Rightarrow ACP = ABQ$**.**

Lại có $ABQ = AMQ = ACP = ANP$ **suy ra tứ giác MNQP nội tiếp.**

c)Từ chứng minh trên ta có :

$ALP = LAC + LCA = KAB + KBA = AKB$ **suy ra** $\Delta APL \backsim \Delta AQK \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AL}{AK}(1)$**. Mặt khác do PQMN nội tiếp nên ta có AP.AM=AQ.AN** $\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AN}{AM}(2)$**. Từ (1) và (2) ta có** $\Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AL}{AN} \Leftrightarrow KL // MN$

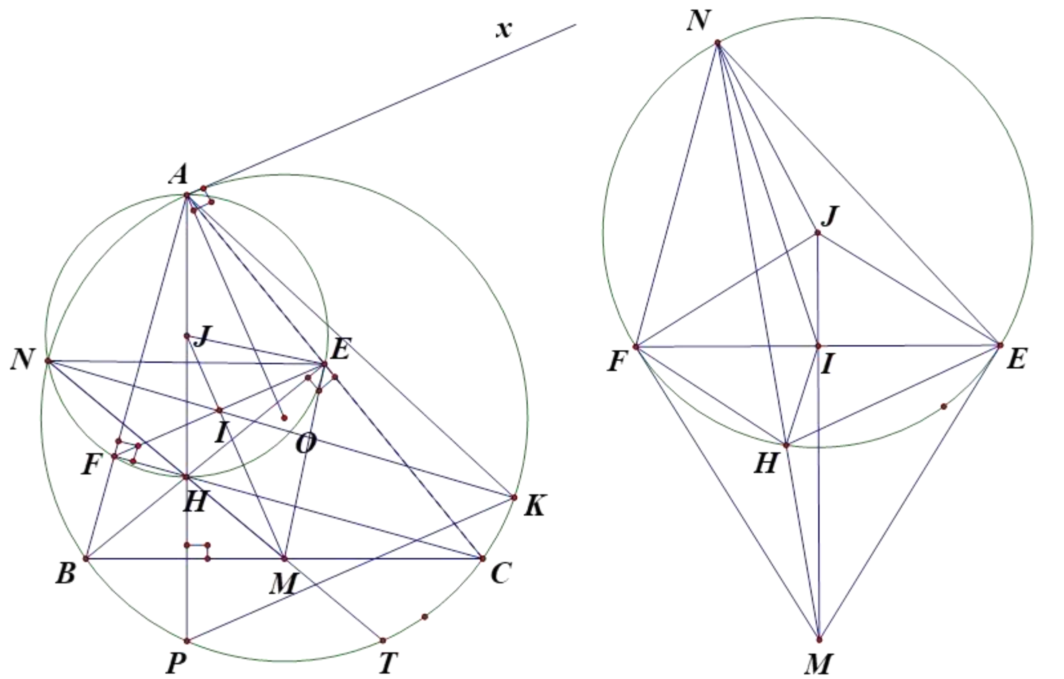
Bài 38

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao BE, CF cắt nhau tại H, đường thẳng AD cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P(P $\neq$ A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại giao điểm thứ hai là N (N$\neq$A). Gọi I, M lần lượt là trung điểm của EF và BC. Đường thẳng qua P song song với EF cắt (O) tại điểm K(K $\neq$ D)

Chứng minh OA $\perp$EF.

Chứng minh : M, H, N thẳng hàng và $NIE = NFH$

Chứng minh : K, I, N thẳng hàng



Dựng tiếp tuyến Ax của (O) . Ta có $xAC = ABC$ **(Tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).**

Mặt khác ta lại có $ABC = AFE$ **(Do tam giác BCEF nội tiếp). Từ đó suy ra** $xAC = AFE \Rightarrow$ **EF//Ax** $\Leftrightarrow$ **EF** $\perp$ **OA.**

Để chứng minh bài toán ta chứng minh bổ đề : Cho tam giác NEF nội tiếp đường tròn (J), các tiếp tuyến tại E và F của (J) cắt nhau ở M, MN cắt (O) tại giao điểm thức 2 là H. Gọi I là trung điểm của EF. Khi đó ta có $NIF = NEH$ **.**

Thật vậy : Theo tính chất của tiếp tuyến và cát tuyến ta có : ME2 = MH.MN, mặt khác, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông EJM ta có ME2= MI.MJ suy ra MI.MJ=MH.MN $\Rightarrow \Delta MHJ \backsim \Delta MJL \Rightarrow MHI = MJN$ **suy ra MIJN là tứ giác nội tiếp.**

Từ đó ta có : $HIM = HNJ = NIJ$ **nên IE là phân giác của** NIH **,**

$$NIE = 180^0 - \frac{1}{2}NIH = 180^0 - \frac{1}{2}NJH = 180^0 - NEH$$

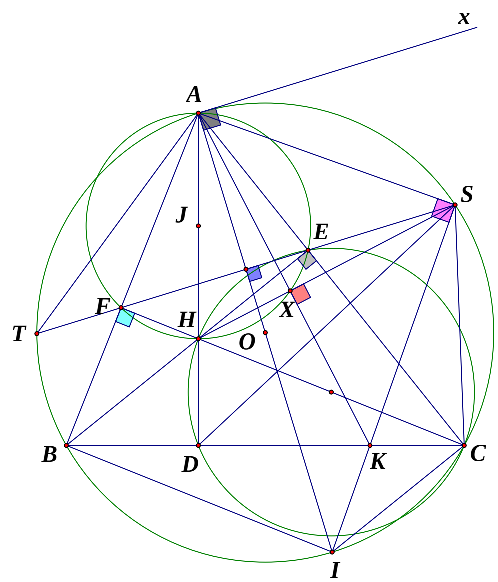
Từ chứng minh ở câu b suy ra $\Delta NIE \backsim \Delta NFH \Rightarrow ENI = HNF$ **. Ta có :** $ANI = ANE + ENI = AFE + HNF = ACB + BAD = ACB + BCP = ACP = AKP = ANP$ **suy ra N, I, K thẳng hàng. Suy ra điều phải chứng minh.**

Bài 39

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt (O) tại T, S (S thuộc cung nhỏ AC). Dựng đường kính AI của (O) , SI cắt BC tại K.

Chứng minh rằng : tam giác AST cân.
Chứng minh $AS^2 = AE.AC$.
Chứng minh $AK \perp SH$**.**

Giải



a) Ta chứng minh được tính chất quen thuộc: $OA \perp EF$.

Dựng tiếp tuyến Ax của (O). Ta có: $xAC = ABC$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mặt khác ta có: $ABC = AFE$ (Do $BECF$ nội tiếp). Từ đó $xAC = AFE$ $\Rightarrow EF\ //\ Ax \Leftrightarrow EF \perp OA$.

Suy ra OA là đường trung trực của ST. Vậy ΔAST cân tại A.

b) Ta có: $AST = ATS = ABS = ACS$

Suy ra AS là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔESC.

Từ đó suy ra $\Delta ASE \backsim \Delta ACS$ (g.g) $\Rightarrow AS^2 = AE.AC.$

c) Gọi X là giao điểm của đường tròn (J) đường kính AH (đường tròn ngoại tiếp ΔAEF) với đường thẳng AK. Suy ra $AH.AD = AX.AK = AE.AC = AS^2 \Leftrightarrow AS^2 = AX.AK$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ASK ta suy ra $SX \perp AK$. Do đó H, S, X thẳng hàng. Vậy $SH \perp AK$.

Bài 40

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (A, B là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC. Trên đoạn thẳng BH lấy một điểm M bất kì, đường thẳng qua M và vuông góc với MO cắt AC, AB lần lượt tại P, Q.

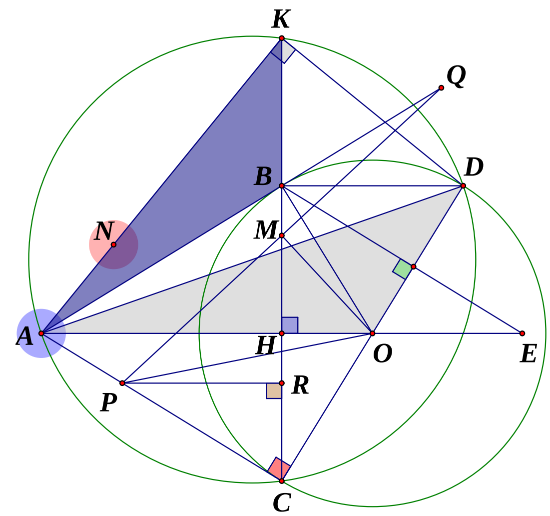
a) Chứng minh rằng OPQ là tam giác cân.

b) Lấy điểm R thuộc CH sao cho PR // OA. Chứng minh rằng $CR = HM$.

c) Kẻ đường kính CD của (O). Gọi K là điểm đối xứng với H qua B, đường thẳng qua B song song với AD cắt AK tại điểm N. Chứng minh rằng tứ giác ACDK nội tiếp.

d) Đường thẳng qua B và vuông góc với OC cắt AH tại E. Chứng minh rằng NB là tia phân giác trong của KNE.

Giải



a) Tứ giác MBQO có $OMQ = OBQ = 90^0$.

Suy ra MBQO là tứ giác nội tiếp, do đó $MQO = MBO$ (cùng chắn cung MO).

Tương tự ta cũng có tứ giác MPCO nội tiếp nên $MPO = MCO$.

Mà $MCO = MBO \Rightarrow MPO = MQO$ hay tam giác OPQ cân tại O.

b) Ta có: $\Delta PCR \backsim \Delta COH \Rightarrow \dfrac{PC}{RC} = \dfrac{CO}{OH} \Rightarrow RC = \dfrac{PC.OH}{OC}$

$\Delta MOH \backsim \Delta POC \Rightarrow \dfrac{MH}{HO} = \dfrac{PC}{OC} \Rightarrow MH = \dfrac{OH.PC}{OC}$. Từ đó ta có: $RC = MH$.

c) Dễ chứng minh được: $\Delta AHB \backsim \Delta ACO \Rightarrow \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AO}{CO} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AO}{OD} \Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta AOD\ (c.g.c)$ suy ra $AKB = ADO$ nên tứ giác $ACDK$ nội tiếp.

d) Ta dễ chứng minh được: $ABEC$ là hình thoi, theo tinh chất đối xứng ta có: $KAB = KEB$

Ta cũng có $KMB = KAD = BAE = BEA$ suy ra tứ giác $BMAE$ nội tiếp nên $KAB = MEB = KEB$ hay EB là phân giác của KEM suy ra MB là phân giác của KME.

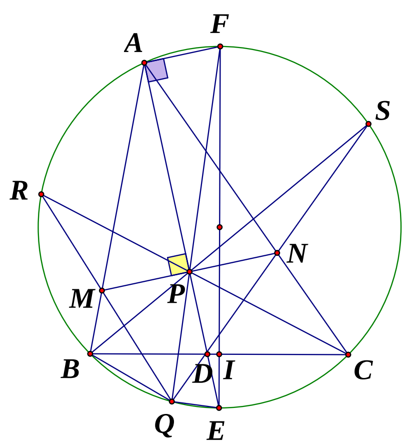
Bài 41

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường phân giác trong AD cắt đường tròn (O) tại E, dựng đường kính EF, lấy điểm P trên đoạn thẳng AD (P khác A, D). Đường thẳng FP cắt đường tròn (O) tại Q khác F. Dựng đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt AC, AB tại M, N.

a) Chứng minh các tứ giác $PQBN$, $PQCM$ nội tiếp.

b) Giả QN, CP cắt nhau trên (O). Chứng minh QM và PB cũng cắt nhau trên (O).

Phân tích định hướng giải



a) Từ giả thiết ta suy ra $AF \perp AE$, $AF // MN$ đây là định hướng để chứng minh các tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác $PQBN$:

Ta có các biến đổi góc sau: $NPQ = FPM = PFA = ACQ$

mà tứ giác $ACQB$ nội tiếp nên $ACQ + ABQ = 180^0 \Rightarrow NPQ + NBQ = 180^0$

+ Xét tứ giác $PQCM$ ta có: $FQC = CAF = AMP$, suy ra $PQCM$ nội tiếp.

b) Nếu QN, CP cắt nhau tại điểm R nằm trên (O), Ta suy ra tứ giác $BRCQ$ nội tiếp, giả sử BP, QM cắt nhau tại điểm S. Ta cần chứng minh:

$BQCS$ nội tiếp. Thật vậy ta có: $SQC = MPC = RPN = RPB - NPB = PBC + PCB - NPB$ nhưng $PCB = RQB = NPB$ từ đó ta suy ra $SQC = PBC = SBC$ hay $BQCS$ nội tiếp.

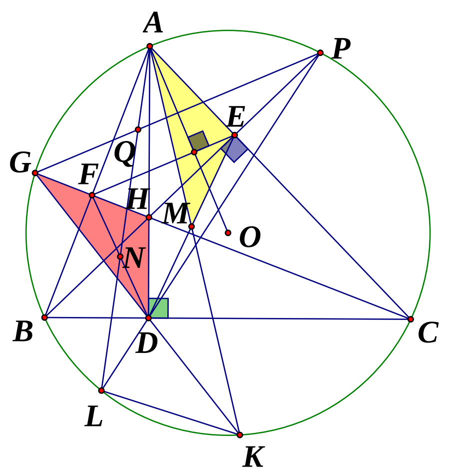
Bài 42

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Đường thẳng CH cắt (O) tại điểm G khác C. GD cắt (O) tại điểm K khác G.

a) Chứng minh: AK đi qua trung điểm M của DE.

b) Gọi N là trung điểm của DF, AN cắt (O) tại điểm L khác A. Chứng minh 4 điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Phân tích định hướng giải



a) Việc chứng minh trực tiếp AK đi qua trung điểm của DE là tương đối khó. Để ý đến chi tiết CH cắt đường tròn (O) tại điểm G ta sẽ thấy G, H đối xứng nhau qua AB, hay F là trung điểm GH.

Như vậy ta cần tìm mối quan hệ giữa điểm F và điểm M thông qua các tam giác đồng dạng.

Xét tam giác DFH và tam giác DAE:

Ta thấy $DFH = DBH = DAE$, ta cũng có $AED = 180^0 - ABD = FHD$ suy ra

$\Delta DFH \backsim \Delta DAE \Rightarrow \frac{HF}{EA} = \frac{HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{2HF}{EA} = \frac{2HD}{ED} \Leftrightarrow \frac{HG}{EA} = \frac{2HD}{ED}$ hay $\frac{HG}{EA} = \frac{HD}{EM}$. Từ đó suy ra $\Delta HGD \backsim \Delta EAM \Rightarrow EAM = HGD = CAK \Leftrightarrow AM \equiv AK$.

b) Giả sử BH cắt đường tròn (O) tại điểm P khác B. Tương tự câu a ta có: P đối xứng với H qua AC. Suy ra $AG = AH = AP$ do đó $GP \perp OA \perp EF$ suy ra $EF // MN // GP$, giả sử AL cắt GP tại điểm Q. Ta có: $MNA = AQP = AGQ + QAG = AKG + GKL = AKL$ suy ra tứ giác $MNKL$ nội tiếp.

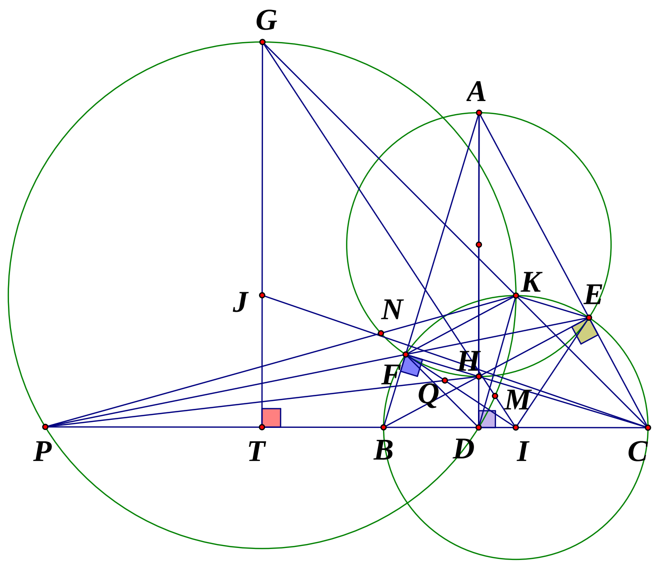
Bài 43

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC, BAC = 45^0$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Gọi I là trung điểm của BC, đường thẳng IF cắt PH tại điểm Q.

a) Chứng minh $DFEI$ là tứ giác nội tiếp và $IQH = AIE$.

b) Gọi K là trực tâm của tam giác AEF và (J) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác KPD. Đường thẳng CK cắt đường tròn (J) tại điểm G. Đường thẳng IG cắt đường tròn (J) tại M. Đường thẳng JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh $\Delta IMC \backsim \Delta ICG$.

Phân tích định hướng giải



a) Từ các tứ giác $HFBD, HDCE$ nội tiếp ta suy ra $FHD = HDE \Rightarrow FDE = ABE + ACF$. Mặt khác ta cũng có: $FBE + FCE = \frac{1}{2}FIE + \frac{1}{2}FIE = FIE$ suy ra $FDE = FIE$. Do đó tứ giác $FDIE$ nội tiếp.

+ Ta có: $FDE = ABE + ACF = 180^0 - 2A = 90^0 \Rightarrow ABE = ACF = 45^0$.

Gọi R là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $(HDI),(AFHE)$ ta thấy ngay R nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn, nên P, H, R thẳng hàng và $PR \perp UV$ (với U là trung điểm của AH, V là trung điểm của HI) suy ra $PR \perp AI$. Ta có $IQH = 90^0 - AIF = AIE$.

b) Ta có $FKE = 180^0 - A = 135^0$. $FCE = 45^0 \Rightarrow FKE + FCE = 180^0$.

Hay tứ giác $CEKE$ nôi tiếp. Tức là điểm K thuộc đường tròn đường kính BC.

+ Ta có: $FPD = EFD - FDP = EFD - EDC = EFD - EFI = IFD$ suy ra $\Delta IDF \backsim \Delta IFP$

Khi đó ta có $\frac{ID}{IF} = \frac{IF}{IP} \Leftrightarrow IF^2 = ID.IP$ mà $IF = IC \Rightarrow IC^2 = ID.IP$. Mặt khác ta cũng có: Tứ giác GMDP nội tiếp nên: $ID.IP = IM.IG \Leftrightarrow IM.IG = IC^2 \Rightarrow \Delta IMC \backsim \Delta ICG$.

Bài 44

Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại E, các tia *AD*, *BC* cắt nhau tại *F*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCE* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *CDF* tại *M*. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm *E*, *M*, *F* thẳng hàng và bốn điểm *A*, *D*, *M*, *E* nằm trên một đường tròn.

b) $OM \perp EF$.

c) Chứng minh đường thẳng *OM* đi qua giao điểm của hai đường chéo *AC*, *BD* của tứ giác *ABCD*.

Phân tích định hướng giải

a) Bài toán thực chất là sự kết hợp giữa hai định lý hinh học: Định lý Miquel và Định lý Brocard.

Để chứng minh *E*, *M*, *F* thẳng hàng ta chứng minh: $EMC + CMF = 180^0$.

a) Ta tìm cách quy về hai góc đối nhau trong tứ giác nội tiếp .

Ta có $EMC + CMF = ABC + CDA = 180^0$.

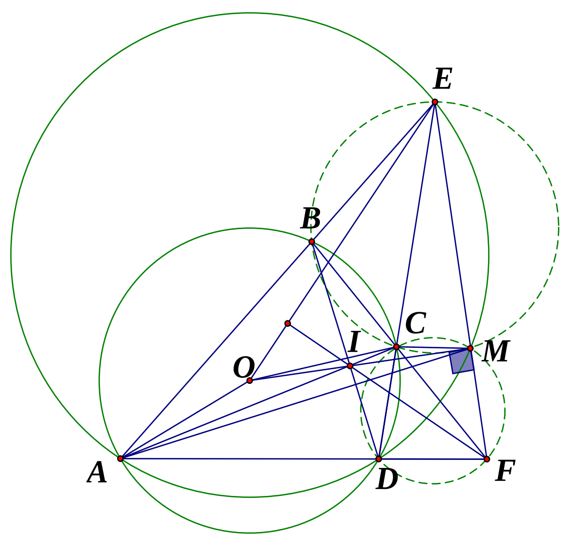
Ta có $DMF = DCF = DAB$ suy ra 4 điểm *A*, *D*, *M*, *E* cùng nằm trên một đường tròn.

Từ đó ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác *ABMF*, *BDFE* nội tiếp.

b) Xét tứ giác *OACM* ta có:

$$CMA = 180^0 - CME - AMF = 180^0 - ABC - ACB$$

$$= 180^0 - 2ABC = 180^0 - AOC$$



Suy ra tứ giác *OACM* nội tiếp.

Ta có $OMF = OMA + AMB = OMA + ABF = OMC + CME = OME$ suy ra $OME = OMF = 90^0$.

Theo định lý Brocard ta có: $OI \perp EF$ hay *O*, *I*, *M* thẳng hàng.

Bài 45

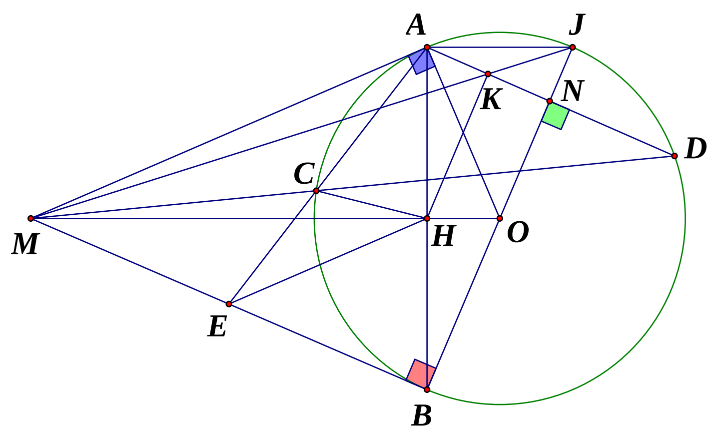
Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O). Gọi E là trung điểm MB, C là giao điểm của AE và (O), H là giao điểm của AB và MO. D là giao điểm của MC và (O).

a) Chứng minh HCEB là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác ABD.

c) Gọi J là giao điểm thứ hai của BO và (O), K là giao điểm của AD và MJ. Tính tỷ số $\frac{KA}{KD}$.

Phân tích định hướng giải



a) Chú ý rằng: Tam giác EHB cân tại E nên $EHB = EBH = ADB$. Mặt khác tứ giác ACBD nội

c) Gọi N là giao điểm của BJ, AD. Ta dễ chứng minh được:

$\Delta AJN \backsim \Delta MOB \Rightarrow \frac{JN}{OB} = \frac{AN}{MB} \Rightarrow \frac{JN}{2OB} = \frac{AN}{2MB} \Leftrightarrow \frac{JN}{JB} = \frac{AN}{2MB}$. Để ý rằng:

$\frac{NK}{NB} = \frac{JN}{JB} \Rightarrow \frac{NK}{NB} = \frac{AN}{2MB} \Rightarrow NK = \frac{1}{2}AN$ hay K là trung điểm của AN. Từ đó tính được $\frac{KA}{KD} = \frac{1}{3}$

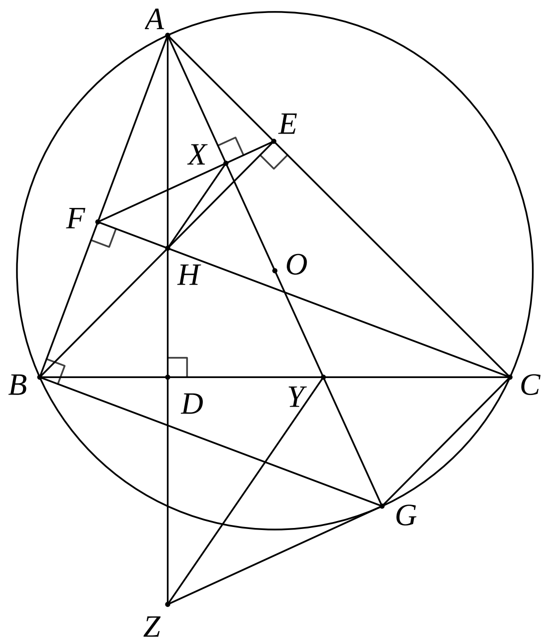
Bài 46

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Dựng đường kính AG của (O). AG cắt EF, BC tại X, Y.

a) Chứng minh: H, G, X, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi Z là giao điểm của AD và tiếp tuyến tại G của (O). Chứng minh $HX \,//\, YZ$.

Giải



a) Ta có: tính chất quen thuộc $OA \perp EF$

Chú ý rằng các tứ giác nội tiếp nên: $AF.AB = AH.AD = AX.AG$ nên 4 điểm H, G, X, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chú ý tứ giác và $HZGD$ nội tiếp nên: $ZYG = ZDG = HXG \Rightarrow HX \,//\, YZ$.

Bài 47

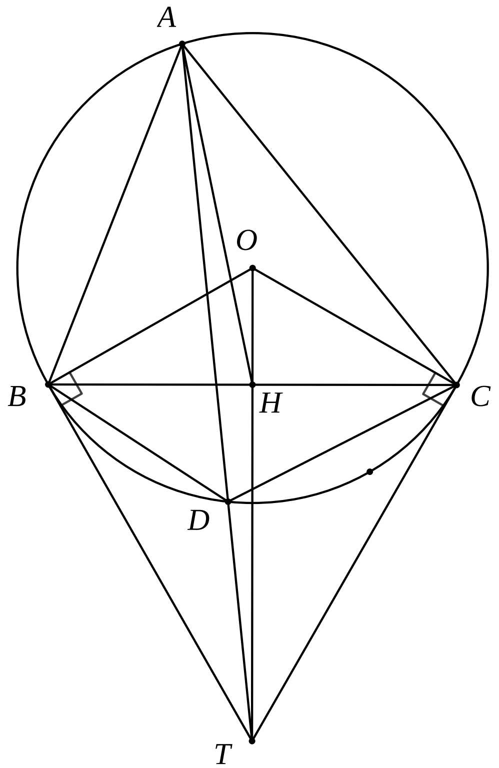
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) lần lượt tại S, T. BT cắt AC tại E, CS cắt AB tại F. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CF, AB, AC. Đường thẳng BQ, CP cắt (O) tại giao điểm thứ hai là K, L.

