

Bài 1. (2 điểm)

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$
- b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Bài 2. (2 điểm)

- a) Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản

Bài 3. (3 điểm)

- a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Hãy rút gọn phân thức: $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
- b) Tìm tích: $M = \frac{1^4 + 4}{3^4 + 4} \cdot \frac{5^4 + 4}{7^4 + 4} \cdot \frac{9^4 + 4}{11^4 + 4} \cdot \dots \cdot \frac{17^4 + 4}{19^4 + 4}$

Bài 4. (4 điểm)

- a) Cho $x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0; xyz \neq 0$.

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

- b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

Bài 5. (3 điểm) Cho biểu thức :

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tìm x để $P < 1$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 6. (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC .

- a) Chứng minh rằng: $CE \perp DF$
- b) Gọi M là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng: $AM = AD$

Bài 7. (3 điểm) Cho tam giác ABC . Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông $ABDE, ACFH$.

- a) Chứng minh rằng $EC = BH; EC \perp BH$

- b) Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông $ABDE, ACFH$. Gọi I là trung điểm của BC . Tam giác MNI là tam giác gì? Vì sao?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

- a) $(x+1)(x-3)(x^2-2x+2)$
- b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$ nên:
 $f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$
 $f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$
 Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$
 Vậy $2a - 3b = 0$

Bài 2.

- a) Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$
 $a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1$
 $= (n+1)^2$ là một số chính phương.
- b) Gọi d là ƯCLN của $10n^2 + 9n + 4$ và $20n^2 + 20n + 9$
 $\Rightarrow \begin{cases} 10n^2 + 9n + 4 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2 + 18n + 8 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 : d$
 $\Rightarrow d$ là số tự nhiên lẻ
- Mặt khác: $2n + 1 : d \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 : d \Rightarrow 20n^2 + 20n + 5 : d \Rightarrow 4 : d$, mà d lẻ nên $d = 1$
- Vậy phân số trên tối giản

Bài 3.

- a) Từ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ chỉ ra được $x + y + z = 0$ hoặc $x = y = z$
 TH1: $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z; x + z = -y; y + z = -x \Rightarrow P = -1$
 TH2: $x = y = z \Rightarrow P = \frac{1}{8}$
- b) Nhận xét được: $n^4 + 4 = [(n-1)^2 + 1][(n+1)^2 + 1]$. Do đó:

$$M = \frac{1 \cdot (2^2 + 1)}{(2^2 + 1) \cdot (4^2 + 1)} \cdot \frac{(4^2 + 1) \cdot (6^2 + 1)}{(6^2 + 1) \cdot (8^2 + 1)} \cdots \frac{(16^2 + 1) \cdot (18^2 + 1)}{(18^2 + 1) \cdot (20^2 + 1)} = \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

Bài 4.

a) Từ giả thiết $\Rightarrow 2cz + z = x + y \Rightarrow 2cz = x + y - z$

$$\Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow c + 1 = \frac{x + y + z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{c + 1} = \frac{2z}{x + y + z}$$

Tương tự: $\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}; \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$. Khi đó: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

b) Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

Khi đó:

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 5. a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \frac{x^2}{x-1}$

b) $P < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-1} < 0$

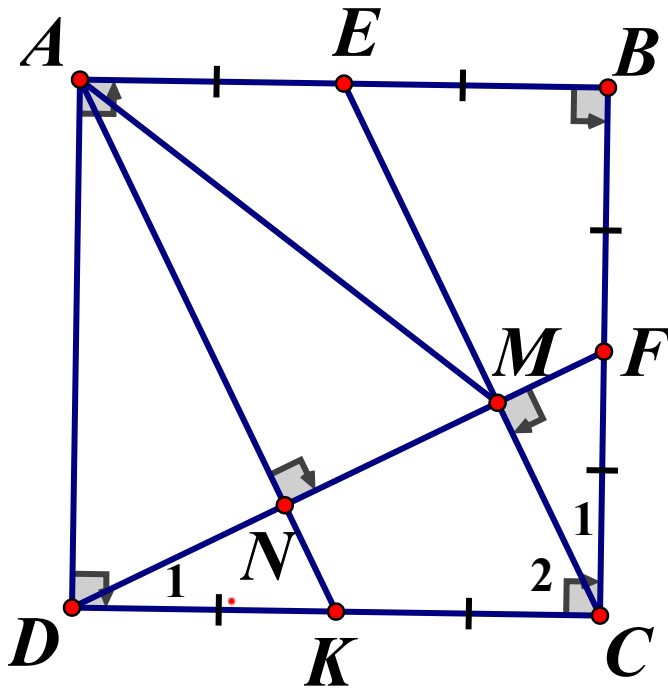
$$\Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

c) Ta có: $P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$

Khi $x > 1; x - 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x - 1 + \frac{1}{x - 1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Vậy GTNN của P bằng 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Bài 6.



a) Chứng minh được $\triangle CBE = \triangle DFC (c.g.c) \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$