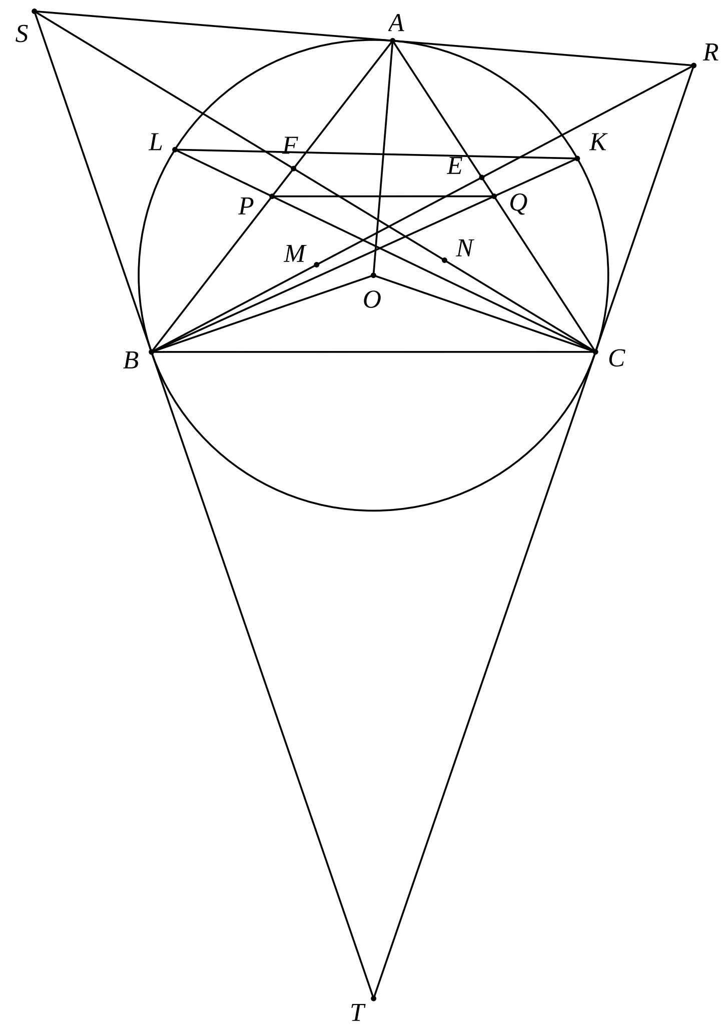
a) Chứng minh: $\Delta ABK \backsim \Delta EBC$

b) Chứng minh tứ giác $PQKL$ nội tiếp

c) Chứng minh: $BCM = CBN$

Phân tích định hướng giải





a) Ta dễ chứng minh được tính chất sau: Xem thêm phần tính chất cát tuyến, tiếp tuyến

Tam giác ABC nội tiếp (O), các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T, AT cắt (O) tại D, OT cắt BC tại H. Khi đó $AHC = ABD$ và $BAT = HAC$

Trở lại bài toán:

+ Áp dụng kết quả bài toán ta có: $\Delta ABK \backsim \Delta EBC$.

b) Từ kết quả $\Delta ABK \backsim \Delta EBC$ chú ý rằng: KP, CM lần lượt là trung tuyến của các tam giác $\Delta ABK, \Delta EBC$ nên suy ra $BCM = BKP$ (1), tương tự $CBN = CLQ$ (2)

c) Ta có: $PKL = QBC = PQB$ (do $KLBC$ nội tiếp và $PQ \,//\, BC$). Từ đó suy ra tứ giác $PQKL$ nội tiếp nên ta có: $BKP = CLQ$ (3).

Từ (1),(2),(3) ta có: $BCM = CBN$

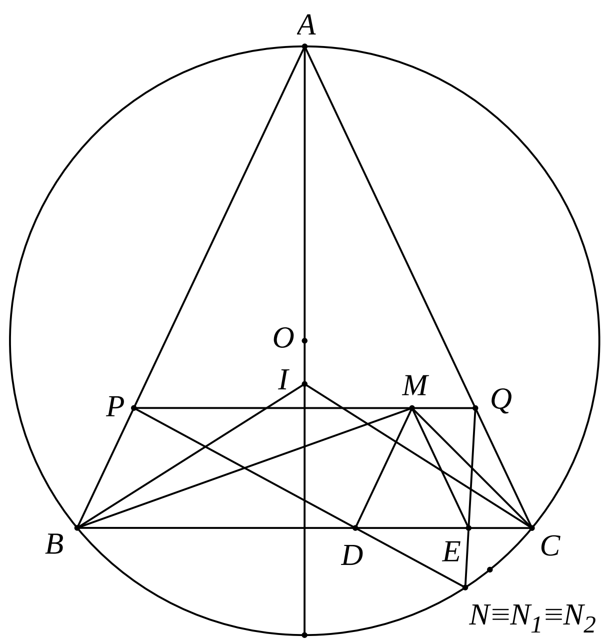
Bài 48

Cho tam giác ABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M là điểm trong tam giác ABC sao cho $BMC = BIC$. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt ại P, Q. Các đường thẳng qua M song song với AB, AC cắt BC tại $D,\ E$.

a) Chứng minh tứ giác $MQCD$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của PD, QE. Chứng minh khi M thay đổi thì N luôn chạy trên một đường tròn cố định.

Phân tích định hướng giải



a) Ta có: $BPMD$ là hình bình hành suy ra $PMD = ABC$. Tam giác ABC cân tại A nên $ABC = BCA$ suy ra $PMD = QCD$ nên tứ giác $MQCD$ nội tiếp.

b) Gọi N_1 là giao điểm của PD với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MQCD$ $\Rightarrow PN_1M = DCM$ và $PN_1M = DCM$

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC cân tại A nên: $BIC = 180 - B$. Suy ra: $BMC = 180° - PBD \Rightarrow PMB + QMC = PBD$.

Mà $PMB = MBD$ (so le trong) nên $QMC = PBM$. Mặt khác $MBE = MCQ$. Tương tự có $PMEB$ nội tiếp nên gọi N_2 là giao điểm của QE với đường tròn ngoại tiếp $PMEB$ suy ra $MN_2Q = MBE$ suy ra $MN_2Q = MCQ$ và $MN_2Q = MN_1Q$, ta có: $PN_2M = PBM \Rightarrow PN_2M = DCM \Rightarrow PN_2M = PN_1M$ nên $N \equiv N_1 \equiv N_2$.

Khi đó ta có: $BNM = 180° - BPM = ABC,\ MNC = 180° - MQC = ACB$. Suy ra $BNC = 180° - BAC$ hay N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

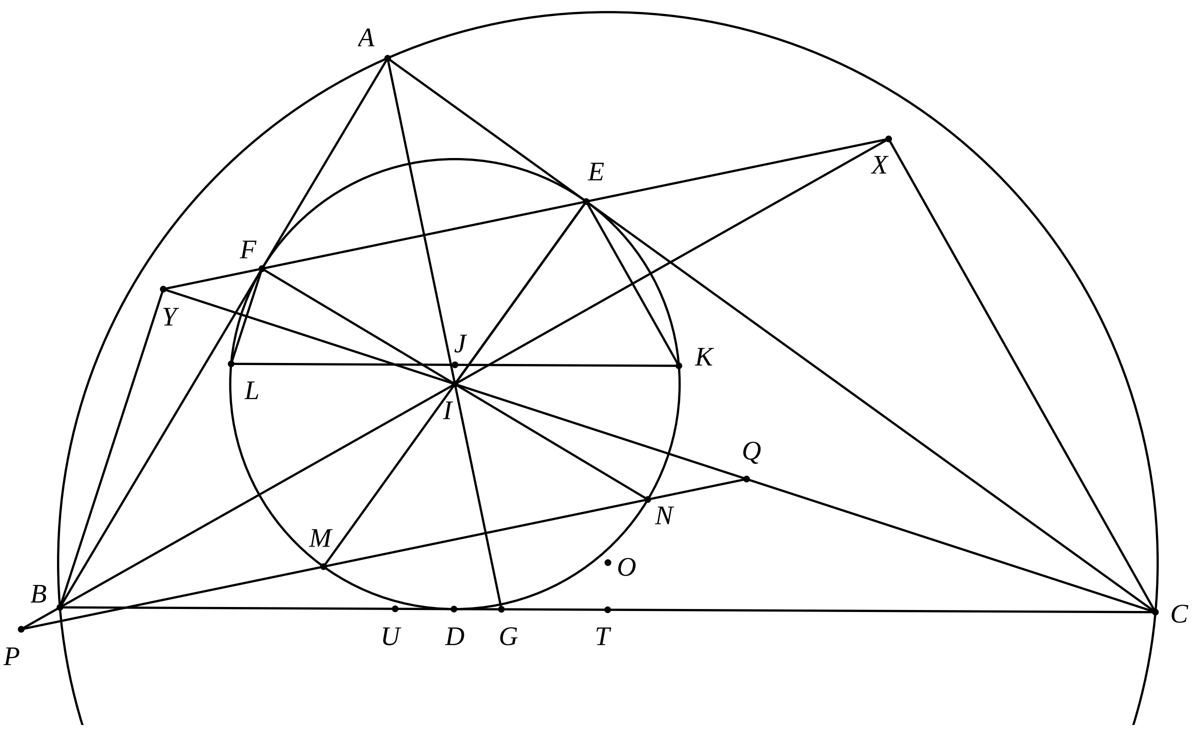
Bài 49

Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng đi qua E vuông góc với BI cắt (I) tại điểm thứ hai là $K\,(K \neq E)$, đường thẳng qua F vuông góc với CI cắt (I) tại giao điểm thứ hai là $L\,(L \neq F)$. Gọi J là trung điểm của KL. Gọi T là trung điểm của BC, G là giao điểm của AI với BC, U là điểm đối xứng với T qua G. X, Y là giao điểm của EF với BI, CI

a) Chứng minh: Bốn điểm C, I, E, X và B, C, X, Y cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của IE, IF với (I). MN cắt IB, IC tại P, Q. Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua điểm U.

Phân tích định hướng giải



a) Trước tiên ta dễ chứng minh được D, I, J thẳng hàng. Ta có: $XEC = AEF = 90° - \dfrac{A}{2}$

$XIC = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90° - \frac{A}{2}$ (Tính chất góc ngoài).

Từ đó suy ra $IEXC$ nội tiếp nên $IXC = 90°$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $IFYB$ là tứ giác nội tiếp nên $BYI = 90°$. Từ đó suy ra tứ giác $XYBC$ nội tiếp

b) Suy ra điểm T nằm trên đường trung trực của XY. Các cặp điểm M, E, N và F đối xứng nhau qua I nên $EF // MN$ suy ra $EF // PQ$. Tương tự X, P đối xứng nhau qua I và Y, Q đối xứng nhau qua I. Nên hai đường trung trực của XY và PQ đối xứng nhau qua IA suy ra đường trung trực của PQ đi qua điểm U.

Chú ý rằng: Điểm T là cố định và $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Suy ra điểm U là cố định.

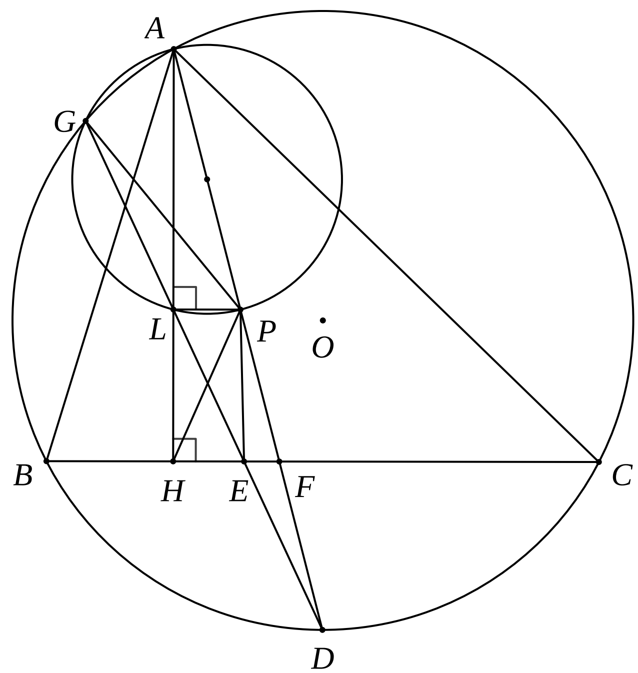
Bài 50

Cho tam giác ABC không cân có đường cao là AH nội tiếp đường tròn (O). Một điểm P nằm trong tam giác sao cho AP là đường phân giác trong của góc BAC. Gọi L là hình chiết vuông góc của P lên AH. Đường tròn đường kính AP cắt (O) tại giao điểm thứ hai là G $(G \neq A)$

a) Chứng minh AP, GL cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

b) Giả sử GL chia đôi đoạn thẳng HP. Chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Phân tích định hướng giải



a) Gọi F, D lần lượt là giao điểm của AP với BC và (O). Ta sẽ chứng minh G, L, D thẳng hàng.

Thật vậy ta có: $AGL = LPD = BFD = \frac{1}{2}$ sđ$\left(CD + AB\right) = \frac{1}{2}$ sđ$\left(BD + AB\right) = AGD$. Suy ra G, L, D thẳng hàng.

Cũng có thể biến đổi góc theo cách khác như sau:

$AGL = LPD = BFD = FCD + FDC = FBD + AGC = DGC + AGC = AGD$

Từ đó suy ra: G, L, D thẳng hàng.

b) Để chứng minh: là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta sẽ chứng minh:

BP là phân giác trong của ABC

Gọi E là giao điểm của GL và BC.

Từ giả thiết GL chia đôi HP suy ra $PLHE$ là hình chữ nhật nên $PE \,//\, LH$.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{DP}{DA} = \frac{PE}{AL} = \frac{LH}{AL} = \frac{PF}{AP} \Rightarrow \frac{DA}{AP} = \frac{DP}{DF} \Leftrightarrow \frac{DA}{DA - AP} = \frac{DP}{DP - PF}$ hay

$\frac{DA}{DP} = \frac{DP}{DF} \Leftrightarrow DP^2 = DA.DF$

Lại có $DBF = DAC = DAB$ nên $\Delta DBF \backsim \Delta DAB$. Suy ra: $BD^2 = DF.DA = DP^2$. Từ đó suy ra:

$PBC = PBD - CBD = BPD - CAD = BPD - DAB = PBA$

Vậy BP là phân giác của góc ABC. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 51

Cho tam giác ABC nhọn, cố định nội tiếp trong (O). P là một điểm chuyển động trên cạnh BC. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PAC. Lấy điểm S thuộc đường tròn (K) sao cho $PS // AB$. Lấy điểm T thuộc đường tròn (L) sao cho $PT // AC$.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AST đi qua O.

b) Gọi E là giao điểm của (K) và AC, F là giao điểm của (L) và AB. BE cắt CF tại điểm G. Chứng minh đường thẳng PG đi qua O khi và chỉ khi AP đi qua trung điểm của OH, với H là trực tâm của tam giác ABC.

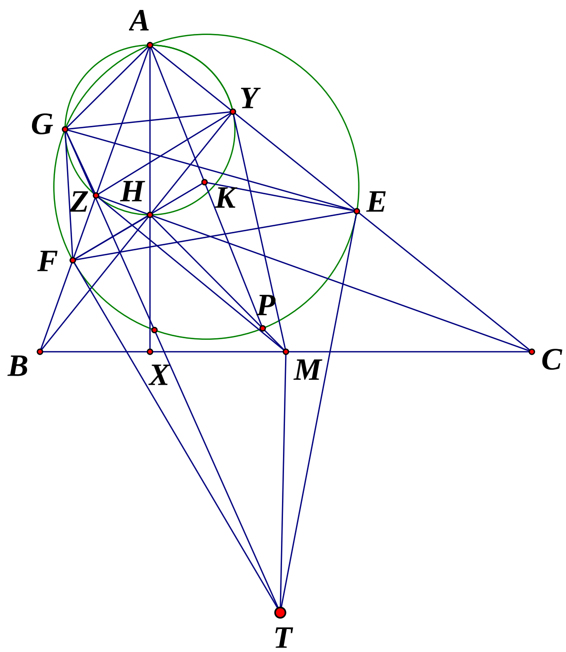
Phân tích định hướng giải

a) Gọi AT, AS cắt BC tại Q, R. Dễ thấy các tứ giác $ABPS$, $ACPT$ là hình thang cân, do đó các tam giác ABR, ACQ cân tại R, Q. Mặt khác ta có OK, OL là các đường trung trực của AB, AC do đó OK đi qua R, OL đi qua Q.

Suy ra trong tam giác AQR thì O là tâm đường tròn nội tiếp hay AO là đường phân giác của góc SAT (1). Lại có tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên OQ cũng là đường trung trực của PT.
Do đó $OT = OP$, tương tự ta có $OS = OP$ do đó $OT = OS$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra O thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AST.
b, Ta dễ chứng minh được tứ giác $AEGF$ nội tiếp, từ đó suy ra $CEGP$ nội tiếp kéo theo $BFGP$ cũng nội tiếp. Từ đó suy ra nếu M đối xứng với A qua BC thì $BPM = APB = AEB = GPC$ do đó PG đi qua M. Nên đường thẳng PG và AP đối xứng nhau qua BC. Nên PG đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi AP đi qua điểm đối xứng của O qua BC.

Bài 52. Cho tam giác ABC có ba đường cao là AX, BY, CZ cắt nhau tại điểm H, M là trung điểm của BC, P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại điểm G khác A.
a, Chứng minh: P, H, G thẳng hàng.
b, Chứng minh tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên đường trung trực của BC.

Phân tích định hướng giải



a, Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY có đường kính là AH nên $HG \perp GA$, mặt khác $PG \perp GA$ nên P, H, G thẳng hàng.

b, Xét tam giác GYE và tam giác GZF ta có: $YEG = ZFG$ (cùng chắn GA). $GYE = GZF$ (cùng bù với $AYG = AZG$). Do đó $\Delta GYE \backsim \Delta GZF$. Xét tam giác GYZ và tam giác GEF ta có

$GYZ = GAZ \equiv GAF = GEF, ZGY = ZAY \equiv FAE = FGE$ suy ra $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$.

Do $MYB = MBY = YAH, MZH = MCZ = ZAH$ suy ra M là giao điểm của các tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ.

Tương tự ta cũng có T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Ta có $GFT = GFE + EFT = 180^0 - GAY + FAE = 180^0 - \left(GAY - FAE\right) = 180^0 - GAZ$

và $GZM = GZH + HZM = 180^0 - GAH + HAZ = 180^0 - GAZ$ nên $GFT = GZM$ mặt khác cũng từ $\Delta MYZ \backsim \Delta TFE$ và $\Delta GYZ \backsim \Delta GEF$ suy ra $\dfrac{TF}{ZM} = \dfrac{EF}{ZY} = \dfrac{GF}{GZ}$ hay $\Delta GFT \backsim \Delta GZM$ suy ra

$\Delta GZF \backsim \Delta GMT$ suy ra $GMT = GZF = 180^0 - GZA = 180^0 - GHA = AHP$ hay $TM // AH \perp BC.$

Bài 53. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại giao điểm thứ hai là D, E, F. DE cắt AC, BC lần lượt tại M, N. DF cắt AB, BC tại P, Q.

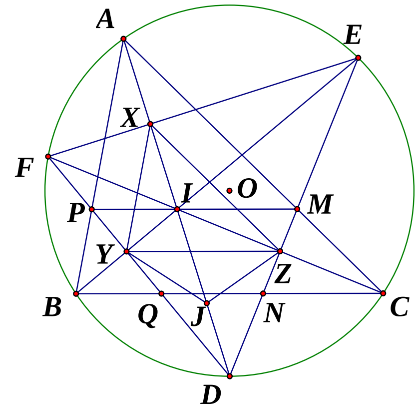
a, Chứng minh: tam giác CMN là tam giác cân.

b, Chứng minh $PM // BC$ từ đó suy ra P, I, M thẳng hàng.

c, Chứng minh: $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.

d, Giả sử EF, FD, DE lần lượt cắt AI, BI, CI tại X, Y, Z. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ. Chứng minh 4 điểm X, Y, Z, J cùng nằm trên một đường tròn.

Giải:



a, Ta có $DMC = \frac{1}{2}sd(AE + DC), CNE = \frac{1}{2}sd(CE + DB)$

mà $AE = CE, BD = DC \Rightarrow DMC = CNE$ hay tam giác CMN cân tại C.

b, Ta có $IAM = IEM$ suy ra tứ giác $AIME$ nội tiếp

suy ra $EIM = EAM = EBC \Rightarrow IM // BC$, chứng minh tương tự ta cũng có: $IP // BC \Rightarrow M, I, P$ thẳng hàng và $MP // BC.$

c, Trước hết ta cần chứng minh: $DI = DB = DC.$

Áp dụng định lý Ptole my cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có $AB.CD + AC.BD = AD.BC$ suy ra

$DI\left(AB + AC\right) = DA.BC \Leftrightarrow \frac{DI}{DA} = \frac{BC}{AB + AC}$.

d, Theo tính chất vòng tròn nội tiếp tam giác ta có:

$YIZ + YDZ = BIC + FDE = 90^0 + \frac{1}{2}BAC + FDA + ADE = 90^0 + \frac{1}{2}BAC + FCA + EBC = 180^0$

Suy ra tứ giác $XYDZ$ nội tiếp. Suy ra $IYZ = IDZ = EBC \Rightarrow YZ // BC$. Tương tự ta cũng có $XY // AB, XZ // AC$. Suy ra $YXZ = BAC$. Do J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DYZ nên $YJZ = 2YDZ = ABC + ACB = 180^0 - BAC = 180^0 - YXZ$ suy ra tứ giác $XYJZ$ nội tiếp.

Bài 54. Cho tam giác ABC vuông tại A, dựng đường tròn tâm O đường kính AB. Một đường kính qua C cắt nửa đường tròn (O) (nằm trong nửa mặt phẳng chứa điểm C có bờ là AB) tại D, E (D nằm giữa C và E) sao cho $ECA < 90^0$. Qua D dựng đường thẳng vuông góc với CE cắt AC tại F. Hạ $CK \perp EF, EH \perp AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EDK cắt AD tại điểm I khác D, hai đường thẳng AC, KI cắt nhau tại M.

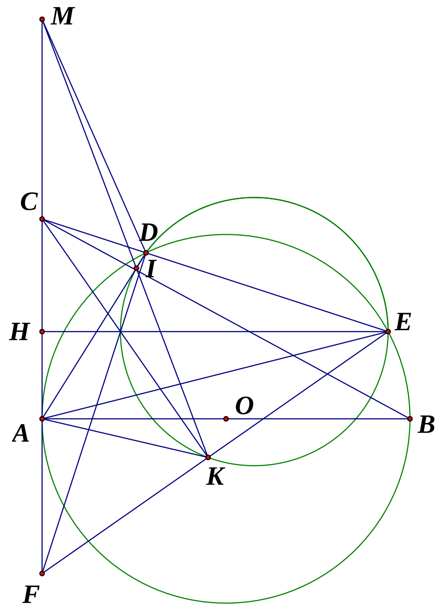
a, Chứng minh A, K, E, M cùng nằm trên một đường tròn.

b, Chứng minh $CA^2 = CF.CH$

c, Chứng minh $FM.FA = FC.FH$

d, Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác EDM luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

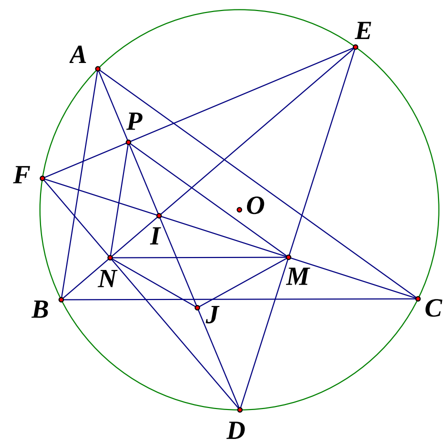
Giải



a, Tứ giác $EDIK$ nội tiếp nên $IDE = IKF$ (cùng bù với góc IKE) hay $ADE = IKF$ (1)
Xét đường tròn (O) ta có: $ADE = EAF$ (góc nội tiếp chắn cung lớn AE và góc tạo bởi dây cung AE và tiếp tuyến AF) (2). Từ (1) và (2) suy ra
$IKF = EAF \Rightarrow 180^0 - IKF = 180^0 - EAF \Rightarrow EKM = EAM$ suy ra $AEKM$ là tứ giác nội tiếp.
b, Do CA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $CA^2 = CD.CE$ (*). Mặt khác tứ giác $FHDE$ nội tiếp nên $CD.CE = CH.CF$ suy ra $CA^2 = CF.CH$ (1)
c, Do tứ giác $AKEM$ nội tiếp nên $FK.FE = FA.FM$. Mặt khác tứ giác $CHKE$ nội tiếp nên $FK.FE = FH.FC$ suy ra $FA.FM = FH.FC$ (2)
d, Ta chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MDE luôn tiếp xúc với đường thẳng AC cố định.
Từ (1) và (2) suy ra $CA^2 + FA.FM = CF.CH + CF.FH = CF^2 \Rightarrow FM.FA = CF^2 - CA^2$
Lại có $CF^2 - CA^2 = (CF - CA)(CF + CA) = FA(CF + CA)$
Hay $FM = CF + CA \Leftrightarrow CA = CM$. Kết hợp với $(*)$ suy ra $CM^2 = CD.CE$ tức là đường tròn ngoại tiếp tam giác EDM tiếp xúc với đường thẳng AC tại M.

Bài 55. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N, AD cắt EF tại P. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.
a, Chứng minh $INDM$ là tứ giác nội tiếp.
b, Chứng minh $MN // BC$ và I là trực tâm tam giác DEF.
c, Chứng minh P, M, J, N cùng nằm trên một đường tròn.

Giải



a, Ta có $NIM = 180^0 - \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right) = 180^0 - \left(NDI + MDI\right) = 180^0 - NDM$ suy ra $INDM$ là tứ giác nội tiếp.

b, Suy ra $INM = IDM = ABE = IBC \Rightarrow MN // BC$. Ta có:

$FNE = \frac{1}{2}sd\left(EF + BD\right) = \frac{1}{2}sd\left(AF + AE + BD\right) = 90^0 \Rightarrow DF \perp BE$. Chứng minh tương tự ta có $DA \perp EF$ suy ra I là trực tâm tam giác DEF.

c, Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IMDN$ nên

$MJN = 2MDN = 2MDA + 2NDA = ABC + ACB = 180^0 - BAC$. Mặt khác chứng minh tương tự ta cũng có $NP // AB, MP // AC \Rightarrow BAC = MPN$ từ đó suy ra $MJN = 180^0 - MPN$ nên tứ giác $PMJN$ nội tiếp.

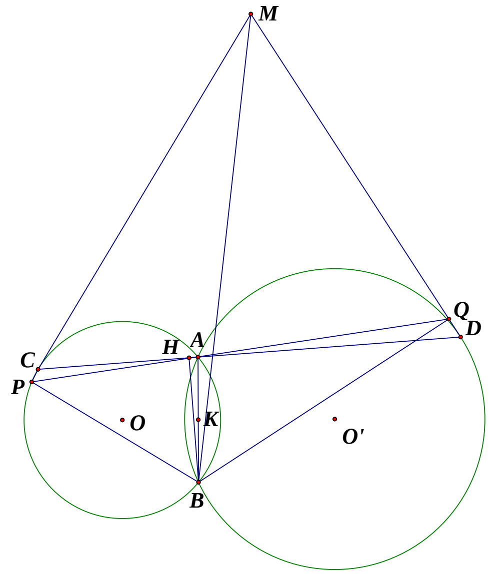
Bài 56. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt (O), (O') lần lượt tại C, D (A nằm giữa C, D). Tiếp tuyến tại C của (O) và tiếp tuyến tại D của (O') cắt nhau ở M. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống hai tiếp tuyến trên.

a, Chứng minh: Tứ giác $MCBD$ nội tiếp.

b, Hạ $BH \perp CD$, chứng minh P, H, Q thẳng hàng.

c, Chứng minh: PQ tiếp xúc với đường tròn cố định.

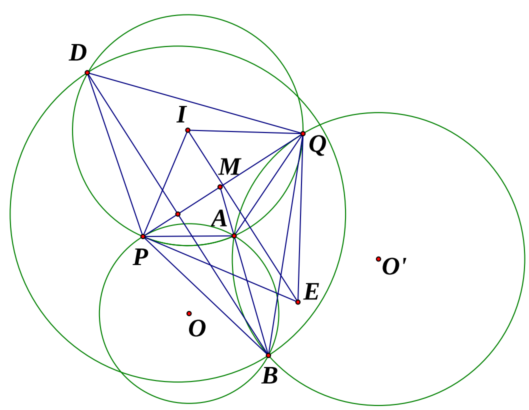
Giải



a, Ta có $CBD = CBA + ABD = MCA + MDA = 180^0 - CMD$
suy ra $MCBD$ là tứ giác nội tiếp.
b, Đây thực chất là đường Simson của điểm B với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.
c, Ta có $PHB = PCB = CAB$ suy ra PQ luôn tiếp xúc với đường kính AB.

Bài 57. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B và một tiếp tuyến chung PQ ($P \in (O), Q \in (O')$). Tiếp tuyến tại P và Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt nhau ở E. Gọi D là điểm đối xứng với B qua PQ. Giả sử AB cắt PQ tại điểm M.
a, Chứng minh: $APDQ$ là tứ giác nội tiếp.
b, Chứng minh $\Delta PBM \backsim \Delta APM$.
c, Chứng minh A, D, E thẳng hàng.

Giải



a, Theo tính chất đối xứng ta có:
$PDQ = PBQ = PBA + QBA = APQ + AQP = 180^0 - PAQ$ suy ra $APDQ$ là tứ giác nội tiếp.
Vì AB cắt PQ tại M nên $MP^2 = MA.MB = MQ^2$
Suy ra M là trung điểm của PQ. Tam giác $\Delta PBM \backsim \Delta APM$ (g.g) suy ra $\frac{BP}{AP} = \frac{MB}{MP}$, tương tự ta cũng có $\frac{BQ}{AQ} = \frac{MB}{MQ} \Rightarrow \frac{BP}{PQ} = \frac{AP}{AQ}$. Theo giả thiết ta có : $PB = PQ, QB = QD$ suy ra $\frac{DP}{DQ} = \frac{AP}{AQ}$.

Theo tính chất quen thuộc 2 tiếp tuyến tại *P, Q* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *APQ* cắt nhau ở *E* ta suy ra *E, D, A* thẳng hàng.

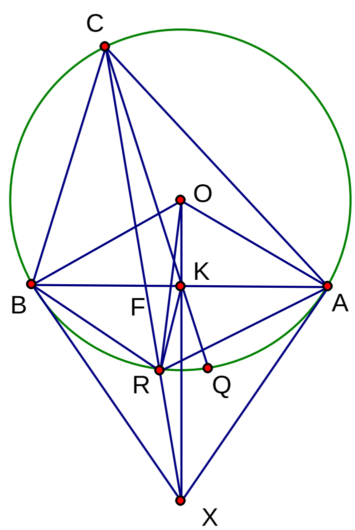
Bài 58. Cho tam giác *ABC* nội tiếp (*O*) với *B, C* cố định, ắc tiếp tuyến của (*O*) tại *A, B* cắt nhau ở *X*, các tiếp tuyến của (*O*) tại *A, C* cắt nhau ở *Y*. *CX, BY* cắt *AB, AC* lần lượt tại *F, E*. Gọi *M, N* là trung điểm của *BE, CF*. Các đường trung tuyến *BL, CK* kéo dài cắt (*O*) lần lượt tại *P, Q*.

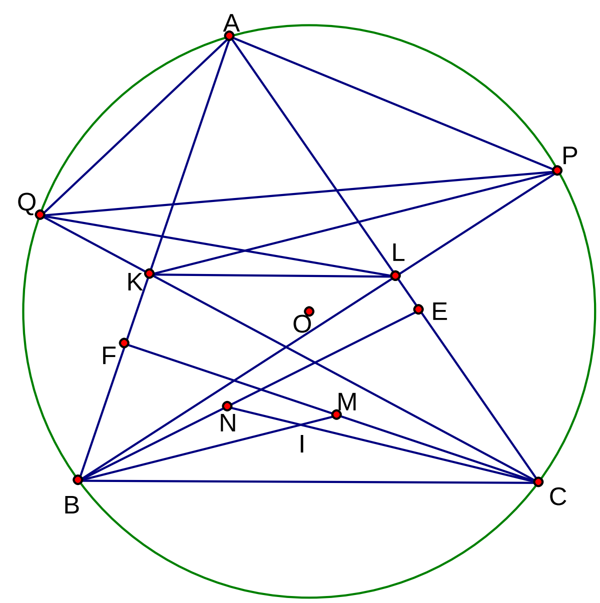
a. Chứng minh: Các tam giác *BFC, QAC* đồng dạng

b. Chứng minh: Tứ giác *PQKL* nội tiếp.

c. Gọi *I* là giao điểm *BN, CM*. Chứng minh: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC* nằm trên đường thẳng cố định.

Giải:





Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác *ABC* nội tiếp (*O*) các tiếp tuyến tại *A, B* cắt nhau ở *X*. *XC* cắt AB tại F thì $ACK = FCB$.

Thật vậy giả sử CX cắt (O) tại R thì XR.XC = XB^2 = XK.XO suy ra COKR là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $RKX = OCR = ORC = OKC$ nên KB là phân giác của góc CKR.

Ta có:

$CKA = 180^0 - CKB = 180^0 - \frac{1}{2}CKR = 180^0 - \frac{1}{2}COB = 180^0 - CAR = CBR$ Suy ra $\Delta CBR \backsim \Delta CKA\,(g.g)$

suy ra $ACK = FCB$.

a, Trở lại bài toán: từ bổ đề suy ra tam giác BFC,QAC đồng dạng.

b, Ta có $PQK = PBC = BLK$ suy ra PQKL nội tiếp.

c, Ta cần chứng minh: $MBC = NCB$.

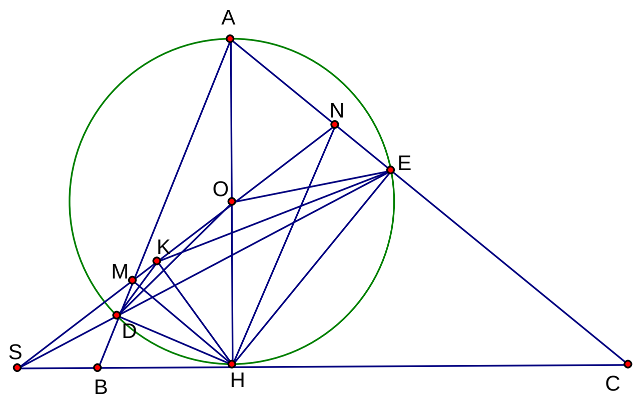
Ta có $\Delta BFC \backsim \Delta QAC$ mà BM,QL là các trung tuyến tương ứng nên

$\Delta BMC \backsim \Delta QLC \Rightarrow MBC = LQK$.

Tương tự ta cũng có $BCN = LBK$. mà $LQK = LPK$ suy ra $MBC = NCB$ suy ra tam giác IBC cân tại I. Suy ra trung trực của BC đi qua O, I hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nằm trên đường thẳng cố định là trung trực của BC.

Bài 59. Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Đường thẳng DE cắt BC tại S, SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N.
a, Chứng minh: $SD.SE = SH^2$.
b, Hạ AK $\perp$ SO (K nằm trên SO). Chứng minh OKDE là tứ giaccs nội tiếp.
c, Chứng minh: KH là phân giác của góc DKE.
d, Chứng minh O là trung điểm của MN.

Giải



a, Từ giả thiết suy ra SH là tiếp tuyến của (O). Xét tam giác SDH và tam giác SHE ta có:
$SHD = SEH = \frac{1}{2}$SđDH, HSE chung suy ra $\Delta SDH \backsim \Delta SHE(g.g)$

Suy ra $\frac{SH}{DH} = \frac{SE}{SH} \Leftrightarrow SH^2 = SD.SE(1)$

b, Tam giác SHO vuông tại H có HK $\perp$ SO suy ra $SH^2 = SK.SO$ (2). Từ (1) và (2) suy ra SK.SO = SD.SE $\Rightarrow \Delta SDK \backsim \Delta SOE(c.g.c) \Rightarrow SKD = SEO$ suy ra OKDE là tứ giác nội tiếp.

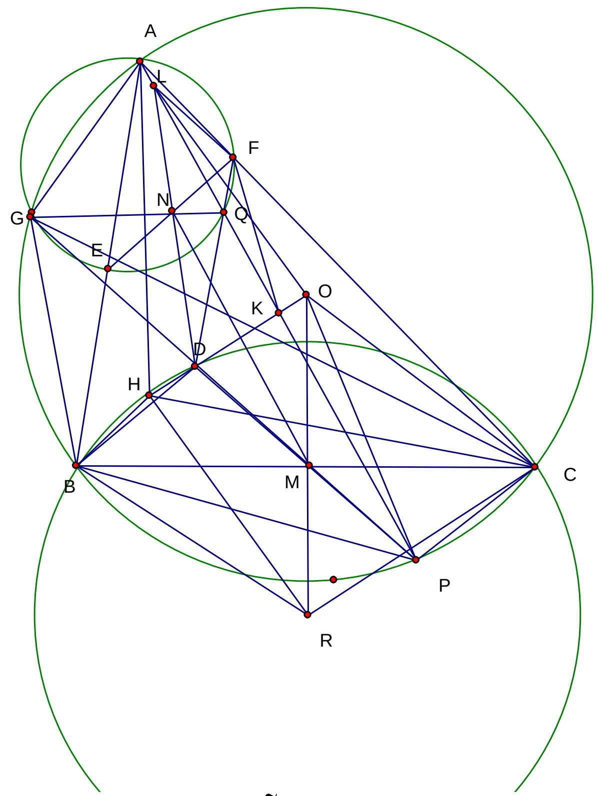
c, Từ câu b, ta có biến đổi góc: $SKD = OED = ODE = OKE \Rightarrow DKH = HKE$ hay HK là phân giác của góc DKE.

d, Tứ giác HKNE có $HKN + NEH = 180^0 \Rightarrow HKNE$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra
$HNE = HKE = \frac{1}{2}DKE = \frac{1}{2}DOE = DAE \Rightarrow HN // AD$. Xét tam giác OMA và tam giác ONH có OA = OH, $AOM = HON, OAM = OHN$ (so le trong) suy ra $\Delta OMA = \Delta ONH(g.c.g)$ suy ra OM = ON.

Bài 60. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Gọi P là điểm đối xứng của A qua OH(giả sử P nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A), lấy các điểm E, F lần lượt nằm trên AB, AC sao cho BE = CP, CF = PB. Gọi M là trung điểm của BC, K, D lần lượt là giao điểm của PM, AP với OH.
a, Chứng minh: BDCP là hình bình hành.
b, Chứng minh: $EDF = 90^0$.
c, Gọi G là giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh: GP chia đôi BC.

d, Chứng minh $EKF = 90^0$.

Giải



a, Gọi R là điểm đối xứng với O qua BC ta dễ chứng minh được R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Do A đối xứng với P qua OH nên OP = OA hay P nằm trên đường tròn (O).

Ta có OR = AH = HP, OC = OP = HR nên $\Delta OPR = \Delta HRP(c.c.c)$ từ đó suy ra OHRP là hình thang cân nên $\Delta DOM = \Delta PMO(g.c.g)$ suy ra MD = MP. Suy ra BDCP là hình bình hành.

b, Từ chứng minh câu a, ta có BD = CP = BE, BP = CD = CF nên các tam giác BED, CFD là tam giác cân. Ta có

$$EDF = 360^0 - BDC - EDB - FDC$$

$$= 360^0 - BPC - \frac{180^0 - EBD}{2} - \frac{180^0 - FCD}{2}$$

$$= 360^0 - \left(180^0 - BAC\right) - \frac{180^0 - EBD}{2} - \frac{180^0 - FCD}{2}$$

$$= BAC + \frac{ABC - DBC}{2} + \frac{ACB - DCB}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = 90^0.$$

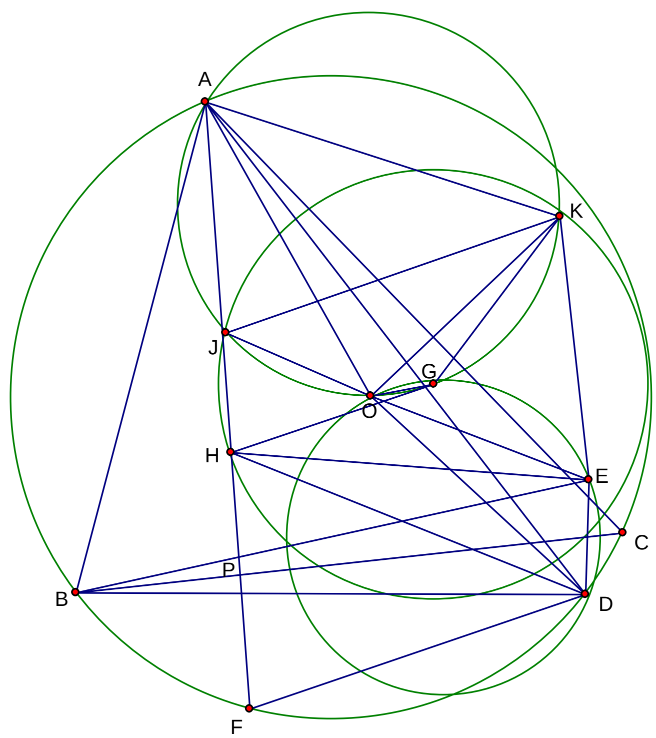
Gọi Q là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với AP.

c, Ta có $GBE = GCF, GEB = GFC$ nên $\Delta GEB \backsim \Delta GFC(g.g) \Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{EB}{CF} = \frac{PC}{PB}$ suy ra GP chia đôi BC hay G, D, M, P thẳng hàng. Tương tự ta có G, N, Q thẳng hàng.

Ta có $MG.MP = MB.MC = MC^2 \Rightarrow \frac{MP}{MG} = \left(\frac{MC}{MG}\right)^2 = \left(\frac{\sin MGC}{\sin GCB}\right)^2$. Tương tự $\frac{NP}{NG} = \left(\frac{\sin QGF}{\sin GFE}\right)^2$ mà $MGC = PAC = QGF, GCB = GAE = GFE$ suy ra $\frac{MP}{MG} = \frac{NP}{NG} \Rightarrow MN//AP$. Gọi L là điểm đối xứng với D qua N thì $L \in AP$ Khi dó EDFL là hình chữ nhật, ELKD nội tiếp nên 5 điểm E, I, F, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay $EKF = 90^0$.

Bài 61: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có trực tâm là điểm H. Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC, gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, Đường tròn ngoại tiếp tam giác ODE cắt AD tại G. Gọi J là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO với AH.
a, Chứng minh: J, O, E thẳng hàng.
b, Chứng minh G là tân đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.
c, Chứng minh: Trực tâm tam giác AGO nằm trên đường thẳng HE.

Giải



a, Ta có $GOE = GDE = GAJ = 180^0 - GOJ$ suy ra $GOE + GOJ = 180^0$ hay J, O, E thẳng hàng.

b, Từ các tứ giác AJOG, ODEG nội tiếp ta biến đổi góc: $GJO = GAO = GDO = GEO$ suy ra tam giác GJE cân tại G.

Gọi F là giao điểm thứ 2 của AH với (O) thì F đối xứng với H qua BC nên tứ giác HEDF là hình thang cân. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AGO tại giao thứ 2 là K. suy ra $JGE = AOD = 2AOD = 2ABD = 2AFD = 2\left(180^0 - JHE\right) = 2JKE$ suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác JHE.

c, Ta có: $GOE = GDE = GAJ = GKJ = GJK = GOK$ lại có $GKO = GJO = GEO$ suy ra $\Delta GOK = \Delta GOE$ hay OG là trung trực của KE hay E đối xứng với K qua OG. Do GK = GJ và tứ giác AJGK nội tiếp nên AG là phân giác của góc *AHK* mà $GKA = GJH = \text{GHJ}$ suy ra *H, K* đối xứng nhau qua AG. Suy ra HE là đường thẳng steiner của K trong tam giác AGO. Theo một tính chất quen thuộc thì *HK* đi qua trực tâm của tam giác *AGO*.

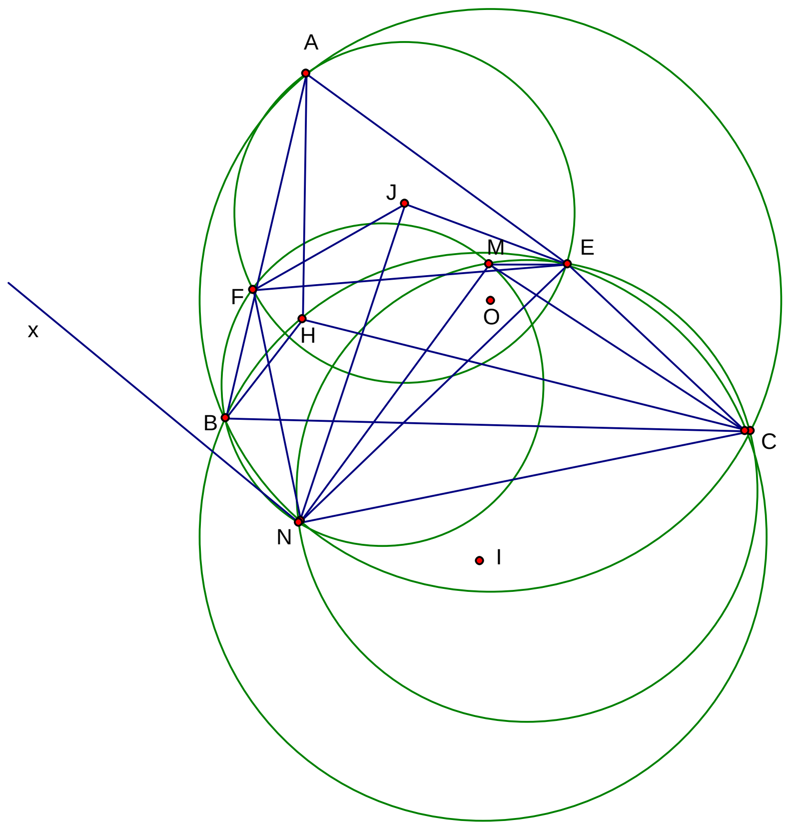
Bài 62. Chi tam giác *ABC* nhọn nội tiếp (*O*) có trực tâm *H*, gọi *M* là một điểm thuộc cung nhỏ *BC* của (I) ngoại tiếp tam giác *BHC*, tiếp tuyến tại *M* của (I) cắt các cạnh *AB*, *AC* lần lượt tại *F*, *E*. Gọi *N* là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BFM* với (*O*) (*N* khác *B*), *J* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF*.

a, Chứng minh: 4 điểm *C*,*N*,*M*,*E* cùng nằm trên một đường tròn.

b, Chứng minh: *NJ* là phân giác của góc *ENF*.

c, Chứng minh: Đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF* tiếp xúc với (*O*).

Giải



a, Vì ABNC và *MNBF* là tứ giác nội tiếp nên ta có biến đổi góc sau:

$MNC = BNC - BNM = 180^0 - BAC - AFE = AEF$ suy ra *CNME* là tứ giác nội tiếp.

b, Ta có: $ENF = BNC - BNF - CNF = 180^0 - BAC - BMF - CME = BMC - BAC$,

$BHC - BAC = 180^0 - 2BAC = 180^0 - EJF$ Suy ra *ENFJ* là tứ giác nội tiếp. Lại có *JE* = *JF* nên *NJ* là phân giác của góc *ENF*.

c, Dựng tiếp tuyến *Nx* của (*O*). Ta có $FNx = BNx + FNB = BCN + FMB = BCN + MCB = MCN = FMN$ suy ra *Nx* cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EJF*.

Bài 63. Cho tam giác nhọn ABC có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I, gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, trên cung nhỏ BC lấy điểm D, đường tròn (L) qua A tiếp xúc ngoài với (K) tại D cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt cạnh BC tại S.

a. Chứng minh: $SDEC$ nội tiếp.

b. Chứng minh: $EJFS$ nội tiếp.

c. Chứng minh: BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EJF.

Giải:

a. Ta có:

$SDE = 360^\circ - EDF - SDF$

$= 180^\circ - EDF + 180^\circ - SDF = BAC + ABC$

$= 180^\circ - ACB$

Suy ra tứ giác $SDEC$ nội tiếp.

b. Ta có

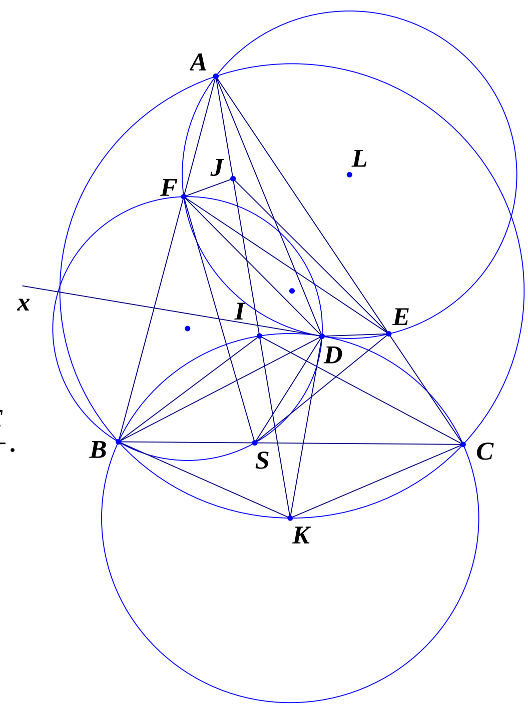
$ESF = ESD + DSF = ECD + FBD$

$= 180^\circ - DAC - ADC + 180^\circ - DAB - ADB$

$= 360^\circ - \left(DAB + ADB\right) - \left(DAC + ADC\right)$

$= BDC - BAC = BIC - BAC = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB$

$= \frac{180^\circ - BAC}{2}.$



Lại có:

$EJF = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(AEF + AEF\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - EAF\right) = \frac{180^\circ + BAC}{2}.$

Suy ra $ESF + EJF = 180^\circ$ hay $EJFS$ là tứ giác nội tiếp.

c. Kẻ tiếp tuyến chung Dx của $(K), (L)$ ta có: $xDB = DCB$

và $xDF = DEF$.

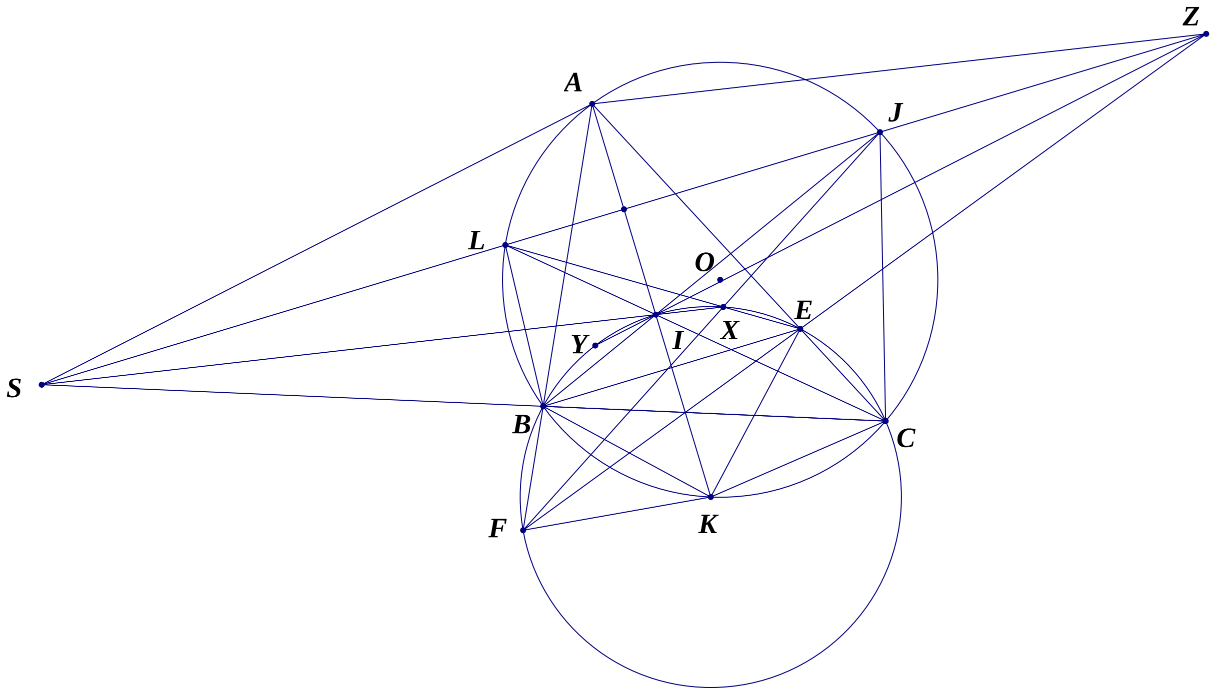
Ta có $FSB = FDB = DCB + DEF = DES + DEF = SEF$ suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EJF.

Bài 64. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I), các đường thẳng AI, BI, CI cắt (O) lần lượt tại K, J, L.

a. Chứng minh: K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b. Đường tròn (K) ngoại tiếp IBC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác C, B. Chứng minh: EL, FJ cắt nhau trên (K).

c. Gọi giao điểm của EL, FJ là X, EF cắt JL tại Z, ZL cắt (K) tại Y. Chứng minh: X, Y đối xứng nhau qua AI.



Giải:

a. Ta có: $BIK = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}ABC = KAC + IBC = KBC + IBC = IBK$ suy ra tam giác BIK cân tại K hay $KB = KI = KC$ (đpcm).

b. Giả sử JL cắt BC tại S, SI cắt (K) tại X. ta sẽ chứng minh: L, X, E thẳng hàng và F, X, J thẳng hàng. Thật vậy ta có: $SI.SX = SB.SC = SL.SJ$ suy ra tứ giác $LIXJ$ nội tiếp.