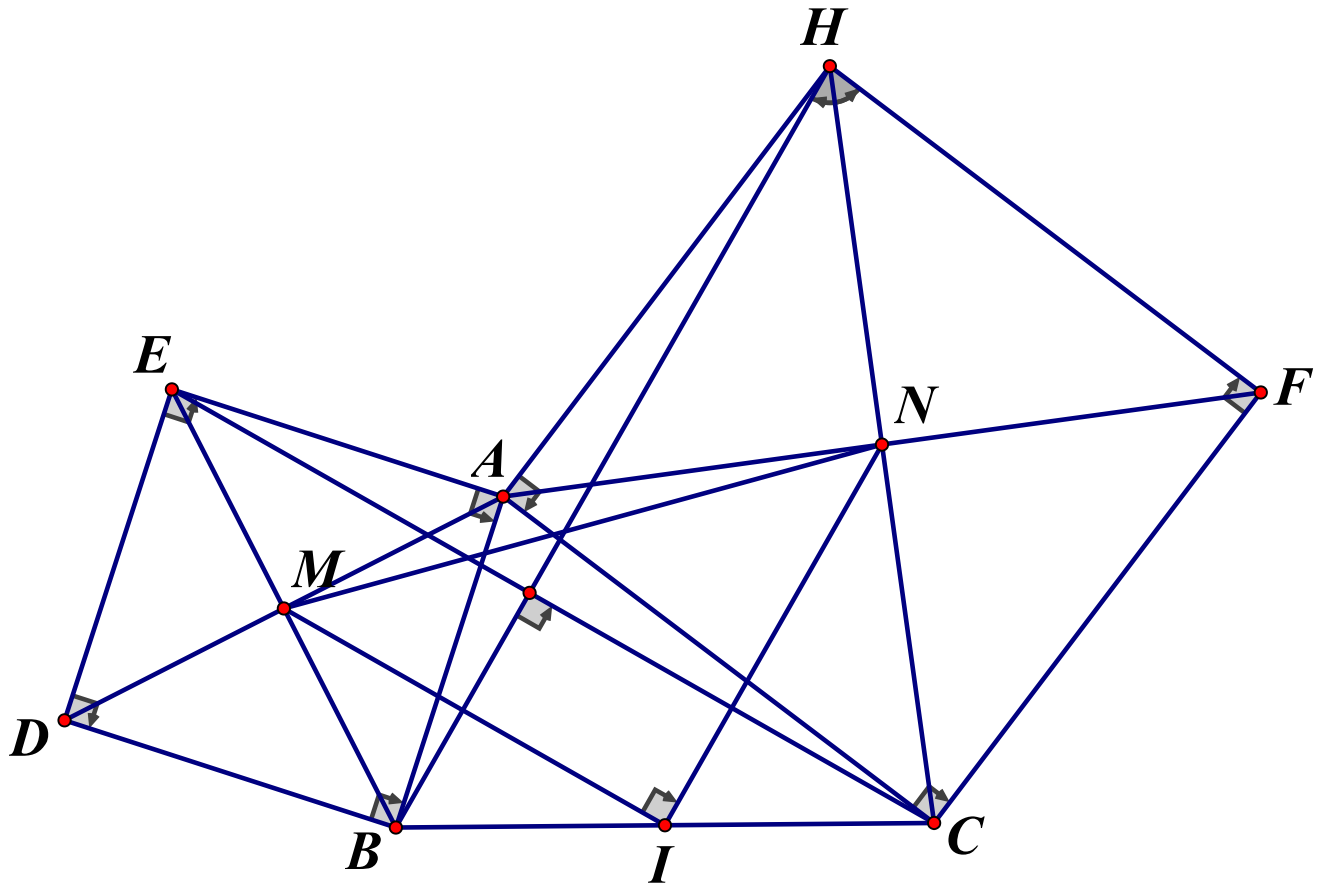
Lại có: $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$

b) Gọi K là trung điểm của CD . Chứng minh được tứ giác $AECK$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CE$

Gọi N là giao điểm của AK và DF . $\triangle DCM$ có $DK = KC$ và $KN \parallel CM$ nên N là trung điểm của DM . Vì $CM \perp DM$ (câu a), $KN \parallel CM \Rightarrow KN \perp DM$

Tam giác $\triangle ADM$ có AN là đường cao đồng thời là trung tuyến nên là tam giác cân tại A .
 $\Rightarrow AM = AD$

Bài 7.



a) Chứng minh được: $\triangle EAC = \triangle BAH (c.g.c) \Rightarrow EC = BH, \angle AEC = \angle ABH$

Gọi K và O thứ tự là giao điểm của EC với BA và BH

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle OBK$ có: $\angle AEK = \angle OBK; \angle AKE = \angle OKB \Rightarrow \angle EAK = \angle BOK$

$\Rightarrow \angle BOK = 90^\circ$. Vậy $EC \perp BH$

b) Ta có: $MI \parallel EC; MI = \frac{1}{2}EC; IN \parallel BH; IN = \frac{1}{2}BH$

Mà $EC \perp BH$ và $EC = BH$ nên $MI = IN$ và $MI \perp IN$

Vậy tam giác MIN vuông cân tại I