Ta có $JXE = 360^\circ - IXE - JXL = 180^\circ - IXE + 180^\circ - JXI = ACL + CLJ = BJL + JBC$ $= 180^\circ - LIJ = 180^\circ - LXJ$ nên $LXJ + JXE = 180^\circ$ hay L, X, E thẳng hàng. Tương tự ta cũng có F, X, J thẳng hàng hay EL, FJ cắt nhau tại một điểm nằm trên (K).

c. Ta có I là trực tâm tam giác LKJ (tính chất quen thuộc), BE là trung trực của AK. Lại có $FC \parallel SZ$ và $ZFC = SCF$ nên $SFCZ$ là hình thang cân, dẫn đến AK là trung trực của SZ, nên $AIZ = AIS$ mặt khác $ZIX = SIY$ đối đỉnh, suy ra $KIX = KIY$ suy ra $IX = IY$ hay X, Y đối xứng nhau qua AK.

Bài 65. Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH, phân giác trong góc BAC cắt BC tại O, qua O dựng các đường thẳng OM vuông góc với AB, ON vuông góc với AC.

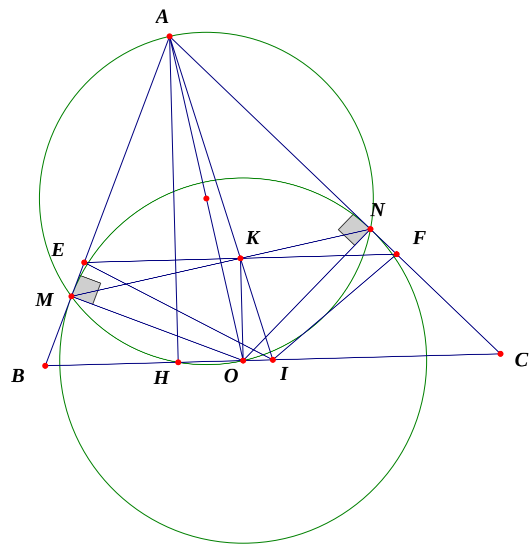
a. Chứng minh: 5 điểm A, M, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh: AH là phân giác của MHN.

c. Đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt MN tại K. Chứng minh: $KN.AC = KM.AB$.

d. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh: A, K, I thẳng hàng.

Giải:



Do $AO \perp MN$ nên ta có: $ONK = NAO$ (cùng phụ với NOA), ta cũng có: $NOK = 90^\circ - NOC = OCA$.
Từ đó suy ra ΔOKN ” $\Delta COA(g.g)$

Dẫn đến $\dfrac{KN}{OA} = \dfrac{ON}{CA}$, tương tự ta cũng có: $\dfrac{KM}{OA} = \dfrac{OM}{BA}$. Do $OM = ON$ suy ra $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{AC}{AB}$ hay $KM.AB = KN.AC.$

Dựng đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F, ta dễ chứng minh được: $KEMO, KNFO$ nội tiếp, kết hợp với $OMK = ONK$ ta có biến đổi góc:

$OEK = OMK = ONK = OFK$ suy ra tam giác OEF cân tại O, dẫn tới $KE = KF$, theo bổ đề hình thang ta có A, K, I thẳng hàng.

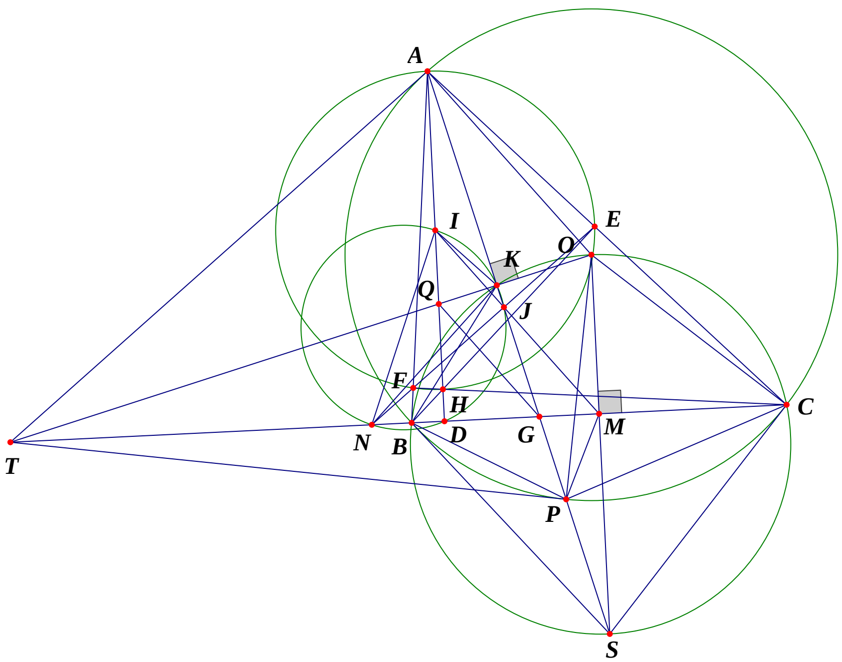
Bài 66. Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ các đường cao BE, CF cắt nhau tại điểm H. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở S, đường thẳng SA cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P. Gọi K là hình chiếu của O lên AS, M là giao điểm của SO và BC, I là trung điểm của AH, J là giao điểm của MI với EF, OK cắt BC tại T, cắt AH tại Q, EF cắt BC tại N.

a. Chứng minh: $MAC = PAB.$

b. Chứng minh: $GQ \parallel MI$.

c. Chứng minh: $IKN = 90^\circ$.

Giải



Ta có: $SB^2 = SP.SA = SM.SO$ suy ra $AOMP$ là tứ giác nội tiếp.
Dẫn đến $AMO = APO = AOP = PMS$. Hay MB là phân giác của AMP.

Suy ra $AMB = \frac{1}{2}AMP = \frac{1}{2}AOP = ACP = 180^\circ - ABP$

$\Rightarrow ABP = AMC$

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta ABP(g.g)$.

Suy ra $MAC = PAB$ (đpcm).

b. Giả sử tiếp tuyến tại A, P của (O) cắt nhau ở T', từ chứng minh ở câu a ta suy ra 5 điểm A, T', P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính OT' hay $T'MO = 90^\circ$ tức là T', B, C thẳng hàng. Suy ra $T' \equiv T$. Các tứ giác $TAKD, DQKG$ nội tiếp nên $KQG = KDG = KAT = KOA$ suy ra $GQ \parallel OA$ mà $MI \perp EF$ tại J và $OA \perp EF$ (tính chất quen thuộc), suy ra $QG \parallel MI$.

c. Do tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC có AJ, AM là các trung tuyến tương ứng nên $JAF = MAC = BAP \Rightarrow A, J, P$ thẳng hàng hay J thuộc AS.

Ta có $DIJ = DQG = DKG$ nên $IJKD$ nội tiếp, ta cũng có $IJDN$ nội tiếp nên 5 điểm I, J, K, D, N cùng nằm trên đường tròn đường kính NI dẫn đến $IKN = 90^\circ$.

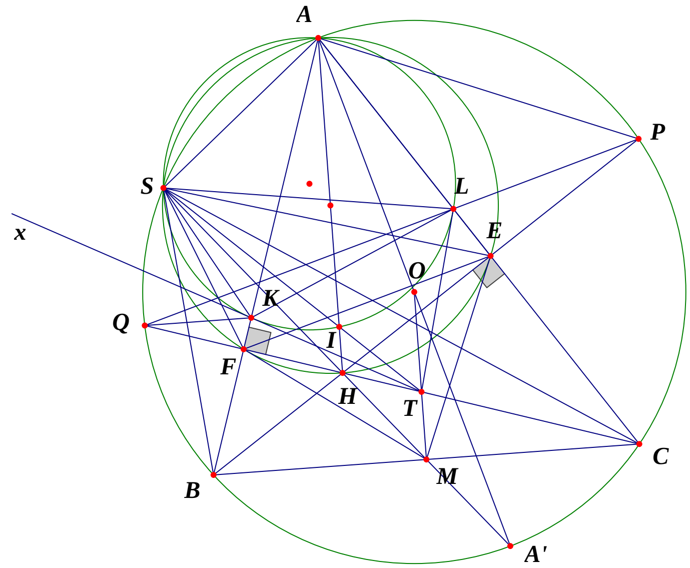
Bài 67. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O; R)$ có các đường cao BE, BF cắt nhau tại H. các đường thẳng BE, CF cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P, Q. Đường thẳng PQ cắt AC tại L, gọi K là điểm trên cạnh AB sao cho $QK \parallel BC$. Gọi S là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O).

a. Chứng minh: Tứ giác $ASKL$ nội tiếp.

b. Gọi I là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL với AH, SI cắt CF tại T. Chứng minh: KT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL

c. Chứng minh: T nằm trên trung trực của cạnh BC.

Giải:



a. Ta có $HFE = HBC = HQP$ suy EF song song với PQ dẫn tới $\frac{CE}{CL} = \frac{CF}{CQ} = \frac{BF}{BK}$(1), lại có $\Delta SBF \sim \Delta SCE$ (g.g) suy ra $\frac{BF}{CE} = \frac{SB}{SC}$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{BK}{CL} \Rightarrow \Delta SBK \sim \Delta SCL$ (c.g.c) nên $SKB = SLC$ suy ra $SKA = SLA$ hay $ASKL$ là tứ giác nội tiếp.

b. Ta thấy Q, H đối xứng nhau qua AB nên $KHQ = KQH = BCF = BAH = KST$ suy ra tứ giác $SKHT$ nội tiếp.

Ta có $SKx = 180^\circ - SKT = SHF = SAK$ nên KT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL.

c. Ta có biến đổi góc $FSH = FAH = KSI$, $KIS = KAS = FHS$, $IKT = IAT = MFH$ suy ra $\Delta SFM \sim \Delta SKT$ (g.g), lại có $\Delta SKL \sim \Delta SFE$ (g.g). Gọi M là trung điểm của BC thì suy ra $\Delta LKT \sim \Delta EFM$ (c.g.c) nên $TK = TL$ hay TL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL. Thêm nữa ta cũng có: $\frac{HM}{MS} = \frac{MF^2}{MS^2}, \frac{TI}{TS} = \frac{TK^2}{TS^2}$ mà $\frac{MF}{MS} = \frac{TK}{TS}$ suy ra $\frac{HM}{HS} = \frac{TI}{TS}$ dẫn tới $TM \parallel IH$.

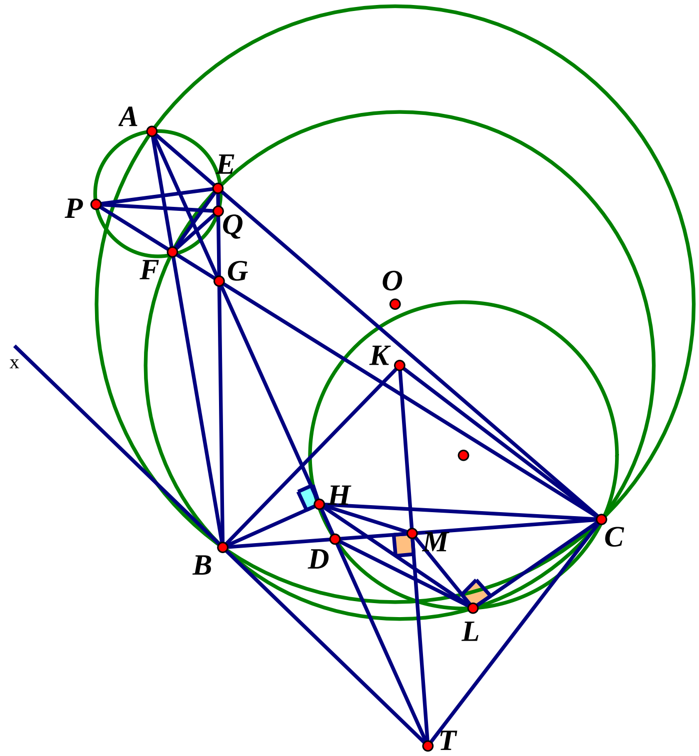
Bài 68. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. BE, CF cắt nhau tại G, AB cắt BC tại D. Gọi H là hình chiếu của B trên AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DHC cắt (K) tại L, gọi M là trung điểm của BC, tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt nhau tại T, đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BE, CF lần lượt tại P, Q.

a. Chứng minh: $AQ \parallel BT$.

b. Chứng minh: A, T, G thẳng hàng.

c. Chứng minh: $ML \perp LC$.

Giải:



a, Ta có: $QAE = BCE = FBx$ nên $AQ // BT$.

b, Ta có: $APF = FEC = FCT$ nên $AP // CT$, $BQP = CFE = CBE$ nên $PQ // BC$ do đó $\Delta APQ \backsim \Delta TCB(g.g)$ suy ra $\dfrac{GQ}{GB} = \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AQ}{TB} \Rightarrow \Delta AQG \backsim \Delta TBG(c.g.c)$

suy ra $AGQ = BGT \Rightarrow A,\ G,\ T$ thẳng hàng.

c, Ta có : $THB = TMB = 90^{\circ}$ nên $HBTM$ nội tiếp, có $TBL = BCL = DHL \Rightarrow BHLT$ nội tiếp hay $THML$ nội tiếp, dẫn đến $MLC = HLC - HLM = HDC - HTM = DMT = 90^{\circ}$.

Bài 69. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại A của (O) cắt CB tại K, kẻ tiếp tuyến KD với (O). Gọi $G,\ E,\ F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên $AB,\ BC,\ CA$.

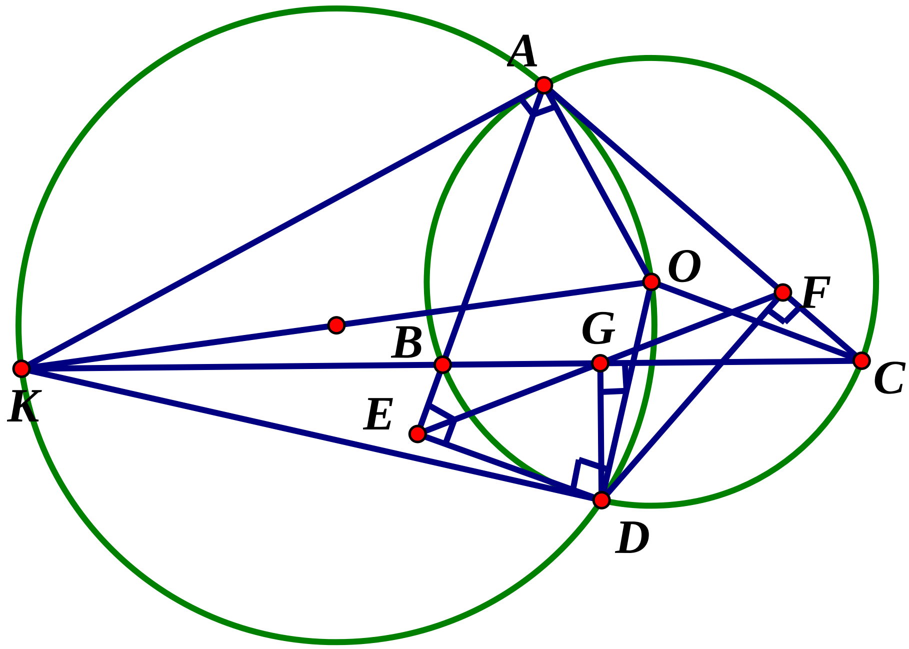
a, Chứng minh : $KA^2 = KB.KC$.

b, Chứng minh : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

c, Chứng minh: $BC = 2R\sin BAC$.

d, Chứng minh: G là trung điểm của EF.

Giải



a, Học sinh tự chứng minh.

b, Từ chứng minh câu a, ta suy ra: $\Delta KBA \backsim \Delta KAC \Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{AB}{AC}$, tương tự $\frac{KB}{KC} = \frac{BD}{BC}$ mà $KA = KB$ suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

c, Kẻ đường kính BK của (O) ta có : $BCK = 90^\circ$, lại có $BAC = BKC$, suy ra $\sin BAC = \sin BKC = \frac{BC}{BK} \Leftrightarrow BC = BK.\sin BAC$, hay $BC = 2R\sin BAC$.

d, Áp dụng câu a, ta có: Tứ giác $BGDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $GE = BD.\sin GDE = BD.\sin ABC$, tương tự ta cũng có: $GF = CD.\sin FCG = CD.\sin ACB$.

Từ đó suy ra $\frac{GE}{GF} = \frac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB} = \frac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB}$, dựng đường cao AH của tam giác ABC thì ta có: $\frac{GE}{GF} = \frac{BD.\sin ABC}{CD.\sin ACB} = \frac{AB.\sin ABC}{AC.\sin ACB} = \frac{AH}{AH} = 1$, suy ra $GE = GF$.

Mặt khác, từ các tứ giác $BGDE,\ CFGD,\ ABCD$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$EGD = EBD = ACD = 180^\circ - DGF \Rightarrow EGD + DGF = 180^\circ$ hay $E,\ G,\ F$ thẳng hàng. Nói cách khác G là trung điểm của EF.

Bài 70. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O), các đường cao $BE,\ CF$ cắt nhau tại H. Vẽ dây BD cắt CH tại K nằm giữa H và C. Gọi G là giao điểm $CD,\ BE$.

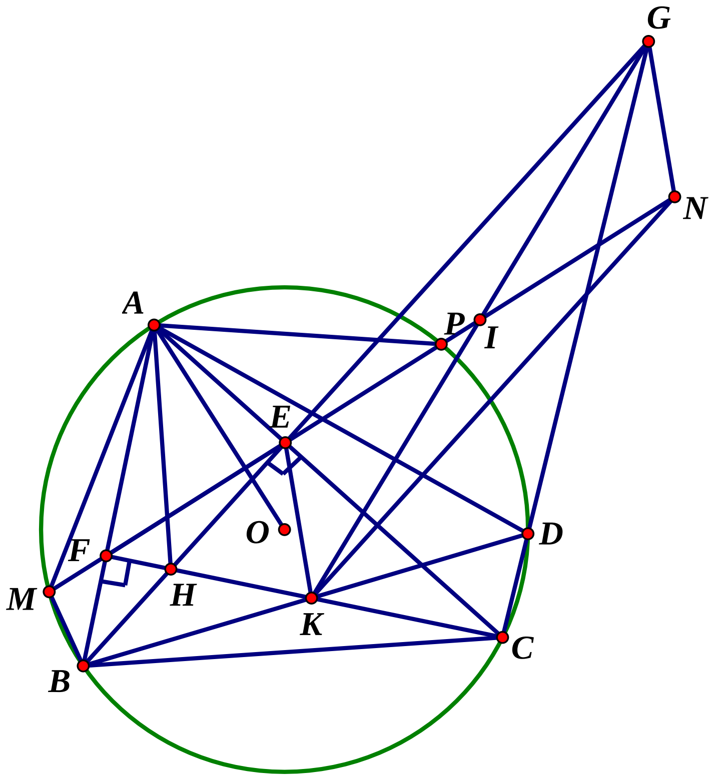
a, Chứng minh : $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

b, Chứng minh : $\frac{CE}{BF} = \frac{EG}{KF}$.

c, EF cắt (O) tại M. Chứng minh: AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF.

d, Chứng minh: EF đi qua trung điểm GK.

Hướng dẫn giải



a, Học sinh tự chứng minh.

b, Xét ΔBFK và ΔCEG ta có: $BFK = CEG = 90^\circ$, $ABD = ACD$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung) suy ra $\Delta BFK \backsim \Delta CEG(g.g)$ nên $\dfrac{CE}{BF} = \dfrac{EG}{KF}$.

c, Ta chứng minh được tính chất quen thuộc là $OA \perp EF$, giả sử đường thẳng EF cắt các cung nhỏ $AB,\ AC$ lần lượt tại $M,\ Q$ suy ra ΔAMQ cân tại A, suy ra $APM = AMP$, lại có $APM = ABM \Rightarrow AMF = ABM$ hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF.

d, Dựng đường thẳng qua K song song với BE cắt EF tại N. Ta chứng minh: $EKNG$ là hình bình hành.

Do $HE \parallel KN$ và $\Delta HBF \backsim \Delta HCE$ nên ta có $\dfrac{KN}{KF} = \dfrac{HE}{HF} = \dfrac{CE}{BF}$ lại có $\Delta BFK \backsim \Delta CEG(cmt)$ suy ra $\dfrac{CE}{BF} = \dfrac{GE}{KF} \Rightarrow \dfrac{KN}{KF} = \dfrac{GE}{KF}$ hay $KN = GE$ nên $EKNG$ là hình bình hành. Suy ra EF đi qua trung điểm I của GK hay EF chia đôi GK.

Bài 71. Từ M nằm ngoài đường tròn (O) ta dựng các tiếp tuyến MB, MC đến (O) (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến MDA sao cho tia MA nằm giữa hai tia MB, MO và $MD < MA$. Gọi H là giao điểm của MO và BC, AM cắt BC tại K.

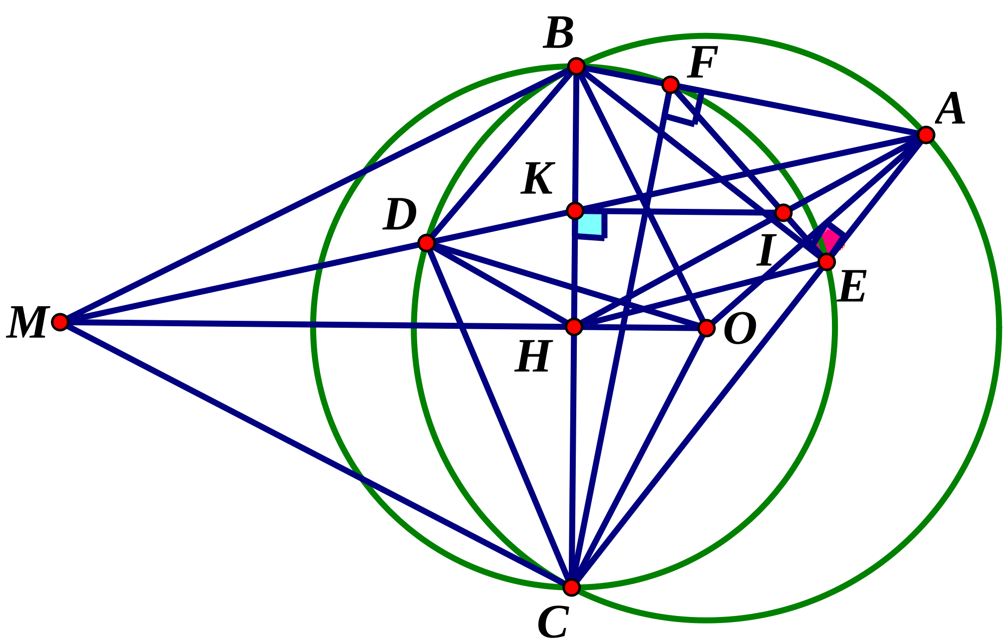
a, Chứng minh: Bốn điểm M, B, O, C cùng nằm trên một đường tròn và $MB^2 = MA.MD$.

b, Chứng minh: $\Delta MDH \backsim \Delta MOA$ từ đó suy ra $DHB = DCA$.

c, Chứng minh: $\dfrac{CH}{HA} = \dfrac{CD}{CA}$.

d, Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC tại F, E; EF cắt AH tại I. Chứng minh: $IK \parallel MO$.

Giải



a, Vì MB, MC là tiếp tuyến của (O) nên $MBO = MCO = 90^\circ$ suy ra bốn điểm M, B, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính MO.

Ta có $MBD = MDA = \frac{1}{2}\text{sđ}BD$ suy ra $\Delta MBD \backsim \Delta MAB(g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MB} \Leftrightarrow MB^2 = MA.MD(1)$.

b, Ta có $MO \perp BC$ tại H. Trong tam giác vuông MBO ta có : $MH.MO = MB^2\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $MH.MO = MD.MA \Rightarrow \Delta MDH \backsim \Delta MOA(c.g.c)$ dẫn tới $DHM = OAM \Rightarrow DHOA$ là tứ giác nội tiếp, mà $OAM = OAD = ODA = OHA \Rightarrow DHB = AHB = \frac{1}{2}DHA = \frac{1}{2}DOA = DCA$.

c, Từ câu b, kết hợp với $ABDC$ nội tiếp ta có : $CHA = 180^\circ - BHA = 180^\circ - DCA = DBA$

$\Rightarrow \Delta DBA \backsim \Delta CHA(g.g) \Rightarrow \frac{CH}{HA} = \frac{BD}{BA}(3)$, mặt khác cũng từ $\Delta MBD \backsim \Delta MAB$ ta có $\frac{BD}{BA} = \frac{MB}{MA}(4)$ tương tự ta cũng có $\frac{CD}{CA} = \frac{MC}{MA}(5)$ mà $MC = MB(6)$. Từ $(3),(4),(5),(6)$ ta suy ra $\frac{CH}{HA} = \frac{CD}{CA}$.

d, Từ $\Delta DBA \backsim \Delta CHA$ ta suy ra $HAC = BAD$, lại có $BFEC$ nội tiếp nên $AEI = ABC \Rightarrow \Delta AEI \backsim \Delta ABK$

$\Rightarrow \frac{AI}{AK} = \frac{AE}{AB}(7)$. Ta cũng có $AEH = 180^\circ - HEC = 180^\circ - HCE = 180^\circ - ADB = MDB = MBA$ nên $\Delta AEH \backsim ABM \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AM}(8)$. Từ $(7),(8)$ ta suy ra $\frac{AI}{AK} = \frac{AH}{AM}$ hay $IK \parallel HM$ hay $IK \parallel MO$.

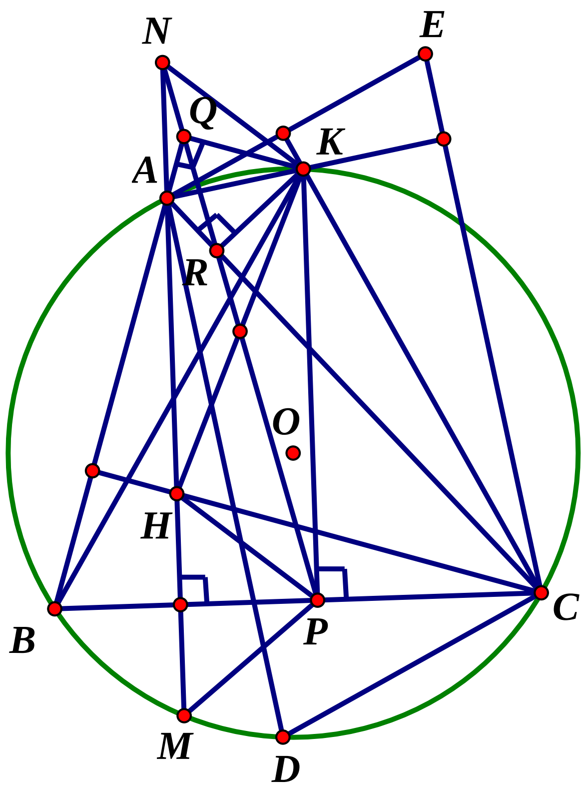
Bài 72. Cho ΔABC nội tiếp $(O;R)$ có trực tâm là điểm H, D là điểm trên cung nhỏ BC, dựng hình bình hành $ADCE$ gọi K là trực tâm ΔACE. Gọi P, Q là hình chiếu vuông góc của K trên BC, AB. Giả sử HA cắt (O), PQ lần lượt tại M, N.

a, Chứng minh : Tứ giác $KPMN$ nội tiếp.

b, Chứng minh: PQ đi qua trung điểm của HK.

c, Chứng minh: $PQ \le AC$.

Giải



a, Ta có $AKC = 180^\circ - AEC = 180^\circ - ADC$. Suy ra $AKC + ADC = 180^\circ$ nên $AKCD$ là tứ giác nội tiếp hay $K \in (O)$. Do $MN \parallel KP$, tứ giác $KQBP$ nội tiếp nên $QPK = QBK = AMK$ nên tứ giác $KPMN$ nội tiếp.

b, Do tứ giác $KPMN$ là hình thang nội tiếp trong một đường tròn nên $KPMN$ là hình thang cân nên $KNM = PMN$, mặt khác ta cũng dễ chứng minh được H, M đối xứng nhau qua BC nên $PMN = PHM \Rightarrow KNM = PHM$ hay $KNHP$ là hình bình hành.

c, Hạ $KR \perp AC$ thì ba điểm N, P, R thẳng hàng (đường thẳng Sim sơn của điểm K đối với ΔABC).

Từ đó suy ra $\Delta PKQ \backsim \Delta CKA \Rightarrow \dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{KQ}{KA} \le 1$.

Bài 73. Cho tam giác nhọn ABC không cân $(AB < AC)$, nội tiếp (O), lấy điểm P trên cạnh AB sao cho $BOP = ABC$, điểm Q trên cạnh AC sao cho $COQ = ACB$.

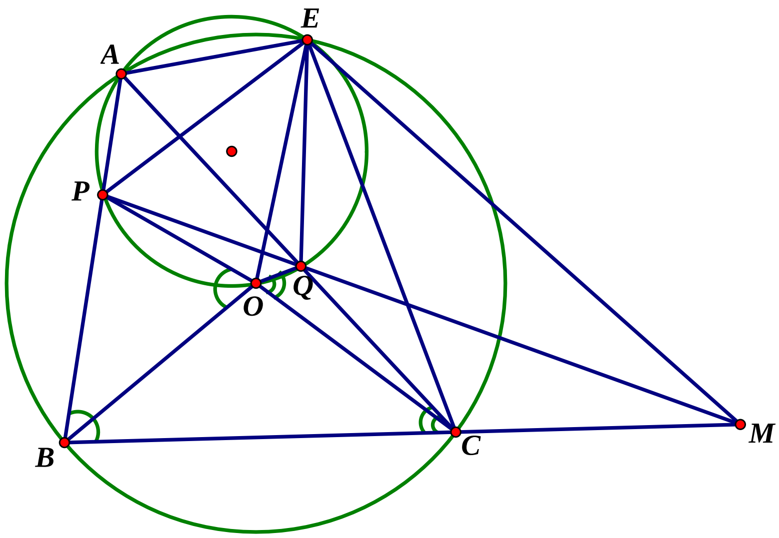
a, Chứng minh : O, A, P, Q nằm trên một đường tròn.

b, Giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔAPQ cắt đường tròn (O) tại E (khác A).

c, Chứng minh : $AE \parallel BC$.

d, Giả sử BC cắt PQ tại M. Chứng minh: ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAPQ.

Giải



Ta có: $POQ = 360^{\circ} - POB - BOC - COQ = 360^{\circ} - B - 2A - C = 180^{\circ} - BAC \Rightarrow PAQ + POQ = 180^{\circ}$ hay $APOQ$ là tứ giác nội tiếp. Ta có $AEOQ$ nội tiếp nên

$EOQ = EAQ = EBC = \frac{1}{2}EOC$ suy ra $EOQ = QOC = ACB$ hay $AE \parallel BC$ suy ra tứ giác $ABCE$ là hình thang cân.

Do $APE = AOE = 2ABE$ suy ra $PBE = PEB = B - EBC = B - C$, lại có:

$BMP = BCA - CQM = BCA - AQP = BCA - AOP = C - \left(AOB - BOP\right)$

$= C - \left(2C - B\right) = B - C$ nên $PEB = BMP$ hay $BPEM$ là tứ giác nội tiếp

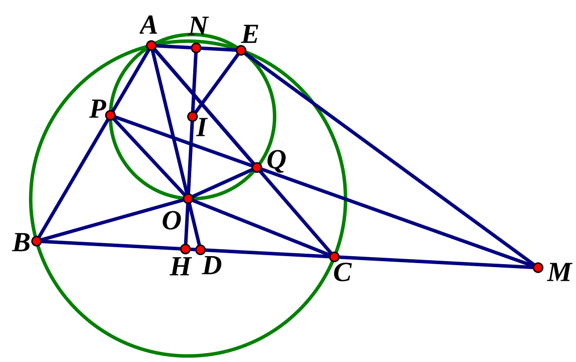
Mà $PB = PE$ nên PM là phân giác của EMB điều đó chứng tỏ ME nằm trên đường thẳng đối xứng với BC qua PQ.

Mặt khác ta cũng có: $EQM = 180^{0} - EQP = 180^{0} - ABC = PEB$

Suy ra $\Delta EQM \sim \Delta PEM \Rightarrow \frac{EM}{QM} = \frac{PM}{EM} \Leftrightarrow EM^{2} = PM.QM$ hay

ME là tiếp tuyến của đương tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Ta cũng có thể làm theo cách khác:



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ thì suy ra điểm I nằm trên đường trung trực của cạnh BC và AE. Giả sử OI cắt BC, AE lần lượt tại H, N. Để chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ ta chứng minh: $IE \perp ME$. Tức là chứng minh: Tứ giác $IHEM$ nội tiếp.

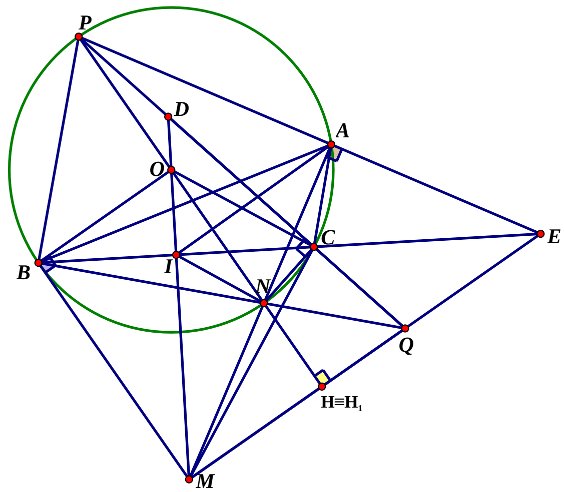
Thật vậy, ta có: $NIE = \frac{1}{2}AIE = AQE$ ta chỉ cần chỉ ra tứ giác $EQCM$ nội tiếp, thật vậy ta có: $EQC = EAB = ECM \Rightarrow EQCM$ nội tiếp, suy ra $NIE = \frac{1}{2}AIE = AQE = EMH \Rightarrow EIHM$ nội tiếp dẫn đến $IEM = IHM = 90^{0}$ (đpcm).

Bài 74

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tiếp tuyến tại B,C cắt nhau ở M, đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ 2 là N. Đường thẳng qua C vuông góc với NC cắt (O), BN lần lượt tại P,Q đường thẳng AP cắt BC tại E. Gọi D là giao điểm của MO và PQ, H là giao điểm của PQ và MQ.

a, Chứng minh: Tứ giác $AMBD$ nội tiếp.
b, Chứng minh: $NH \perp MQ$.
c, Chứng minh: Q,M,E thẳng hàng.

Giải



a, Gọi I là giao điểm của OM với BC.

Do D nằm trên trung trực của BC nên $BDM = CDM = 90^0 - BCP$.

Ta cũng có: $BAM = BPN = 90^0 - BNP = 90^0 - BCP$ suy ra $BDM = BAM$ hay $AMBD$ là tứ giác nội tiếp.

b, Ta có: $NCQ = 90^0$. Để chứng minh $NH \perp MQ(1)$ ta chứng minh: $NHQ = 90^0$ tức là quy về chứng minh tứ giác $NHQC$ nội tiếp.

Mặt khác ta có: $NQC = 90^0 - QNC = 90^0 - BPC = 90^0 - BOM = BMD$ suy ra tứ giác $BMQD$ nội tiếp.

Do $BDM = MDQ \Rightarrow MB = MQ = MC$ suy ra $MQC = MCQ = 90^0 - NCM = 90^0 - NPC = CNP$ Hay tứ giác $NHQC$ nội tiếp (đpcm).

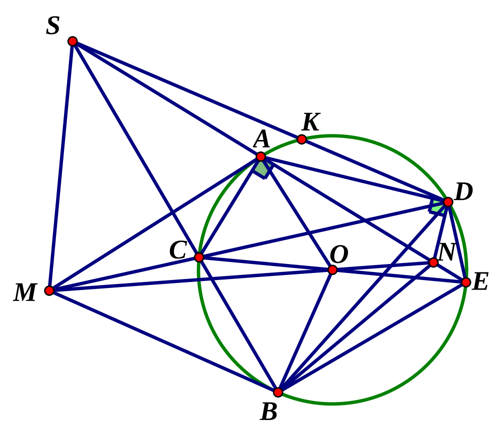
c, Giả sử PN cắt ME tại H_1, ta chứng minh: $H \equiv H_1$. Tức là chứng minh: $PH_1 \perp ME$.

Do MB, MNA lần lượt là tiếp tuyến tại B, cát tuyến qua M của (O) và $MO \perp BC$ tại I nên ta có: $MN.MA = MB^2 = MI.MO$ suy ra tứ giác $AOIN$ nội tiếp, mặt khác ta cũng có: $MIAE$ nội tiếp nên: $MNH_1 = ONA = OIA = AEM$ suy ra AEH_1N nội tiếp hay $NH_1E = 90^0 \Leftrightarrow NH_1 \perp ME(2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $H \equiv H_1$ hay M,Q,E thẳng hàng.

Bài 75
Cho đường tròn (O) và điểm M ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm). Qua M kẻ cát tuyến MCD $(MC < MD)$, gọi E là điểm đối xứng với C qua O. Đường thẳng EA cắt BC tại S, SD cắt (O) tại K, MO cắt EA tại N.
a, Chứng minh tam giác OAC và tam giác MAS đồng dạng.
b, Chứng minh tam giác BKC cân.
c, Chứng minh $AD \perp DN$.

Giải



a, Ta có CE là đường kính của (O) nên $CAE = CAS = 90^0$. $SAM = CAO = 90^0 - MAC$. Tam giác AOC cân tại O nên để chứng minh: tam giác OAC và tam giác MAS đồng dạng ta cần chỉ ra tam giác AMS cân tại M. Ta có $NSB = 90^0 - SCA = 90^0 - AEB = 90^0 - MOB = NMB$ suy ra $SMBN$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác $ANM = BNM \Rightarrow MS = MB = MA$ hay tam giác AMS cân tại M (đpcm).

b, Từ tam giác MSB cân tại M $\Rightarrow MSB = MBS = MBC = BDC = BDM \Rightarrow$ tứ giác $MSDB$ nội tiếp $\Rightarrow DBM = SDM$. Mặt khác $CBK = CDK = MDS = MBS = MBC \Rightarrow CB = CK \Rightarrow \Delta BCK$ cân.

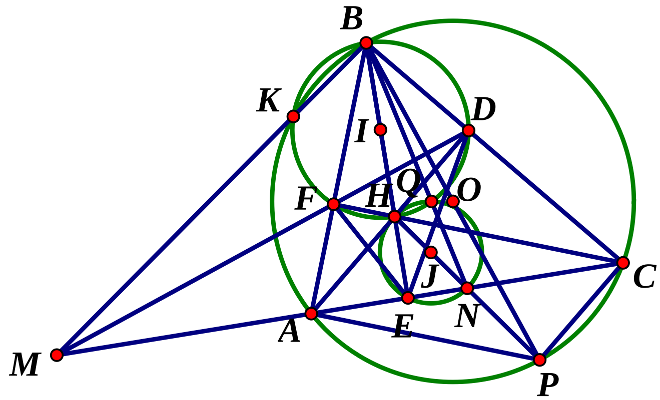
c, Theo chứng minh trên tứ giác $SMBN$ nội tiếp, từ đó suy ra năm điểm M, S, D, N, B nằm trên một đường tròn $\Rightarrow SND = SBD = CED$
Ta có: $DAE = DCE$ (cùng chắn cung DE), $DNA = DNS = DBC = DEC$
$\Rightarrow DAE + DNA = DCE + DEC = 90^0 \Rightarrow AD \perp DN$

Bài 76
Cho tam giác nhọn ABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AC cắt DF tại M. Gọi N là trung điểm của AC. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC cắt BM tại K.

a, Chứng minh: Tứ giác $FDEN$ nội tiếp.
b, Chứng minh: N, H, K thẳng hàng.

c, Chứng minh: $MH \perp BN$.

Giải



a, Ta có tính chất quen thuộc: BE là phân giác của DEF, các tứ giác $AFHE, CEHD, AFDC$ nội tiếp. Suy ra $DEF = 2DAF = DNF$ vậy $EFDN$ là tứ giác nội tiếp.

b, Dựng đường kính BP của (O). Ta có các tính chất quen thuộc:

$BHCP$ là hình bình hành suy ra H, N, P thẳng hàng. Mặt khác $BKH = BKP = 90^0$ suy ra K, H, P thẳng hàng. Từ đó suy ra N, H, K thẳng hàng.

Chú ý: 4 điểm E, N, D, F thuộc đường tròn Ơle của tam giác ABC.

Gọi J là trung điểm của HN thì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEN. Gọi I là trung điểm BH thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFHD$.

Ta có $MF.MD = ME.MN$ nên điểm M nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (I) và (J) suy ra $MH \perp IJ$, mà IJ là đường trung bình của tam giác BHN suy ra $MH \perp BN$.

Chú ý: Bài toán này là một trường hợp đặc biệt của định lý Brocard.

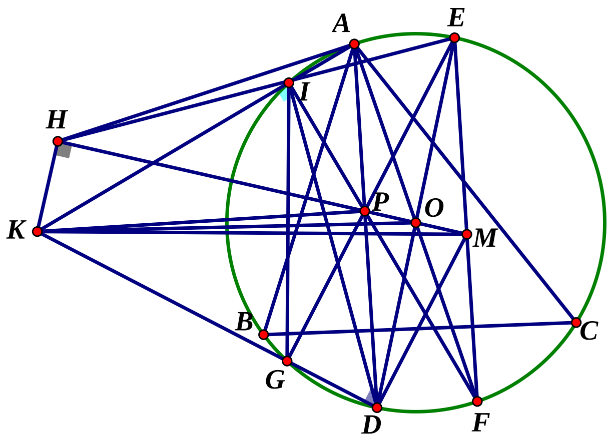
Bài 77

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và một điểm P bất kì nằm trong tam giác $(P \neq O)$. Đường thẳng AP cắt (O) tại D, dựng các đường kính DE, AF của (O). Gọi G, I lần lượt là các giao điểm của EP, FP với đường tròn $(O), K$ là giao điểm của AI và DG. Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên OP, đường thẳng OP cắt EF tại M.

a, Chứng minh: HO là phân giác của IHD.

b, Chứng minh $KD \perp DM$.

Giải



a, Vì DE, AF là đường kính của (O) và $HK \perp OK$ nên $KIP = KGP = KHP = 90^0$ suy ra 5 điểm K, H, I, P, G cùng nằm trên đường tròn đường kính PK.

Suy ra $IHP = IGP = IGE = IDE$ hay $IHO = IDO$.

Tức là tứ giác I, H, O, D nội tiếp mà $OD = OI \Rightarrow IHO = DHO \Rightarrow HO$ là phân giác của góc IHD.

b, Để chứng minh: $KD \perp DM$ ta phải chứng minh tứ giác $HKDM$ nội tiếp.

Theo câu a) ta có: $IHO = DHO$, $IHO = IHP = IKP = IGE = IDE = 90^0 - IED = 90^0 - KAD$ nên $DHO = 90^0 - KAD$, ta cũng có $KHD = 90^0 - DHO \Rightarrow KHD = 90^0 - \left(90^0 - KAD\right) = KAD$ suy ra tứ giác $KHDA$ nội tiếp. Ta cũng có $OA = OF$, $AP \parallel MF$ nên tứ giác $APFM$ là hình bình hành suy ra $DAM = PFM = IGE = IHP = MHD$ nên 5 điểm A, H, D, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính KM suy ra $KD \perp DM$.

Bài 78

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là P, Q $(P \neq B, Q \neq C)$. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt EF lần lượt tại M, N.

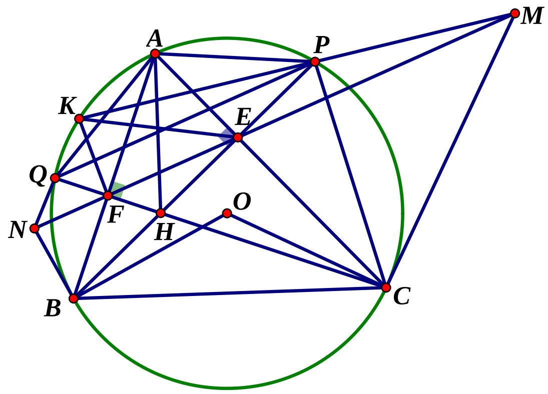
a, Chứng minh: Tứ giác $AEHF$ nội tiếp và $AH = AP = AQ$.

b, Chứng minh tam giác MEC cân tại M.

c, Giả sử MP cắt đường tròn (O) tại K. Chứng minh: $ME^2 = MK.MP$.

d, Chứng minh: N, Q, K thẳng hàng.

Giải



a, Vì BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên H là trực tâm của tam giác suy ra $HEA = HFA = 90^0 \Rightarrow AEHF$ nội tiếp.

Ta có: $BAH = BCH$ (cùng phụ với ABC)

Mà $BCH = BCQ = BAQ$ suy ra $QAB = HAB$, tam giác QAH có AF là đường cao đồng thời cũng là trung tuyến nên tam giác QAH cân tại A. Chứng minh tương tự ta có PAH cân tại A từ đó suy ra $AP = AH = AQ$.

b, Ta có $MEC = AEF$ mà tứ giác $BFEC$ nội tiếp (hs tự chứng minh) suy ra $AEF = ABC$

Lại có $ABC = ACM$ (do CM là tiếp tuyến của (O) tại C). Từ đó suy ra $MEC = MCE$ hay MEC là tam giác cân tại M.

c, Xét tam giác MCK và MPC ta có: KMC chung, $MCP = MKC \Rightarrow \Delta MCK \sim \Delta MPC$

suy ra $\dfrac{MC}{MK} = \dfrac{MP}{MC} \Leftrightarrow MC^2 = MP.MK$, theo b ta có $MC = ME$ suy ra $ME^2 = MK.MP$.

d, Từ chứng minh ở câu c) suy ra $\Delta MPE \sim \Delta MEK$ ta có: $EPK = 180^0 - EPM = 180^0 - MEK = FEK$, mà $EPK = BPK = BAK = FAK \Rightarrow FEK = FAK$ hay $AEFK$ là tứ giác nội tiếp. Tức là K là giao điểm của (AEF) với (O). Tương tự nếu giả sử NQ cắt (O) tại R thì R cũng là giao điểm của (AEF) với (O) điều đó chứng tỏ $K \equiv R$ hay N, Q, K thẳng hàng.

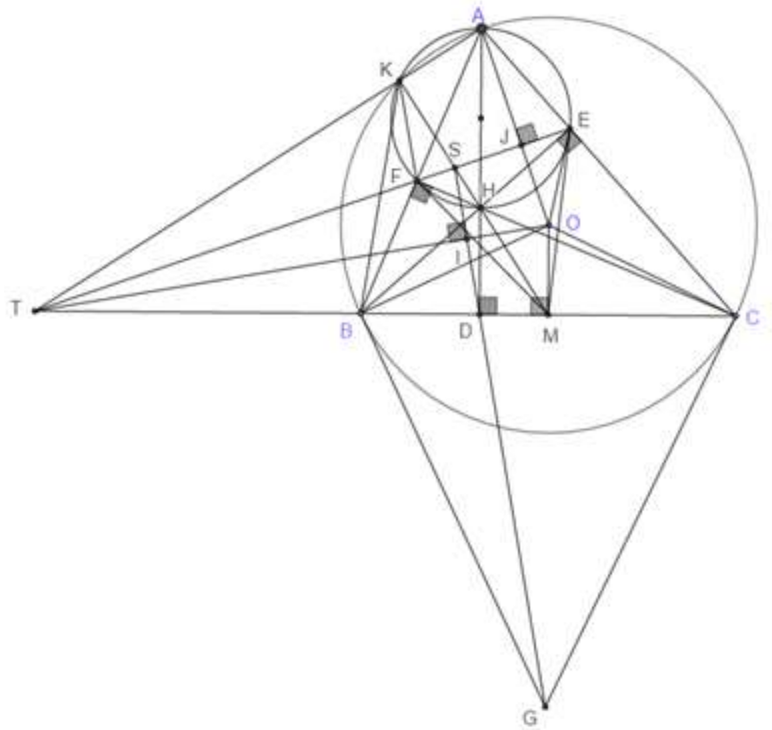
Bài 79

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại G. $GD \cap EF = S$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Giả sử $EF \cap BC = T$, $AT \cap (O) = K$

a) Chứng minh 5 điểm A, K, F, E, H cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh M, S, H thẳng hàng.

Giải



a) Học sinh tự làm.

b) Tứ giác $EFDM$ nội tiếp và AD là phân giác của EDF nên $MDE = FDB = TEM$ suy ra

$\Delta EMD \backsim \Delta TME \Rightarrow ME^2 = MD.MT$

Thay $ME^2 = MB^2 = MO.MG$ suy ra $MO.MG = MD.MT \Rightarrow \Delta EMD \backsim \Delta TME$

$\Delta OMT \backsim \Delta DMT \Rightarrow SD \perp TO$ tại I.

Gọi J là giao điểm của AO và EF thì $OA \perp EF$ tại J.

Ta có: $TS.TJ = TI.TO = TD.TM = TE.TF \Rightarrow AKSJ$ là tứ giác nội tiếp nên $SKA = 90^0 \Rightarrow SK \perp TA.$

Ta cũng có: 5 điểm A, K, E, F, H nằm trên cùng một đường tròn nên $HK \perp TA$ nên $\overline{K,S,H}$

(1). Lại có: $TK.TA = TD.TM \Rightarrow AKDM$ nội tiếp, suy ra $ADM = AKM = 90^0 \Leftrightarrow MK \perp KA$ suy ra

$\overline{M,H,K}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra M, S, K thẳng hàng.

Bài 80

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), đường thẳng AI kéo dài cắt (O) tại K. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A song song với EF cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh: $AE^2 = AP.AQ$ và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

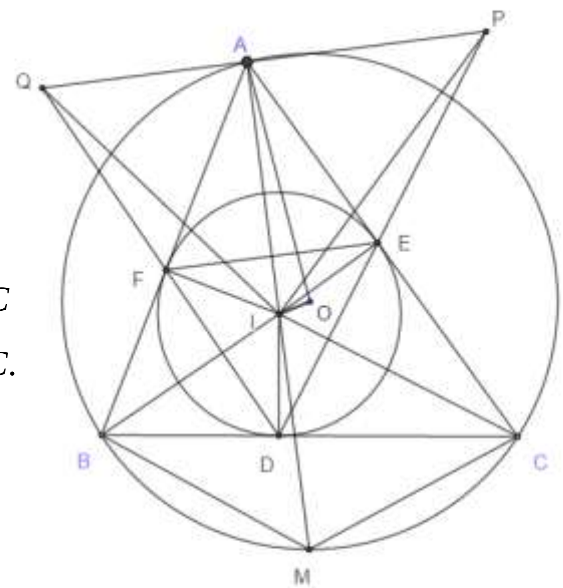
b) Giả sử $AIO \le 90^0$. Tìm GTNN của biểu thức: $\dfrac{AB+AC}{BC}$.

Giải

a) Do E, F là các tiếp điểm của (I) với AC, AB nên $EFD = CED, FED = BFD, EF//PQ$ suy ra

$EFD = AQF, FED = APE$. Mặt khác $PEA = CED, AQF = BFD$ suy ra $\Delta FQA \backsim \Delta PEA$

$\Rightarrow \dfrac{QA}{EA} = \dfrac{AF}{AP} \Leftrightarrow AP.AQ = AE.FA = AE^2$.



Ta có biến đổi góc sau:

$BIK = \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B = KAC + IBC = KBC + IBC = IBK$

Suy ra tam giác BKI cân tại K nên $KB = KI = KC$

Hay K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác: $ABKC$

ta có: $AK.BC = AB.CK + AC.BK = BK(AB+AC)$

Tam giác AOD cân $AOI \le 90^0 \Leftrightarrow IA \ge IK \Rightarrow$

$IA + IK \ge 2IK \Leftrightarrow AK \ge 2IK$ suy ra $\dfrac{BK(AB+AC)}{BC} \ge 2IK$

Hay $\dfrac{BK(AB+AC)}{BC} \ge 2BK \Leftrightarrow \dfrac{AB+AC}{BC} \ge 2$. Khi tam giác ABC đều thì $\dfrac{AB+AC}{BC} = 2$. Vậy

GTNN của $\dfrac{AB+AC}{BC} = 2$.

Bài 81

Từ điểm A ở ngoài $(O;R)$ dựng các tiếp tuyến AB, AC của (O), gọi H là trung điểm BC.

Dựng đường kính BD của (O), dựng $CK \perp BD$. Tia AO cắt (O) lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh: $ABOC$ nội tiếp và $AB^2 = AM.AN$.

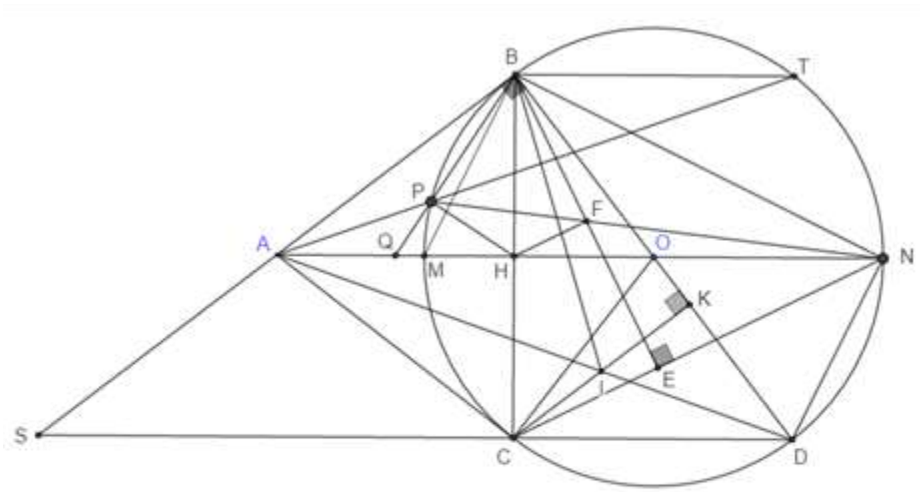
b) Chứng minh: $MH.AN = AM.HN$.

c) AD cắt CK tại I. Chứng minh I là trung điểm của CK.

d) Dựng $BE \perp CN$, gọi F là trung điểm BE, NF cắt (O) tại P. AP cắt (O) tại T. Chứng minh:

$BT//MN$ và BP đi qua trung điểm K của AH.

Giải



a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90^0$ suy ra 4 điểm A, B, O, C nằm trên đường tròn đường kính AO.

Ta có: $ABM = BNA = \frac{1}{2}\text{sđ}BM$ suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta ABN \Rightarrow AB^2 = AM.AN$.

b) Vì $ABM = MCB = MBC$ nên MB là phân giác của góc ABC. Mặt khác $MB \perp NB$ nên NB là phân giác ngoài của góc ABC. Áp dụng tính chất phân giác ta có: $\frac{BA}{BH} = \frac{MA}{MH} = \frac{NA}{NH}$ hay $MA.NH = NA.MH$.

c) Kéo dài AB cắt CD tại S thì AO là đường trung bình của tam giác BSD suy ra A là trung điểm của BS. Do $CQ//BS$ nên theo định lý Thales ta có: $\frac{IQ}{AB} = \frac{ID}{DA} = \frac{IC}{SA}$ mà $AB = SA$ $\Rightarrow IQ = IC$.

d) Vì F là trung điểm của BE nên $HF \perp BE, BF//CE$. Ta có $BFH = BCE = BPF$ nên $BPHF$ là tứ giác nội tiếp suy ra $BPH = 90^0$. Ta có: $AHP = PBC = PCA$ nên $APHC$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $PAH = PCB = PTB \Rightarrow BT//MN$.

BP cắt AH tại K thì $KH^2 = KP.KB$. Lại có $PAH = PCB = PBA \Rightarrow \Delta AKP \backsim \Delta BKA$

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KP} = \dfrac{BK}{KA} \Leftrightarrow KA^2 = KP.BK$, từ đó suy ra $KH = KA$ đpcm.

Bài 82

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn $AB < AC$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

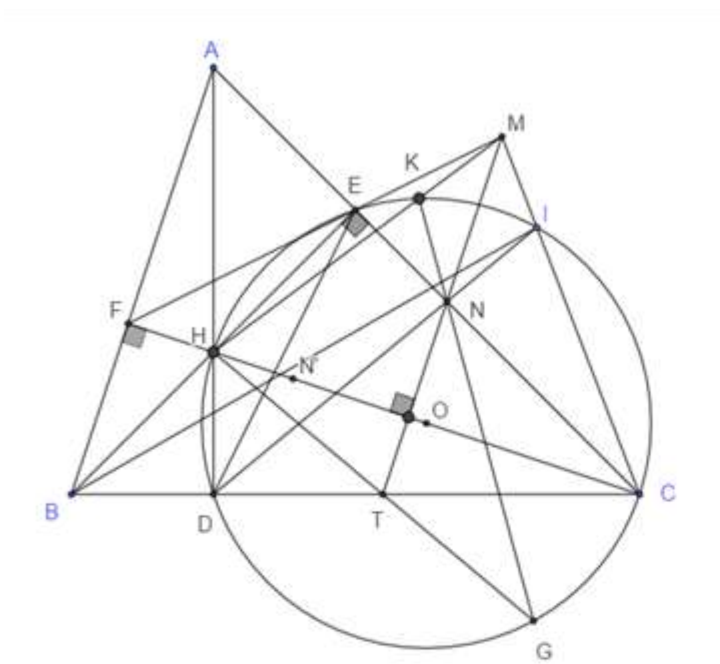
a) Chứng minh tứ giác $DHEC$ nội tiếp và xác định tâm (O) của đường tròn nội tiếp tứ giác đó.

b) Trên cung nhỏ EC của (O) lấy điểm I sao cho $IC > IE$, DI cắt CE tại N. Chứng minh: $NI.ND = NE.NC$.

c) Gọi M là giao điểm của EF với IC. Chứng minh: $MN \perp CH$.

d) Đường thẳng HM cắt (O) tại K, KN cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là G, MN cắt BC tại T. Chứng minh: H, T, G thẳng hàng.

Giải



a) Học sinh tự chứng minh.

b) Học sinh tự chứng minh.

c) Để chứng minh: $MN \perp CH$ ta quy về chứng minh: $MN // AB$, tức là chứng minh: $AFE = EMN$.

Ta có: Tứ giác $BFEC, DEIC$ nội tiếp nên $AFE = ACB = DIE$. Ta cần chứng minh:

$DIE = EMN$. Tức là quy về chứng minh: $MENI$ là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có: $MEC = AEF = ABC = DEC = DIC$ suy ra tứ giác $MENI$ nội tiếp (đpcm).

d) Để chứng minh: H, T, G thẳng hàng ta sẽ chứng minh: $HGN = TGN$, ta có biến đổi góc liên quan như sau: $HGN = HCK = KMN$ như vây để chứng minh: $HGN = TGN$ ta cần chỉ ra $KMN = TGN \Leftrightarrow \Delta TGN \backsim \Delta KMN$. Thật vậy.

+ Xét tam giác ENM, TNC ta có: $EMN = EIN = NCT, ENM = TNC$ suy ra

$\Delta ENM \backsim \Delta TNC(g.g)$ suy ra $\dfrac{EN}{NT} = \dfrac{NM}{NC}$ (1)

+ Xét tam giác ENK, GNC ta có: $KEN = CGN, ENK = GNC \Rightarrow \Delta ENK \backsim \Delta GNC(g.g)$ suy ra

$\dfrac{EN}{GN} = \dfrac{NK}{NC}(2)$. Từ (1) và (2) ta suy ra $\Delta TGN \backsim \Delta KMN(c.g.c)$ đpcm.

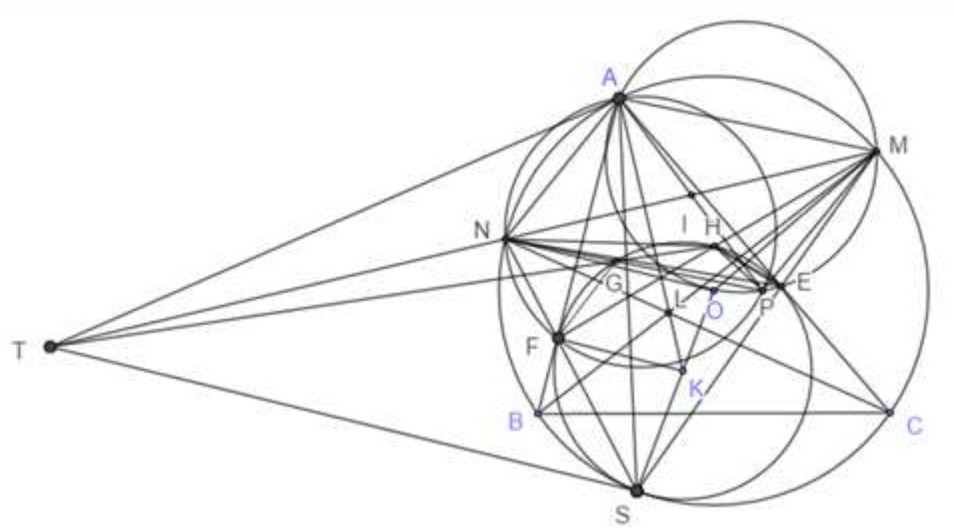
Bài 83

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn K tiếp xúc với CA, CB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại S. SE, SF lần lượt cắt (O) tại M, N khác S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A.

a. Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình bình hành.

b. Gọi EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F. Gọi GH cắt MN tại T. Chứng minh tam giác AST cân.

Giải



a. Các tứ giác $ANFP, AMEP, AMSN$ nội tiếp nên ta có biến đổi góc:

$ANP = AFP = AEP = AMP(1)$

Ta có: $APM = AEM = CES = EFS = EAN$ Suy ra $NA // PM$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $ANPM$ là hình bình hành.

b. Các tam giác SKE, SOM

cân tại K và O suy ra $KES = KSE = OMS$ suy ra $KE // OM$. Chứng minh tương tự ta có:

$KF // ON$. Theo định lý Thales ta có: $\dfrac{SF}{SN} = \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SM} \Rightarrow EF // MN$. Từ đó ta có:

$MNE = NEF = GHF \Rightarrow MNGH$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $TM.TN = TG.TH$, giả sử TS cắt (O) tại S_1 cắt (K) tại S_2 thì $TM.TN = TG.TH = TS.TS_1 = TS.TS_2$ suy ra $TS_1 = TS_2 \Rightarrow S_1 \equiv S_2 \equiv S$ (do 2 đường tròn (O) và (K) tiếp xúc nhau tại S). Suy ra $TM = TN = TS^2$ hay TS chính là tiếp tuyến chung của (O) và (K).

Ta sẽ chứng minh: TA cũng là tiếp tuyến của (O). Các đường thẳng AP và MN cắt nhau tại I là trung điểm của mỗi đường.

Ta có: TS là tiếp tuyến của (O) nên $\Delta TNS \backsim \Delta TSM$ hay $\dfrac{TM}{TN} = \dfrac{S_{TSM}}{S_{TNS}} = \left(\dfrac{SM}{SN}\right)^2$ $(*)$

Mặt hác ta cũng có: $AMI = AMN = ASN$, do $PEMA$ nội tiếp ta có:

$NAS = MAI = MAP = PES = FES = NST = NAS$ suy ra $\Delta AIM \backsim \Delta ANS \Rightarrow AM.SN = AN.SM$

suy ra $\left(\dfrac{SM}{SN}\right)^2 = \left(\dfrac{AM}{AN}\right)^2$ thay vào $(*)$ ta suy ra $\dfrac{TM}{TN} = \left(\dfrac{AM}{AN}\right)^2$ hay TA là tiếp tuyến của (O), vậy $TA = TS$.

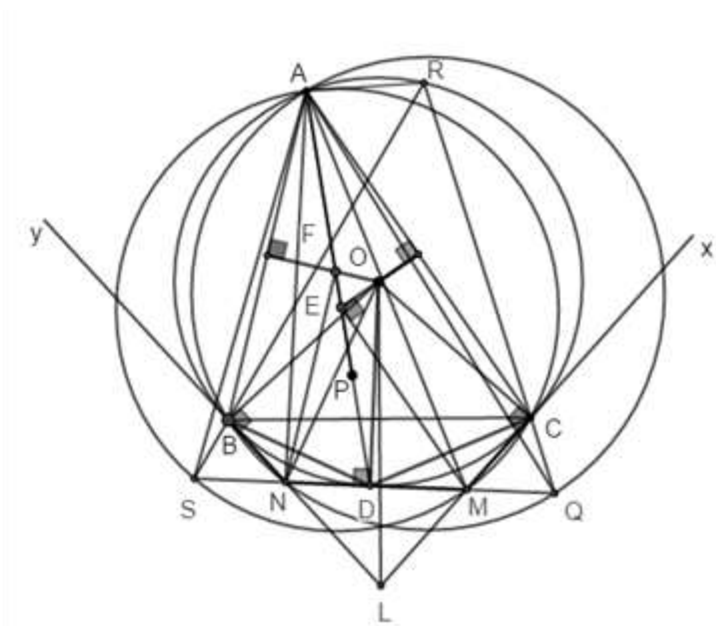
Bài 84

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là một điểm nằm trong tam giác ABC. Trung trực của CA, AB cắt PA tại E, F. Đường thẳng qua E song song với AC cắt tiếp tuyến tại C của (O) tại M. Đường thẳng qua F song song với AB cắt tiếp tuyến tại B của (O) tại N.

a. Chứng minh MN là tiếp tuyến của (O)

b. Giả sử MN cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACM, ABN lần lượt tại S, Q khác MN. Chứng minh $\Delta ABC \backsim \Delta ASQ$ và SB cắt CQ tại một điểm nằm trên (O).

Giải



a. Giả sử AP cắt (O) tại D, ta chứng minh DM, DN là các tiếp tuyến của (O).

Thật vậy, $FN // AB, EN // AC$ nên $OFN = 90^0$, $OEM = 90^0$. Kết hợp các điều kiện

OF là trung trực của AB, tam giác OAD cân và tứ giác $OFBN$ nội tiếp ta có biến đổi góc sau:

$ODF = OAF = OBF = ONF$ suy ra tứ giác

$FNDO$ nội tiếp, suy ra $OND = 90° \Rightarrow DN$ là tiếp tuyến của (O). Chứng minh tương tự ta có: DM cũng là tiếp tuyến của (O).

b) Giả sử SB, CQ cắt nhau tại R , ta chứng minh: $ABCR$ nội tiếp. Tức là chứng minh: $RCA = RBA$, muốn có điều này ta cần chứng minh: ΔABS ” ΔACQ. Thật vậy, ta có: $ASQ = ASM = 180° - ACM = ACx = ABC$, $AQS = AQN = 180° - ABN = ABy = ACB$ suy ra ΔABS ” ΔACQ (g.g). Từ đó suy ra đpcm.

Bài 85. Cho đường tròn $(O;R)$ Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm). Qua A, kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E, đường thẳng ME cắt đường tròn tại F, đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

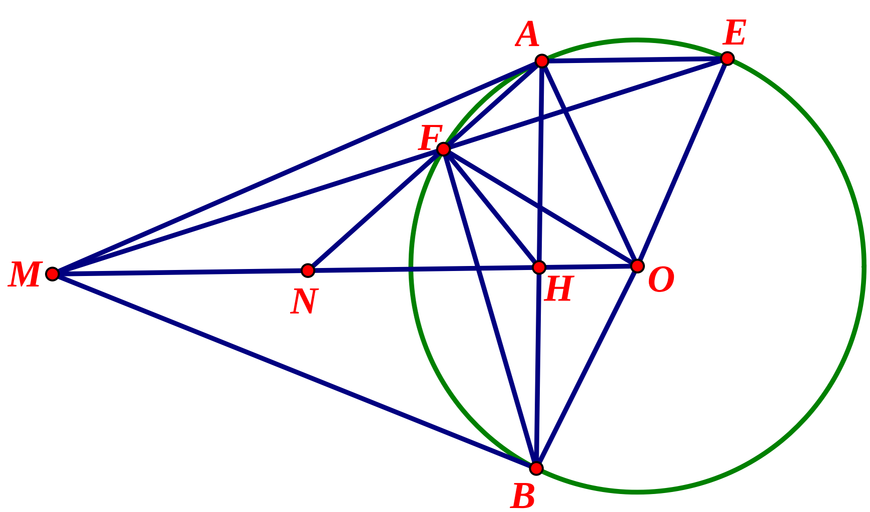
1. Chứng minh: Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$.

3. Chứng: $HFN = 90°$ và $MN = HI$.

4. Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

Hướng dẫn giải



1. Học sinh tự làm.

2. Do $MO \perp AB, AE // MO$

Suy ra $BFE = 90^\circ$, tứ giác $MFHB$ có $MFB = MHB = 90^\circ$ nên $MFHB$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $FMH = FBH$ (cùng chắn cung FH). Lại có: $FBA = FAM = \frac{1}{2} sd\, FA$ từ đó suy ra $FMA = NMF$ (1)

Tam giác MNF và tam giác ANM ta có: MNF chung (2). Từ (1), (2) ta suy ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$ (g.g) suy ra $\frac{MN}{NF} = \frac{NA}{MN}$ hay $MN^2 = NF.NA$ (*)

Cũng có thể chứng minh ngắn hơn: $NMF = AEF$ (so le trong), $AEF = MAF = \frac{1}{2} sd\, AF$ suy ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM\,(g.g)$.

3. Từ chứng minh ở câu b) ta có: $NFM = NMA = HMB = HFB$ suy ra $HFB + BFM = HFB + NFM = 90^\circ$ hay $HF \perp AN$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHN ta có: $NF.NA = NH^2\,(**)$. Từ $(*),(**)$ ta suy ra $MN^2 = NH^2 \Leftrightarrow MN = NH$

4. Ta viết lại đẳng thức cần chứng minh thành $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF} + 1 \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{ME}{MF}$.

Ta dễ chứng minh được đẳng thức quen thuộc: $ME.MF = MA^2 \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{MA^2}{MF^2}$. Ta cần chứng minh: $\frac{MB}{MF} = \frac{HA}{HF}$ hay chứng minh: $\Delta BFM \backsim \Delta AFH$ nhưng điều này luôn đúng do $BFM = AFH = 90^\circ$ và $MBF = HAF = \frac{1}{2} sd\, FB$.

Cách khác: $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF} + 1 \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$. Ta có $HF^2 = FA.FN$ và $\frac{EF}{MF} = \frac{FA}{FN}$ (định lý Thales) nên vế trái bằng: $\frac{HB^2}{FA.FN} - \frac{FA}{FN} = \frac{HB^2 - AF^2}{FA.FN} = \frac{HA^2 - AF^2}{FA.FN} = \frac{HF^2}{HF^2} = 1$

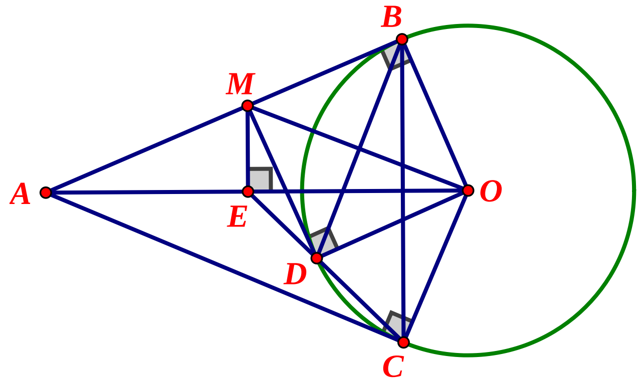
Bài 86

Từ một điểm A nằm ngoài đường $(O;R)$ kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B,C là các tiếp điểm). Điểm D thuộc cung nhỏ BC, CD cắt OA tại E, đường thẳng qua E song song với BC cắt AB tại M.

a. Chứng minh: $EMBD$ là tứ giác nội tiếp.

b. MD là tiếp tuyến của (O).

Hướng dẫn giải



a. Do $ME//BC$ nên ta có: $AME = ABC = \frac{1}{2}BOC$, lại có:

$$BDE = DBC + DCB = \frac{1}{2}sd\,CD + \frac{1}{2}sd\,BD = \frac{1}{2}sd\,BC = \frac{1}{2}BOC$$

suy ra $AME = BDE$ hay $EMBD$ là tứ giác nội tiếp.

b. Ta có $MBOE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MO (hs tự chứng minh) từ đó suy ra 5 điểm M, B, O, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $MDO = 90^\circ$ hay MD là tiếp tuyến của (O).

Bài 87

Cho tam giác nhọn $ABC : AB < AC$, đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Gọi K là giao điểm của EF, BC, M là giao điểm của FD và đường tròn (O). H là giao điểm của BE, CF, AH cắt BC tại D.

a. Chứng minh: $AE.AC = AF.AB$

b. Tứ giác $KFOM$ là tứ giác nội tiếp và $KF.DM = KM.DF$.

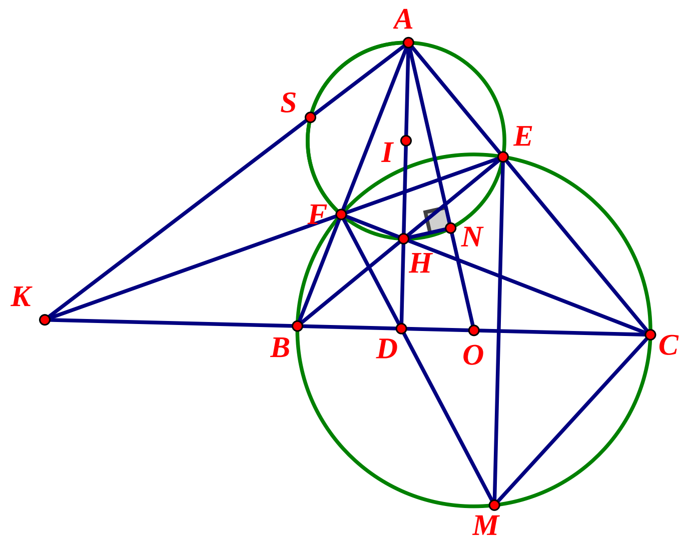
c. Gọi S là giao điểm của AK và đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh: $AS.AK = AF.AB$.

d. Chứng minh: S, H, O thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a. Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (O) suy ra $AEF = ABC \Rightarrow \Delta AEF$ ” $\Delta ABC\,(g.g)$. Suy ra

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE.AC = AF.AB$$



b. Ta có: $KFM = KFB + BFM = KCE + BFM = BFM + BFM = 2BFM = BOM$

Hay $KFM = KOM$ suy ra $KFOM$ là tứ giác nội tiếp

Mặt khác $OF = OM$ suy ra $FKO = MKO$ hay KO là phân giác của FKM. Theo tính chất phân giác ta có: $\frac{KF}{KM} = \frac{DF}{DM}$ đpcm.

c. Vì H là trực tâm của ΔABC nên $AEH = AFH = 90°$ suy ra 4 điểm A, E, H, F nằm trên đường tròn đường kính AH. Suy ra S thuộc đường tròn tâm I đường kính AH, tứ giác $ASFE$ nội tiếp nên $ASF = FEC, BFEC$ nội tiếp nên $FEC = FBK$ suy ra $KSFB$ nội tiếp, $\Rightarrow \Delta ASF \backsim \Delta ABK \Rightarrow AS.AK = AF.AB$.

d. Giả sử đường tròn (I) cắt AO tại N, ta có: $ANE = AFE = ACO$, suy ra $ENOC$ nội tiếp, tương tự $FNOC$ nội tiếp. Ta có

$HNC = 360° - HNE - ENC = 180° - HNE + 180° - ENC = HAC + 180° - EOC =$

$EBC + 180° - EOC = 180° + EBC - 2EBC = 180° - EBC$

suy ra $BHNC$ nội tiếp. Giả sử KH cắt (I) tại N' suy ra $EFHN'$ nội tiếp. Suy ra $KH.KN' = KE.KF = KB.KC \Rightarrow BHN'C$ nội tiếp, suy ra $N' \equiv N$. Suy ra $KNO = 90°$ hay H là trực tâm của tâm giác AKO suy ra $OH \perp AK$, mà $SH \perp AK$ suy ra S, H, O thẳng hàng.

Bài 88

Cho tam giác nhọn $ABC (AB < AC)$ nội tiếp (O), các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại điểm M đường thẳng AM cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D (khác A). Trên đường thẳng qua

O vuông góc với AD ta lấy điểm $I\left(O,I\right.$ nằm khác phía so với $\left.AD\right)$ dựng đường tròn $\left(I;ID\right)$ cắt các đường thẳng BD,DC lần lượt tại $E,F\left(E\neq D,F\neq C\right)$.

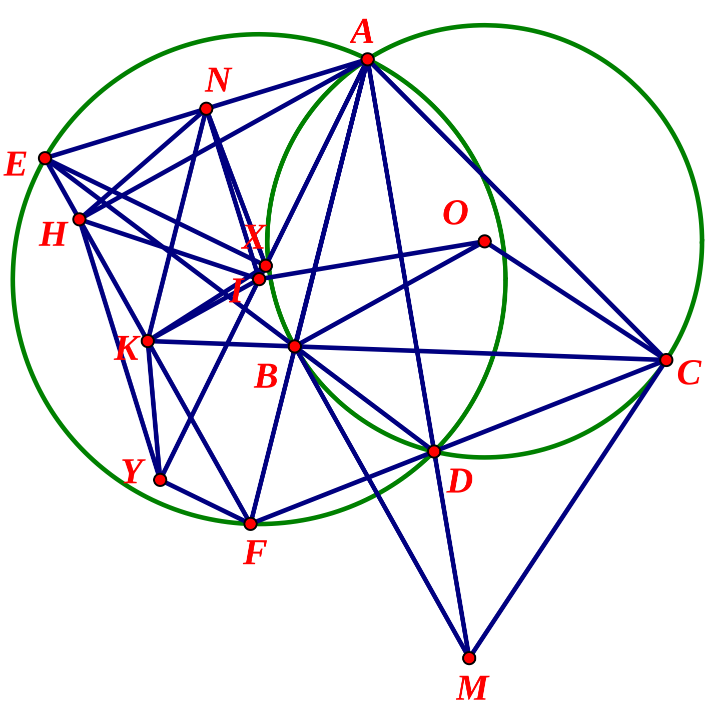
a) Chứng minh: $\dfrac{MA}{MD}=\left(\dfrac{BA}{BD}\right)^2$.

b) Gọi K là giao điểm của BC với EF. Chứng minh: 4 điểm A,C,K,F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh: ΔACD” ΔAKE suy ra K là trung điểm của EF.

d) Dựng EX,FY lần lượt vuông góc với AI. Chứng minh: $KX=KY$.

Hướng dẫn giải:



a. Ta dễ chứng minh được: ΔMDB” $\Delta MBA\left(g.g\right)$ suy ra $\dfrac{S_{\Delta MDB}}{S_{\Delta MBA}}=\left(\dfrac{DB}{BA}\right)^2$ mặt khác $\dfrac{S_{\Delta MDB}}{S_{\Delta MBA}}=\dfrac{MD}{MA}$ từ đó suy ra $\left(\dfrac{DB}{BA}\right)^2=\dfrac{MD}{MA}$.

b. Xét tứ giác $ACKF$ ta có: $ACK=ACB=ADB=ADE=AFE=AFK$ suy ra $ACFK$ là tứ giác nội tiếp.

c. Ta có $ACD = ACF = AKE, ADC = AEK \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta AKE$ suy ra $\dfrac{KE}{KA} = \dfrac{CD}{CA}(*)$, hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\Delta ABD \backsim \Delta AKF$ suy ra $\dfrac{KF}{KA} = \dfrac{BD}{BA}(**)$. Mặt khác ta cũng dễ dàng chứng minh $\Delta MDB \backsim \Delta MBA \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{MB}{MA}$ và $\Delta MDC \backsim \Delta MCA \Rightarrow \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{MC}{MA}$ mà $MC = MB$ suy ra $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{BD}{BA}$ kết hợp với (*), (**) suy ra $\dfrac{KE}{KA} = \dfrac{KF}{KA}$ hay K là trung điểm của EF.

d. Dựng đường cao AH của tam giác AEF, gọi N là trung điểm của AE, ta có 5 điểm E, N, I, Y, K nằm trên đường tròn đường kính EI, 4 điểm A, E, H, I nằm trên đường tròn đường kính AE. Từ đó ta có biến đổi góc $YNK = YEK = YEH = YAH = \dfrac{1}{2}YNH$ suy ra NK là phân giác của góc HNY mà tam giác HNY cân tại N nên NK là trung trực của HI. Chứng minh tương tự ta cũng K thuộc trung trực của HX suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HXY nên $KX = KY$.

Bài 89

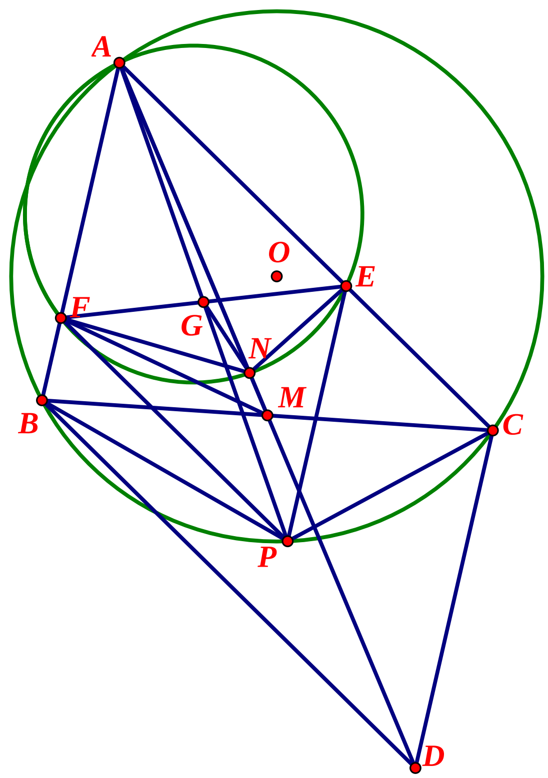
Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và trung tuyến AM , điểm P nằm trên cung BC không chứa A của (O), hai điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $PE // AB, PF // AC$. Đường thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại N khác A. Gọi G là giao điểm của AP và EF, D là điểm đối xứng với A qua M.

a. Chứng minh: $\Delta PBC \backsim \Delta EAP$.

b. Chứng minh: $\Delta NFE \backsim \Delta CAD$ và $NGE = AMB$.

c. Chứng minh: $AP^2 = 2AM.AN$.

Giải:



a. Xét tam giác PBC và tam giác EAP ta có: $PBC = PAE$ (cùng chắn cung PC). Tứ giác $AEPF$ là hình bình hành nên $EPA = PAF$ lại có $PAF = PCB$ từ đó suy ra $EPA = PCB$ suy ra $\Delta PBC \backsim \Delta EAP(g.g)$.

b. Ta có: $NFE = NAE = DAC$, $NEF = NAF = ADC$, suy ra $\Delta NFE \backsim \Delta CAD(g.g)$ và NG, CM là các trung tuyến tương ứng nên $NGE = CMD = AMB$.

c. Từ b. ta suy ra $AGN = AGE + NGE = PMB + BMA = PMA$. Suy ra $NGMP$ là tứ giác nội tiếp. Nên $2AN.AM = 2AG.AP = AP^2$

Bài 90

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), P là một điểm bất kỳ trong tam giác và $Q \in$ cung nhỏ BC của (O). AP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là D, M là trung điểm của AQ, QP cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là K. Dựng đường tròn (w) qua 2 điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD với MP.

a. Chứng minh: $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh: $\Delta KFP \backsim \Delta KRD$ suy ra F là trung điểm của PR.

c. Chứng minh: 4 điểm A, D, E, F nằm trên một đường tròn.

Giải

a. Từ các tứ giác $KPDR, AKDQ$ nội tiếp ta suy ra $DRP = DKP = DAQ$ hay $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 90

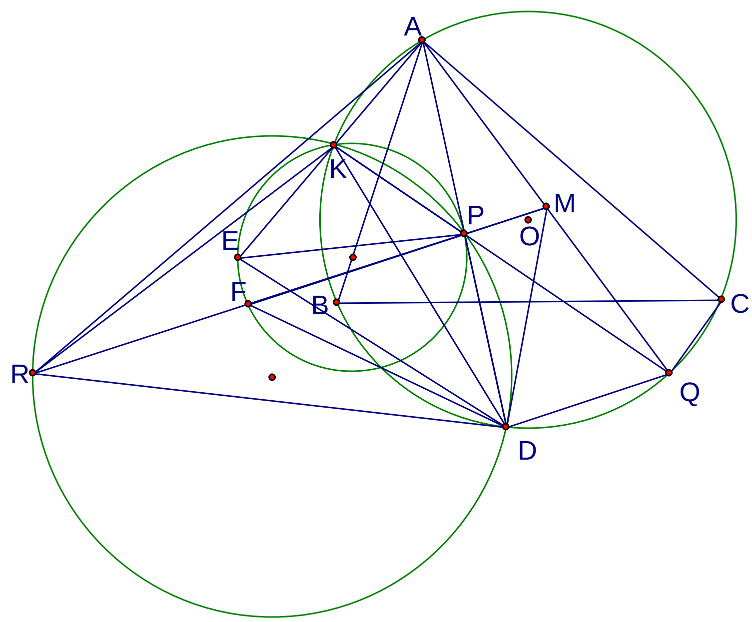
Cho tam giác ABC nội tiếp (O), P là một điểm bất kì trong tam giác và $Q \in$ cung nhỏ BC của (O), AP cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D, M là trung điểm của AQ, QP cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Dựng đường tròn (w) qua 2 điểm P, K tiếp xúc với AP. Các đường thẳng AK, MP lần lượt cắt (w) tại E và F. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD với MP.

a) Chứng minh: $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\Delta KFP \backsim \Delta KRD$ suy ra F là trung điểm của PR.

c) Chứng minh 4 điểm A, D, E, F nằm trên một đường tròn

Giải



a)Từ các tứ giác $KPDR, AKDQ$ nội tiếp ta suy ra $DRP = DKP = DAQ$ hay $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b)Ta có PA là tiếp tuyến của đường tròn (w) và $KPDR$ nội tiếp

$\Rightarrow KFP = KPA = KRD$.

Lại có $KPR = KDR$

$\Rightarrow KPF = KDR$

$\Rightarrow \Delta KFP \backsim \Delta KRD\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{FP}{RD} = \dfrac{KP}{KD}$

Lại có $\Delta KPD \backsim \Delta APQ\,(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{KP}{KD} = \dfrac{AP}{AD}$

$\Delta PRD \backsim \Delta PAM \Rightarrow \dfrac{PR}{RD} = \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{2PA}{AQ}$

$\Rightarrow \dfrac{PR}{RD} = \dfrac{2PA}{AQ} = \dfrac{2KP}{KD} = \dfrac{2FP}{RD}$

$\Rightarrow$ F là trung điểm của RP

c)ta có $KRF = KDP; KFR = 180^0 - KPA = KPD$.

$\Rightarrow \Delta KFR \backsim \Delta KPD\,(g.g)$

Kết hợp với $PKF = DPF$

$\Rightarrow \Delta KPF \backsim \Delta PDF\,(c.g.c)$

$\Rightarrow ADF = PDF = KPF = 180^0 - AEF$

$\Rightarrow$ $ADEF$ là tứ giác nội tiếp

Bài 91

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), trực tâm H, M là trung điểm của BC, đường cao AF, đường tròn đường kính AH (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Dựng đường kính AE của (O), D là giao điểm của AH với (O).

a) Chứng minh: Q, H, M, E thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại H, K của đường tròn ngoại tiếp ΔQHK cắt nhau tại X. Chứng minh $X \in BC$.

c) Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH, KFM tiếp xúc nhau.

Giải

a) Ta có kết quả quen thuộc:

+ H, M, E thẳng hàng

+ H đối xứng với D qua BC

+ Q, H, E thẳng hàng. Do QH, EQ cùng vuông góc với AQ. Từ đó suy ra Q, H, M, E thẳng hàng

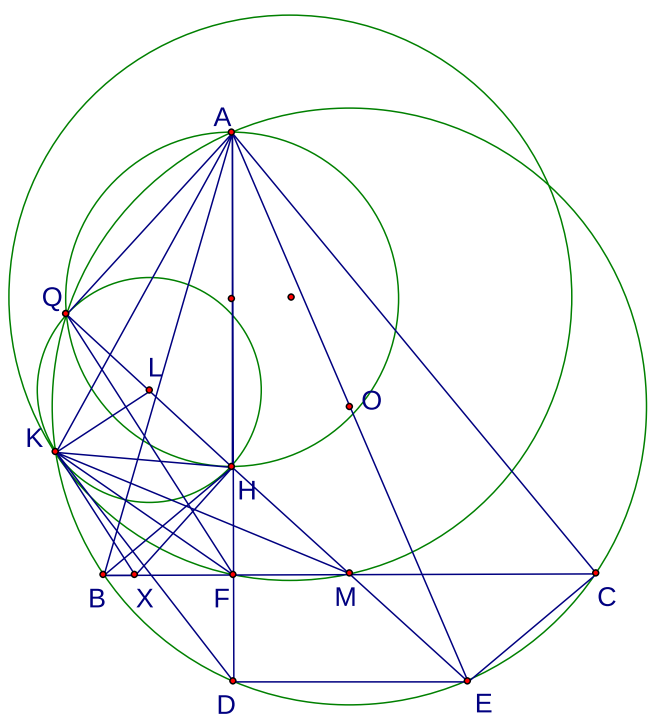
b)Giả sử các tiếp tuyến tại H, K của đường tròn (L) ngoại tiếp ΔQHK cắt nhau tại X. Ta chứng minh $X \in BC$. Thật vậy

Do $KXH = 180^0 - 2.XHK = 180^0 - 2.KQH = 2.(90^0 - KQH) = 2.(90^0 - KAE) = 2.EAK = 2.KDH$

và $XK = XH$

$\Rightarrow X$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

$\Rightarrow X$ thuộc đường trung trực của DH hay $X \in BC$



Bài 92

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, trên đoạn OA lấy điểm I, $(I \neq A, I \neq O)$ Vẽ tia $Ix \perp AB$ cắt (O) tại C. Lấy điểm E trên cung nhỏ BC, $(E \neq B, E \neq C)$.Nối AE cắt CI tại F, gọi D là giao điểm của BC với tiếp tuyến tại A của $(O;R)$.

a) Chứng minh: $BEFI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $AE.AF = CB.CD$.

c)Tia BE cắt IC tại K. Giả sử I, F lần lượt là trung điểm của OA, IC. Chứng minh $\Delta AIF \backsim \Delta KIB$. Từ đó tính IK theo R.

d)Khi I là trung điểm của OA và E chạy trên cung nhỏ BC. Tìm vị trí của E để $EB + EC$ lớn nhất.

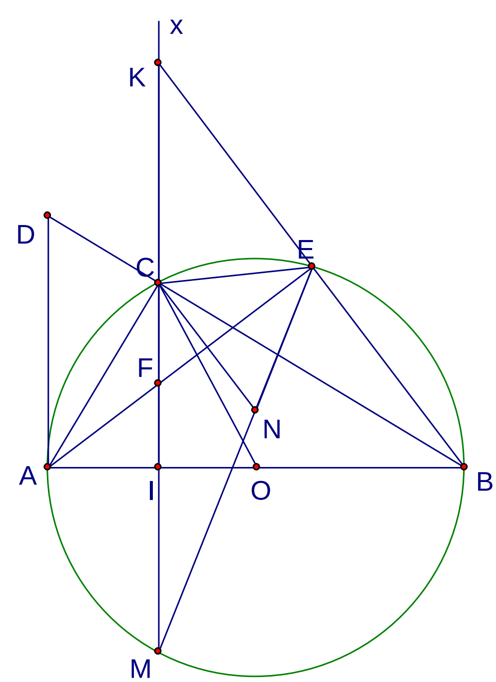
Giải

a)Vì điểm E nằm trên (O) đường kính AB nên $AEB = 90^0$.Lại có $IF \perp AB$ tại I nên $FIB = 90^0$

Tứ giác $IFEB$ có $AEB + FIB = 180^0 \Rightarrow IFEB$ là tứ giác nội tiếp

b)Xét ΔAIF và ΔAEB có $AIF = AEB = 90^0$, chung EAB

$\Rightarrow \Delta AIF \backsim \Delta AEB$ (g.g)



Dẫn đến $\dfrac{AI}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow AI.AB = AF.AE$. Vì điểm C nằm trên (O) đường kính AB nên $ACB = 90^0$,

AD là tiếp tuyến của (O) nên $DAB = 90^0$

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ACB, BAD ta có $AI.AB = AC^2 = CD.CB$ suy ra $AE.AF = CD.CB$

b)Tam giác AIF và KIB có

$AIF = KIB = 90^0, IAF = IKB = 90^0 - KBA$

nên $\Delta AIF \backsim \Delta KIB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{KI} = \dfrac{FI}{IB} \Leftrightarrow KI = \dfrac{AI.IB}{FI}$

Vì điểm I là trung điểm của OA và $CI \perp OA$ nên tam giác OAC cân tại C

Lại có $OC = OA = R$ nên tam giác OAC là tam giác đều,

suy ra $COA = 60^0; CBA = \dfrac{1}{2}COA = 30^0$

Từ đó dễ tính được $CI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow IF = \dfrac{1}{2}CI = \dfrac{\sqrt{3}}{4}R$ nên $KI = \dfrac{IA.IB}{FI} = \dfrac{IC^2}{\frac{1}{2}IC} = 2IC = \sqrt{3}R$.

c) Gọi M là giao điểm của tia CI với $(O), (M \neq C)$ thì tam giác CBI cân tại B

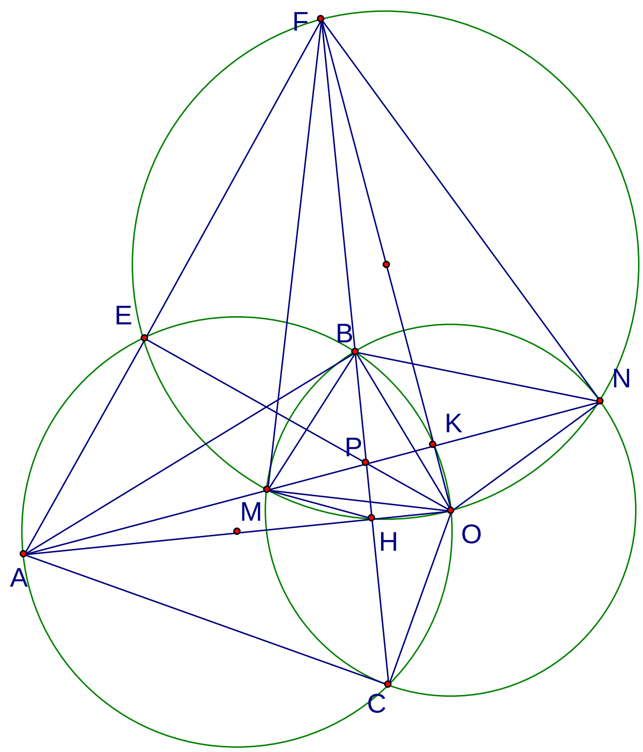
Kết hợp với chứng minh ở câu c $CBA = 30^0 \Rightarrow CBM = 60^0$ ta suy ra tam giác CBM đều. Lấy điểm N trên đoạn EM sao cho $EN = EC$ do $CEM = CBM = 60^0$ nên suy ra tam giác CEN đều. Xét các $\Delta CMN, \Delta CED$ ta có $CNM = 180^0 - CEB = 120^0, CEB = 180^0 - CMB = 120^0$ và

$CE = CN$, $\mathrm{CMN} = \mathrm{CBE} \Rightarrow \mathrm{MCN} = \mathrm{BCE} \Rightarrow \Delta CNM = \Delta CEB(c.g.c)$ suy ra $MN = EB$ Từ đó ta có $EC + EB = EN + MN = EM \le 2\mathrm{R}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi EM là đường kính của (O) hay E là điểm đối xứng với M qua O.

Nhận xét: Nếu biết định lý Ptolemy thì ta có kết quả $EC.MB + EB.MC = BC.EM$ mà tam giác BMC đều nên $MB = MC = BC$ suy ra $EC + EB = EM$

Bài 93 Cho điểm A nằm ngoài $(O;R)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến $AB;AC$ đến $(O;R)$,(B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến AMN đến $(O;R)$, MN không đi qua O và $AM < AN$
a) Chứng minh: $ABOC$ là tứ giác nội tiếp
b) Chứng minh: $AM.\text{AN}=\text{AB}^2$
c)Tiếp tuyến tại N của $(O;R)$ cắt đường thẳng BC tại F. chứng minh FM là tiếp tuyến của $(O;R)$
d)Gọi P là giao điểm của BC với dây MN, E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MON và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ (E khác O) . Chứng minh P,E,O thẳng hàng

Giải



1)Gọi H là giao điểm của BC,AO thì $BH \perp AO$ theo câu b ta có $AM.AN = AB^2$
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có $AH.AO = AB^2$
Từ đó suy ra
$AH.AO = AM.AN(= AB^2) \Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ANO$ (c.g.c)
$\Rightarrow AHM = ANO \Rightarrow MHON$ là tứ giác nội tiếp.
Giả sử tiếp tuyến tại M , N của (O) cắt nhau tại F, suy ra 4 điểm $F;M;O;N$ cùng nằm trên đường tròn đường kính OF
Ta chứng minh $F;\text{B};\text{H}$ thẳng hàng. Thật vậy do 4 điểm $M;H;O;N$ nằm trên 1 đường tròn và 4 điểm $F;M;O;N$ cùng nằm trên 1 đường tròn đường kính OF
suy ra 5 điểm $F;M;\text{H};O;N$ cùng nằm trên 1 đường tròn đường kính OF
hay $\text{FHO} = 90^0 \Leftrightarrow FH \perp AO$ lại có $BH \perp AO$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)
$\Rightarrow F;\text{H};\text{B}$ thẳng hàng

2.Từ chứng minh trên ta suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cũng là đường tròn đường kính OF, E là giao điểm của đường tròn đường kính OF với đường tròn đường kính OA
Ta có $\text{AEO} = 90^0$ và $\text{OEF} = 90^0$ suy ra $\text{AEO} + \text{OEF} = 180^0$ hay $A;E;F$ thẳng hàng
Gọi K là trung điểm MN thì $\text{OF} \perp MN$ tại K
Lại có $\text{FP} \perp OA$ tại H
$\Rightarrow$ P là trực tâm tam giác FOA
$\Rightarrow \text{OP} \perp AF$
Mà $EP \perp AF$
$\Rightarrow E;P;O$ thẳng hàng

Bài 94 Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao $AD;BE;CF$ cắt nhau tại H, AH cắt (O) tại điểm thứ hai là P ($P \neq A$). Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. Dựng đường kính AK của (O), đường thẳng qua P song song với EF cắt (O) tại giao điểm thứ hai $Q, (Q \neq P)$. Gọi S là giao điểm của IM và EF

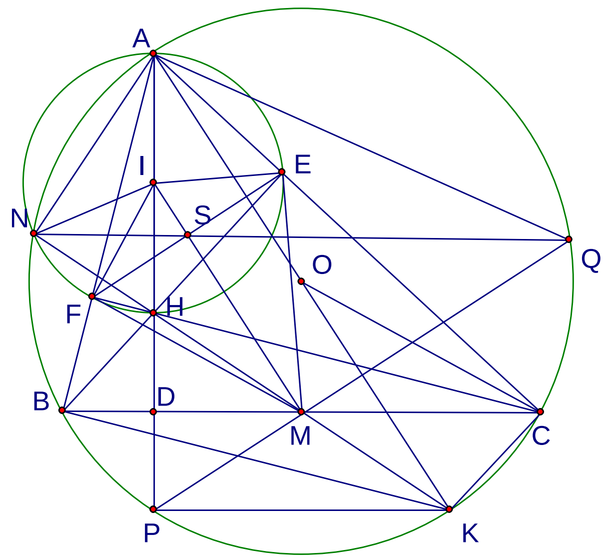
a) Chứng minh: $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $IE \perp EM$, từ đó suy ra $ME^2 = MS.MI$

c) Chứng minh tam giác APQ cân.

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh N, S, Q thẳng hàng

Giải



a.Vì $BE;CF$ là các đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow BEC = BFC = 90^0$

$\Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp trên cạnh EF cùng nhìn cạnh BC góc bằng nhau)

b.Do I là trung điểm AH nên $IA = IE = IH = \dfrac{AH}{2}$

$\Rightarrow \Delta AIE$ cân tại I

$\Rightarrow IEA = IAE$ (1)

Tương tự ta cũng có $MEC = MCE$ (2)

Lấy (1) + (2) ta có

$IEA + MEC = IAE + MCE = DAC + DCA = 90^0$

Suy ra $IEM = 180^0 - (IEA + MEC) = 90^0$

$\Rightarrow IE \perp EM$

Do $IE = FI; ME = MF \Rightarrow IM$ là đường trung trực của FE

$\Rightarrow IM \perp FE$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông IEM ta có $ME^2 = MI.MS$

c.Do $BFEC$ là tứ giác nối tiếp $\Rightarrow AEF = ABC$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

Lại có $ABC = \dfrac{1}{2}AOC = \dfrac{1}{2}(180^0 - 2OAC) = 90^0 - OAC$ (do tam giác OAC cân tại O)

$\Rightarrow ABC + OAC = 90^0 \Rightarrow AEF + OAC = 90^0 \Rightarrow OA \perp EF$

mà $PQ // EF \Rightarrow PQ \perp OA$

Do PQ là 1 dây của (O)

$\Rightarrow PQ \perp OA$ tại trung điểm của PQ

$\Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A

d.Do $AEH = AFH = 90^0 \Rightarrow E; F$ nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH kí hiệu là (I)

$\Rightarrow HNA = 90^0$ (3)

Lại có $KC \perp AC; BH \perp AC \Rightarrow BH // KC$

Tương tự $CH // KB \Rightarrow BHCK$ là hình bình hành

$\Rightarrow H; M; K$ thẳng hàng (5)

Ta cũng có $KNA = 90^0$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow K; H; N$ thẳng hàng (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow K; H; M;$ N thẳng hàng

Ta có $\Delta MHF \backsim \Delta MFN$ (g.g) $\Rightarrow MF^2 = MH.MN = ME^2$ (do $ME = MF$)

Kết hợp với chứng minh câu b $\Rightarrow MH.MN = MI.ME \Rightarrow \Delta MHS \backsim \Delta MIN$ (c.g.c)

$\Rightarrow HSM = INM \Rightarrow NISH$ là tứ giác nội tiếp

Kết hợp với $IM // AK$ và tam giác APQ cân tại A ta có

$\Rightarrow HNS = HIS = PAK = QAK = QNK \Rightarrow Q; S; N$ thẳng hàng

Bài 95

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH.

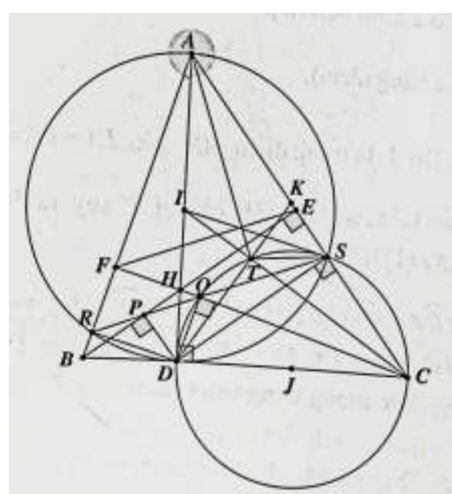
a) Chứng minh 4 điểm H, P, D, Q nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $PQ // EF$.

c) Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại R, S. Chứng minh R, P, Q, S thẳng hàng.

d) Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác DQS cắt IC tại T, DT cắt AC tại K. Chứng minh $\frac{KA}{KS} = \frac{CA}{CS}$.

Giải.



a) Vì $HPD = HQD = 90°$ nên 4 điểm H, P, D, Q cùng nằm trên một đường tròn, đường kính HD.

b) Do tứ giác $HPDQ$ nội tiếp nên $HPQ = HDQ$ (1) (cùng chắn cung HQ).

Ta cũng có $HDQ = HCD$ (2) (cùng phụ QDC).

Tứ giác $BFEC$ có $BFC = BEC = 90°$ nên $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC suy ra $FCB = FEB$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $HPQ = HEF \to PQ // EF$.

c) Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại R, S thì $ARD = ASD = 90°$ suy ra $BRD = BSC = 90°$ nên tứ giác $DQSC, BRPD$ nội tiếp.

Ta có $SQC = SDC = DAC$ (4); $PQD = PHD = AHE$ (5)

Mà $AHE + DAC = 90°$.

(4), (5) ta suy ra $PQD + DQC + SQC = 180°$ hay P, Q, S thẳng hàng, chứng minh tương tự ta có P, Q, R thẳng hàng, suy ra R, P, Q, S.

d) Do 4 điểm D, Q, S, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính DC nên đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác DQC cũng chính là đường tròn đường kính DC suy ra $DTC = 90°$.

Ta có ΔCSD đồng dạng với ΔCDA nên $CD^2 = CS.CA$ (6).

Trong tam giác vuông IDC ta cũng có $CD^2 = CT.CI$ (7)

Từ (6) và (7) ta suy ra $CS.CA = CT.CI \Rightarrow \Delta CTS$ đồng dạng $\Delta CAI \Rightarrow CTS = CAI$ nên $AITS$ là tứ giác nội tiếp, kết hợp với ΔAIS cân tại I ta có biến đổi góc $CTS = CAI = ISA = ITA$ suy ra là $ATK = STK$ hay TK là phân giác của góc ATS, TC vuông góc với TK nên TC chính là phân giác ngoại của ATS. Theo tính chất phân giác ta có ngay $\frac{KA}{KS} = \frac{CA}{CS}$.

Bài 96

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm N nằm ngoài (O). Từ N kẻ 2 tiếp tuyến NA, NB đến (O) (A, B là 2 tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của AB, ON.

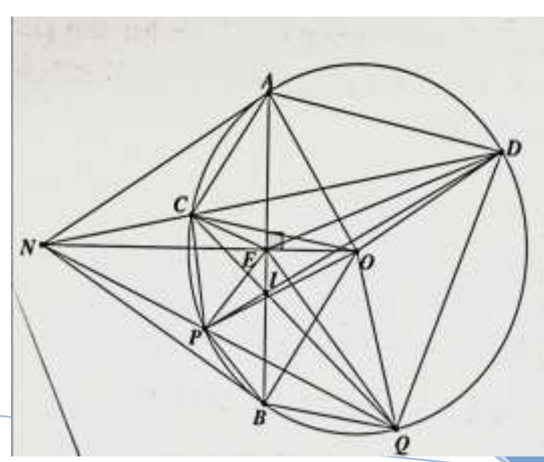
a) Chứng minh $NAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính AB biết $ON = 5$ cm, $R = 3$ cm.

c) Kẻ tia Nx trong góc ANO cắt (O) tại C, D (C nằm giữa N và D). Chứng minh $NEC = OED$.

d) Qua N kẻ cát tuyến thứ 2 với đường tròn là NPQ (P nằm giữa N và Q). Gọi I là giao điểm CQ, DP. Chứng minh A, B, I thẳng hàng.

Giải



a) Vì NA, NB là các tiếp tuyến của (O) nên $ANO + NBO = 90°$ suy ra $NAO + NBO = 180°$. Hay tứ giác $NAOB$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$).

b) Khi $ON = 5$ cm, $R = 3$ cm, theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có $AB = 2AE$.

Và $AE \perp NO$ tại E, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AON ta có $OA^2 = OE.ON$

Suy ra $OE = \frac{OA^2}{ON} = \frac{9}{5} \Rightarrow NE = NO - OE = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$, lại có

$AE^2 = EN.EO \Rightarrow AN^2 = \frac{16.9}{5} \Leftrightarrow AN = \frac{12}{5} \Rightarrow AB = 2AN = \frac{24}{5}$.

c) Xét tam giác NCA, NAD ta có AND chung và $NAC = NDA = \frac{1}{2}$sđ AC.

Suy ra ΔNCA đồng dạng ΔNAD(g.g) dẫn đến $\frac{NC}{NA} = \frac{NA}{ND}$ (tỷ số đồng dạng) suy ra $NA^2 = NC.ND$ (1)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NAO ta có $NA^2 = NE.NO$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $NC.ND = NE.NO \Leftrightarrow \frac{NC}{NE} = \frac{NO}{ND}$ kết hợp với ΔNCE, ΔNOD có góc chung OND chung, ta suy ra ΔNCE đồng dạng ΔNOD (c.g.c) suy ra $NEC = NDO$ dẫn đến $CEOD$ nội tiếp (góc ngoài mộ đỉnh bằng góc đối).

Cũng từ $CEOD$ nội tiếp và tam giác OCD cân tại O ta có biến đổi góc $NDO = OCD = OED$ (đpcm).

d) Tương tự câu c) ta có $PEOQ$ nội tiếp.
Ta có

$$\begin{aligned} CEP &= CEN + NEP = ODC + OQP \\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - COD\right) + \frac{1}{2}\left(180^\circ - POQ\right) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(COD + POQ\right) = \frac{360^\circ - \left(COD + POQ\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(COP + DOQ\right) = CIP \end{aligned}$$

Suy ra $CEIP$ nội tiếp, tương tự $DEIQ$ nội tiếp.

Suy ra $IEP = CIP = IDQ = IEQ$ hay EI là phân giác của PEQ (3)

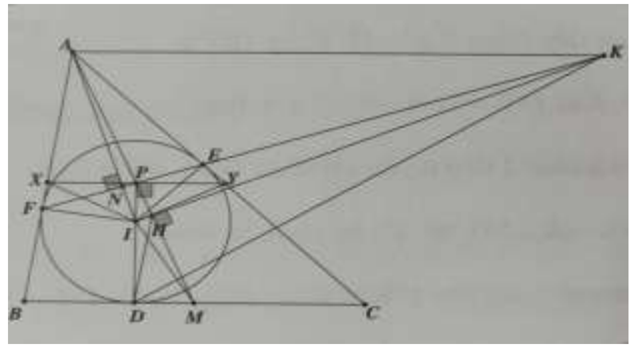
Từ chứng minh câu c, suy ra $CEA = DEA$ hay EA là phân giác CED, tương tự suy ra EB là phân giác của góc PEQ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $EI \equiv EB$ hay I, A, B thẳng hàng.

Bài 97

Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại K, gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $MI \perp DK$.

Giải



Gọi P là giao điểm của ID và EF.

Vì AE, AF là các tiếp tuyến của (I) tại E, F nên $IA \perp EF$.

Vì $IP \perp BC$ suy ra $IP \perp AK$. Từ đó suy ra P là trực tâm của tam giác $AIK \Rightarrow AP \perp IK$ tại H suy ra tứ giác $ANHK$ nội tiếp.

Kẻ đường thẳng qua P và song song với BC cắt AB, AC tại X, Y từ các tứ giác $IPXF, IPEY$ nội tiếp ta suy ra $PXI = PFI = PEI = PYI$ dẫn đến tam giác IXY cân tại I nên P là trung điểm XY. Theo định lý thales ta dễ suy ra A, P, M thẳng hàng.

Lại có $IH.IK = IN.IA = IF^2 = ID^2 \Rightarrow \dfrac{IH}{ID} = \dfrac{ID}{IK}$ suy ra ΔIHD đồng dạng ΔIDK (c.g.c).

Tứ giác $IDMH$ nội tiếp suy ra $IDH = IMH$, ΔIHD đồng dạng $\Delta IDK \Rightarrow IDH = IKD \Rightarrow IMH = IKD$ mà IMH phụ với MIH nên IKD phụ với $MIH \Rightarrow IM \perp DK$.

Bài 98

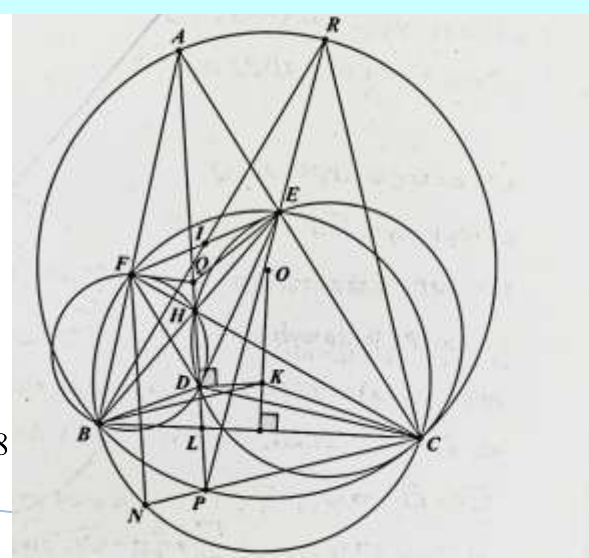
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. BE cắt CF tại H, AH cắt (O) tại P khác A, PE cắt (O) tại R khác P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác FHB cắt AH tại D.

a) Chứng minh $KD \perp AH$.

b) Giả sử AH cắt BC tại L và Q đối xứng với P qua D. Chứng minh $AEQF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh BR chia đôi EF.

Giải



a) Ta có $AH.AD = AF.AB = AE.AC$ suy ra $EHDC$ nội tiếp.

Từ đó, ta có
$$\begin{aligned} BDC &= 360^\circ - BDH - CDH \\ &= BFC + BEC = 2BFC = BKC \end{aligned}$$
nên $BDKC$ là tứ giác nội tiếp. Ta có

$KDH = CDH - CDK = 180° - HEC - KBC$

$$= 180° - \frac{BKC}{2} - \frac{180° - BKC}{2} = 90°$$

b) Gọi N là điểm đối xứng với F qua KD, do $KF = KN$ nên điểm N nằm trên (K). Ta có $BCP = BAP = BFN = BCN$ nên $CP \equiv CN$ hay C, N, P thẳng hàng.

Do $FQPN$ là hình thang cân ta có $FQA = FNC = FBC$ nên $BFQL$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có $CEQL$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc

$FQE = 360° - FQL - EQL$

$= ABC + ACB = 180° - BAC$

suy ra $AEQF$ nội tiếp.

c) Từ $AEQF$ nội tiếp ta có $BFE = 180° - AFE = 180° - AQE = DQE$.

Ta cũng có $FBE = FCE = HDE$ nên ΔEFB đồng dạng ΔEQD (g.g) suy ra $\frac{FB}{FE} = \frac{DQ}{QE}$. Gọi I là trung điểm FE ta có $\frac{FB}{FE} = \frac{DQ}{QE} \Leftrightarrow \frac{FB}{2FI} = \frac{\frac{1}{2}QF}{QE} \Leftrightarrow \frac{FB}{FI} = \frac{QP}{QE} \Rightarrow \Delta IFB$ đồng dạng ΔEQF (c.g.c) nên $FBI = EPQ = ABR$ hay $BR \equiv BI$ tức là BR chia đôi EF.

Bài 99

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), P là một điểm bất kỳ trong tam giác và Q thuộc cung nhỏ BC của (O), AP cắt (O) tại giao điểm thứ là D, M là trung điểm của AQ, QP cắt (O) tại giao điểm thứ hai là K. Dựng đường tròn (w) qua 2 điểm P, K tiếp xúc với AP. Các đường thẳng AK, MP lần lượt cắt (w) tại E, F. Gọi R là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD với MP.

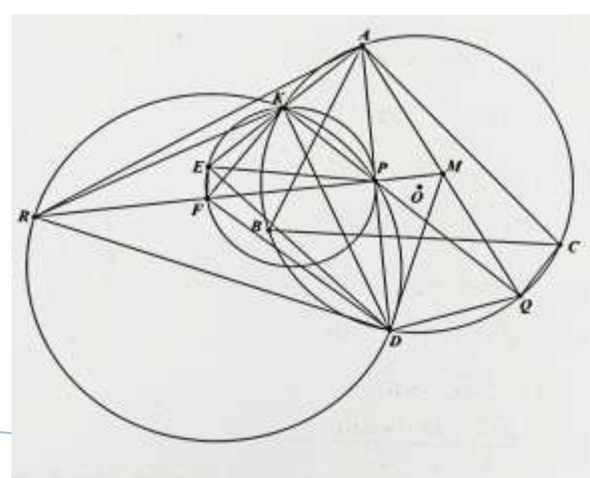
a) Chứng minh $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ΔKFP đồng dạng ΔKRD suy ra F là trung điểm PR.

c) Chứng minh 4 điểm A, D, E, F nằm trên một đường tròn.

Giải

a) Từ các tứ giác $KPDR$, $AKDQ$ nội tiếp suy ra $DRP = DKP = DAQ$ hay $AMDR$ là tứ giác nội tiếp.



b) Ta có PA là tiếp tuyến của đường tròn (w) và $KPDR$ nội tiếp nên $KFP = KPA = KRD$ lại có

$KPR = KDR \Leftrightarrow KPF = KDR$ nên ΔKFP đồng dạng ΔKRD (g.g) suy ra $\frac{FP}{RD} = \frac{KP}{KD}$.

Lại có ΔKPD đồng dạng ΔAPQ (g.g) suy ra $\frac{KP}{KD} = \frac{AP}{AQ}$.

ΔPRD đồng dạng ΔPAM nên $\frac{PR}{RD} = \frac{PA}{AM} = \frac{2PA}{AQ}$ từ đó ta có $\frac{PR}{RD} = \frac{2PA}{AQ} = \frac{2KP}{KD} = \frac{2FP}{RD}$ suy ra F là trung điểm RP.

c) Ta có $KRF = KDP$, $KFR = 180° - KFP = 180° - KPA = KPD$ suy ra ΔKFR đồng dạng ΔKPD (g.g) kết hợp với $PKF = DPF$ suy ra ΔKPF đồng dạng ΔPDF (c.g.c) suy ra $ADF = PDF = KPF = 180° - AEF$ hay $ADEF$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 100

Cho đường tròn tâm O đường kính BC. Một điểm A thuộc đường tròn (O) sao cho $AB > AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC, AE cắt BC tại M, kẻ đường cao AH của tam giác ABE, AH cắt BC tại F.

a) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi.

b) Chứng minh $CD.DB = DM.DO$.

c, Gọi I là trung điểm AH, kéo dài BI cắt (O) tại điểm thứ 2 là K. Chứng minh: $AIMK$ là tứ giác nội tiếp.

d, Đường thẳng AK cắt BD tại N. Chứng minh: N là trung điểm của MD.

Giải

Bổ sung hình sau

a, Do điểm E đối xứng với A qua đường kính BC nên $E \in (O)$ dẫn tới $BEC = 90°$ hay $BE \perp CE$, lại có $AH \perp BE$ suy ra $AH // BE$ (1), ta cũng có $AE \perp BM$ tại trung điểm M của BC nên F là trực tâm tam giác ABE dẫn đến $EF \perp AB$, mặt khác $AC \perp AB$.

Suy ra $EF // AC$ (2), từ (1), (2) kết hợp với $AE \perp FC$ ta suy ra $ACEF$ là hình thoi.

b, Do DA là tiếp tuyến của (O) nên $CAD = ABD = \frac{1}{2}$ sđ AC suy ra $\Delta DAB \# \Delta DCA$ (g.g) suy ra $\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DA}$ hay $DA^2 = DB.DC$ (3). Trong tam giác vuông OED $(OAD = 90°)$ ta có $AM \perp OD$ nên suy ra $DM.DO = DA^2$ (4). Từ (3), (4) ta có : $DB.DC = DM.DO$.

c, Do I là trung điểm AH nên MI là đường trung bình của tam giác AHE suy ra $MI \perp AH$ $(MI//HE \perp AH)$. Ta có $IMA = AEB$ (đồng vị), $AEB = AKB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB) dẫn đến $IMA = IKA \Rightarrow AIMK$ là tứ giác nội tiếp (có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh IA góc bằng nhau).

d, Từ chứng minh ở câu c ta có: $AKM = 180° - AIM = 90°$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMN ta có: $MN^2 = NK.\text{NA}$ (5). Kéo dài DK cắt (O) tại S. Ta dễ chứng minh được DE là tiếp tuyến của (O). Ta có $KMD = KAM = KAE = KED$ suy ra $KMDE$ là tứ giác nội tiếp. Dẫn tới $EKD = EMD = 90°$ suy ra SE là đường kính của (O) nên $SA \perp AE$ dẫn tới $SA//ND$. Tam giác KND và tam giác DNA có AND chung và $EKD = EMD = 90°$ suy ra $\Delta DNA \# \Delta KND$ (g.g) suy ra $\dfrac{DN}{KN} = \dfrac{NA}{ND} \Leftrightarrow ND^2 = NA.NK$ (6). Từ (5), (6) suy ra $ND^2 = MN^2$ hay $ND = NM$.

Bài 101

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài (O), qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O), dựng cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$ và tia MC nằm giữa hai tia MB, MO. Gọi I là trung điểm của CD.

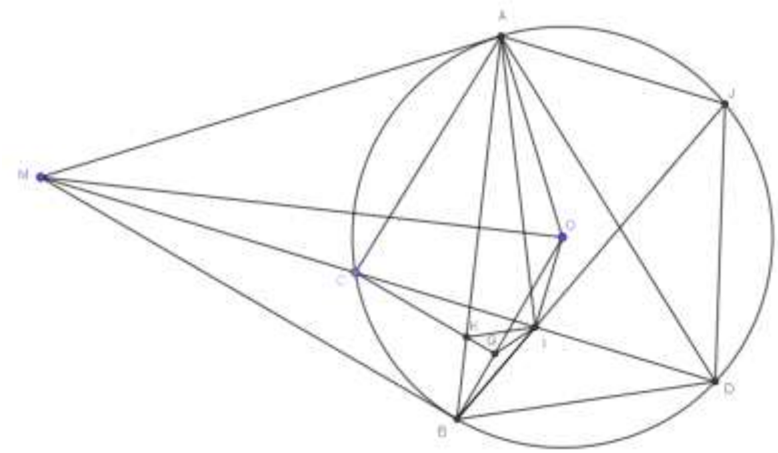
a, Chứng minh: Tứ giác $AIOB$ nội tiếp.

b, Tia BI cắt (O) tại giao điểm thứ hai là J (J khác B). Chứng minh: $AJ//MD$.

c, Chứng minh: $AD^2 = AJ.MD$.

Đường thẳng qua I song song với BD cắt AB tại K. Tia CK cắt OB tại G. Khi cát tuyến MCD thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIG thuộc đường tròn nào?

Giải



a, Vì I là trung điểm của dây CD nên $OI \perp CD$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung) suy ra $OIM = 90°$. MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $OAM = OBM = 90° \Rightarrow OAM + OBM = 180°$ hay tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tổng 2 góc đối nhau bằng $180°$). Tương tự $MAOI$ nội tiếp, suy ra 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn. Suy ra tứ giác $AIOB$ nội tiếp.

b, Vì 5 điểm M, A, O, I, B nằm trên một đường tròn nên $MIB = MOB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MB). Mặt khác, ta cũng có $AJB = \frac{1}{2}AOB$ (liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm), mà $AOB = 2MOB$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau), từ đó suy ra $AJB = MIB \Rightarrow AJ // MD$. Do $AJ // MD$ nên $JAD = ADM$ (so le trong) (1). Tứ giác $AJDC$ nội tiếp nên $AJD = ACM$ (2), ta có $\Delta MCA \# \Delta MAD$ (3). Từ (2) và (3) ta suy ra $AJD = MAD$ (4). Từ (1), (4) ta có: $\Delta DAM \# \Delta AJD$ (g.g) suy ra $\frac{AD}{AJ} = \frac{DM}{AD}$ (cạnh tương ứng) hay $AD^2 = JA.MD$.

c, Vì $IK // BD$ nên $KIC = CDB$ (đồng vị), mà $CDB = CAK$ (cùng chắn cung BC) suy ra $KIC = KAC \Rightarrow ACKI$ nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp A, I cùng nhìn cạnh CK góc bằng nhau). Từ đó suy ra $CKA = CIA$ (5) (góc nội tiếp cùng chắn cung CA). Mặt khác, do 4 điểm A, I, M, B nằm trên cùng một đường tròn nên $AIM = ABM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM) (6). Từ (5), (6) suy ra $CKA = MBA \Rightarrow CK // MB$ mà $MB \perp OB \Rightarrow CK \perp OB$ tại G. Tứ giác $CGIO$ có $CGO = CIO = 90°$ nên $CGIO$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính CO (hai đỉnh liên tiếp G, I cùng nhìn cạnh CO góc bằng $90°$). Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CGI bằng $\frac{CO}{2} = \frac{R}{2}$, hay tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CGI thuộc đường tròn tâm O bán kính $\frac{R}{2}$

Bài 102

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD sao cho $MC < MD$ và tia MC nằm giữa hai tia MA, MO. Gọi H là giao điểm của AB và MO, E là trung điểm của CD, đường thẳng CH cắt (O) tại giao điểm thứ hai là F (khác C). Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB lần lượt tại P, Q.

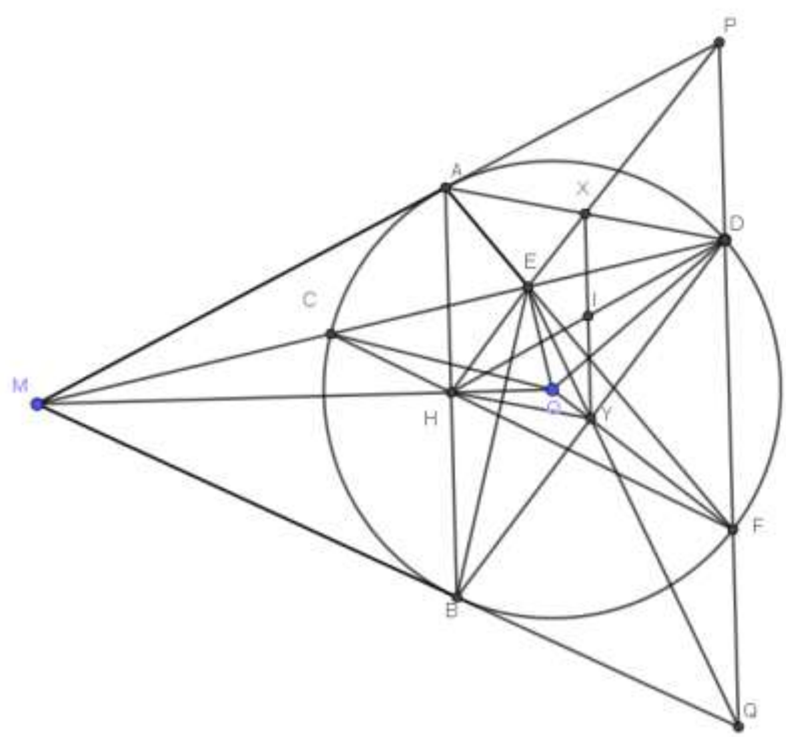
a, Chứng minh: EM là tia phân giác của AEB.

b, Chứng minh: $MH.MO = MC.MD$

c, Chứng minh: $DF // AB$.

d, Gọi X là giao điểm của EF với AD, Y là giao điểm của EQ với BD. Chứng minh: HD chia đôi XY.

Giải



a, Chứng minh 5 điểm M, A, E, O, B nằm trên một đường tròn, chú ý $MA = MB$ nên $AEM = BEM$ suy ra đpcm.

b, Ta dễ chứng minh: $MA^2 = MC.MD$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO, $AH \perp MO$ ta có $MA^2 = MH.MO$.

Từ đó suy ra $MA^2 = MC.MD$.

c, Từ b ta có: $\dfrac{MH}{MC}=\dfrac{MD}{MO}$. Xét tam giác MCH, MOD ta có: $\dfrac{MH}{MC}=\dfrac{MD}{MO}$ và OMD chung nên $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (g.g) suy ra $MHC = MDO \Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp ta có biến đổi góc $MHC = MDO = OCD = ODH$, $MHC = OHD$, các góc CHA, DHA phụ với các góc MHC, OHD tương ứng nên suy ra $CHA = DHA$ hay AH là phân giác của góc CHD.

Chú ý rằng: $CHA = \dfrac{1}{2}CHD = \dfrac{1}{2}COD = CFD$ mà hai góc CHA, CFD đồng vị nên $AB // DF$.

d, Ta có: $AEM = MEB = MAB = MPQ$ suy ra $APED$ là tứ giác nội tiếp. Tương tự ta cũng có $BQED$ là tứ giác nội tiếp. Ta có $XEY = XED + YED = DAP + DBQ = ABD + BAD = 180° - ADB$ nên $EXDY$ là tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra $DXY = DEY = DBQ = DAB$ hay $XY // AB$. Theo định lý Thales ta có ngay DH đi qua trung điểm I của XY.

Bài 103

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$, trên cạnh AC lấy điểm D (D khác A, C). Dựng $DE \perp BC$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn tâm K ngoại tiếp tam giác DEC cắt tia DE tại M. Đường thẳng qua C vuông góc với MK cắt đường tròn (K) tại F (F nằm trong tam giác ABC).

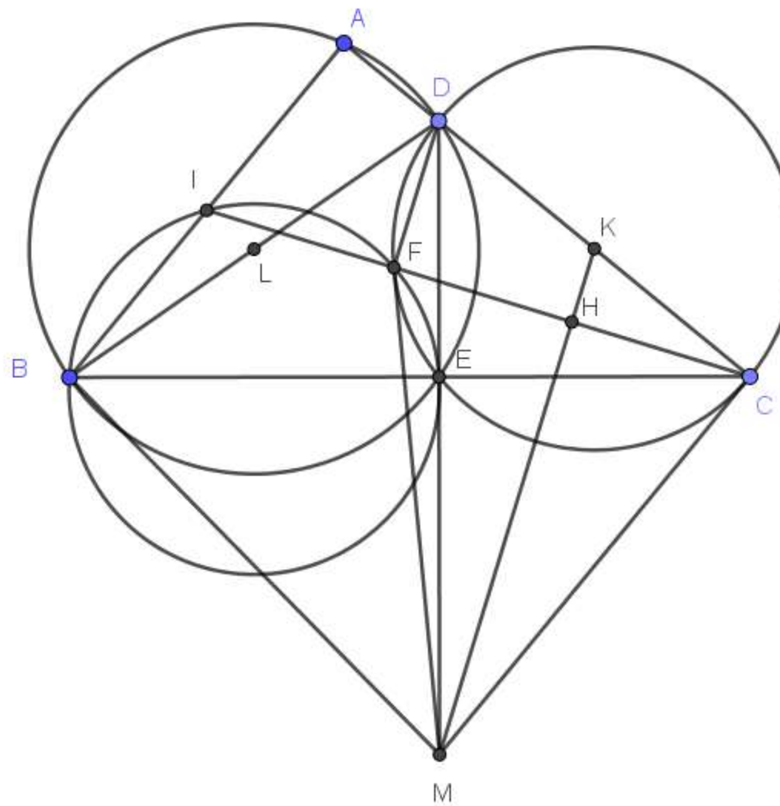
a, Chứng minh: Tứ giác $ADEB$ nội tiếp và $CD.CA = CE.CB$.

b, Chứng minh: $MF^2 = ME.MD$.

c, Tia CF cắt cạnh AB tại I. Chứng minh: $\Delta BIC \backsim \Delta FEC$.

d, Chứng minh: I là trung điểm của AB.

Giải



a, Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BAD = 90°, ED \perp BC \Rightarrow DEB = 90°$, suy ra $BAD + BED = 180°$ suy ra tứ giác ADEB nội tiếp (tổng hai góc đối bằng $180°$)

Tam giác vuông ABC và tam giác vuông DEC có $BAC = DEC = 90°$ và ACB chung nên $\Delta BAC\# \Delta DEC$ (g.g) suy ra $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{BC}{DC}$ hay $AC.DC = CE.BC$.

b, Giả sử $CF \perp KM$ tại H thì H là trung điểm của FC (quan hệ vuông góc của đường kính đi qua trung điểm 1 dây) suy ra KH là phân giác của góc FKC. Xét các tam giác KFB và KCM, ta có: $KC = KF$ (là bán kính của (K)), KM chung, $FKM = CKM \Rightarrow \Delta KFB = \Delta KCM$ (c.g.c) suy ra $KFM = KCM = 90°$ hay MF là tiếp tuyến của (K). Từ đó ta có: $MFE = EDF = \dfrac{1}{2}$sđ EF, dẫn đến $\Delta MEF = \Delta MFD$(g.g) suy ra $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{MF}{MD}$ hay $MF^2 = ME.MD$.

c, Do điểm F nằm trên đường tròn đường kính CD nên $CFD = 90° \Rightarrow DFI = 90°$ suy ra tứ giác $ADFI$ nội tiếp. Ta có $IEF = 360° - IFD - DFE = 180° - IFD + 180° - DFE$, chú ý rằng các tứ giác $ADFI, DFEC$ nội tiếp nên ta có: $180° - IFD = BAC, 180° - DFE = ACB$, từ đó suy ra $IFE = BAC + ACB = 180° - ABC$ hay $IFE + IBE = 180°$ suy ra $IFEB$ là tứ giác nội tiếp.

Dẫn đến $BIC = FEC \Rightarrow \Delta BIC$” ΔFEC (g.g) (1) (Vì có ICB chung và $BIC = FEC$).

d, Xét tam giác FEC và tam giác DKM ta có:

$EFC = EDC = MDK$, $FEC = 180° - FDC = 180° - \frac{1}{2}FKC = 180° - MKC = DKM \Rightarrow \Delta FEC\# \Delta DKM$ (g.g) (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔBIC” $\Delta DKM \Rightarrow \frac{BI}{DK} = \frac{BC}{DM}(*)$, ta cũng có $BAC = DCM = 90°$ và $ABC = CDM$ (cùng phụ với ACB) suy ra ΔBAC” ΔDCM (g.g) suy ra $\frac{BA}{DC} = \frac{BC}{DM}(**)$. Từ (*) và (**) suy ra $\frac{BI}{DK} = \frac{BA}{DC}$ hay $\frac{BA}{BI} = \frac{DC}{DK} = 2$ suy ra I là trung điểm của AB.