SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI
NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ SỐ 16

MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút(Không tính thời gian giao đề)

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

Câu 1: Cho biểu thức $L=8\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)$. Thu gọn L ta được

A. $3^{256}-1$. **B.** $3^{256}+3$. **C.** $3^{256}+1$. **D.** $3^{256}-3$.

Câu 2: Rút gọn biểu thức $(x+y-z)^2+2(x+y-z)(z-x)+(z-x)^2$ thu được kết quả là

A. x^2. **B.** $-x^2$. **C.** y^2. **D.** z^2.

Câu 3: Kết quả của phép chia $\left[(a-b)^3-(a-b)^2+(a-b)\right]:(a-b)$ là

A. $(a-b)^2-(a-b)+1$. **B.** $-(a-b)^2+(a-b)+1$.

C. $(a-b)^2+(a-b)+1$. **D.** $-(a-b)^2+(a-b)-1$.

Câu 4: Xác định hằng số a,b sao cho $10x^2-bx+a$ chia cho x^2-3 có đa thức dư là $x+4.$

A. $a=-26,b=-1$. **B.** $a=-1,b=-26$. **C.** $a=1,b=26$. **D.** $a=26,b=1$.

Câu 5: Tìm a để giá trị nhỏ nhất của biểu thức $36x^2-12ax+a^2+a-1$ bằng 19

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Câu 6: Cho biểu thức $M=9x^2+6y^2+18x-12xy-12y-27$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $M\geq 0$. **B.** $M\leq 0$. **C.** $M\geq 36$. **D.** $M\geq -36$.

Câu 7: Cho x_1 và x_2 $(x_1>x_2)$ là hai giá trị thỏa mãn $x(3x-1)-5(1-3x)=0$. Khi đó $3x_1-x_2$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 8: Xác định hằng số a sao cho $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$.

A. 18. **B.** -18. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 9: Xác định các hằng số a,b sao cho x^4+ax+b chia hết cho x^2-4

A. $a=0,b=-16$. **B.** $a=0,b=16$.

C. $a=16,b=0$. **D.** $a=-16,b=0$.

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$, đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $AC=10cm$.

Diện tích tam giác ABC bằng:

A. $100cm^2$. **B.** $50cm^2$. **C.** $20cm^2$. **D.** $25cm^2$.

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB=AD$, CA là phân giác của $\widehat{C}$, $\widehat{ADC}=100^\circ$. Kẻ $AP\perp CB,$ $AQ\perp CD$ (B nằm giữa P và C, D nằm giữa Q và C). Số đo của $\widehat{ABC}$ là:

A. 80°. **B.** 90°. **C.** 100°. **D.** 135°.

Câu 12: Thống kê số môn học yêu thích của một nhóm 100 học sinh lớp 8 được chọn ngẫu nhiên của trường THCS Y, thu được kết quả như bảng sau:

Số môn học yêu thích	0	1	2	3	4
Số học sinh	5	20	32	28	15

Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường Y. Gọi A là biến cố: "Số học sinh yêu thích các môn học lớn hơn hoặc bằng 2". Hãy dự đoán trong nhóm 80 học sinh khác (được chọn ngẫu nhiên) của trường: Có bao nhiêu em có số môn học yêu thích không ít hơn 2?

A. 60. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 70.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2 điểm)

a) Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$.

b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $\left(a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac\right)-4c^2$.

Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x)=x^4-2x^2\left(3x-\dfrac{9}{4}\right)+\left(3x-\dfrac{9}{4}\right)^2$.

b) Tìm x, y thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức sau: $\dfrac{4+x}{7+y}=\dfrac{4}{7}$ và $x+y=22$.

Câu III. (2 điểm)

a)Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức $x+y=xy$.

b) Chứng minh $P=n^4-2n^3-n^2+2n$ chia hết cho 24 với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ $DM\perp CE$.

1. Chứng minh tứ giác $ADKE$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra $AM\perp KM$.

2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh ΔADM cân và tính số đo của $\widehat{ANB}$.

3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng $CF\le 2EF$.

Câu IV. (1 điểm)

Cho $a,b,c>0$. CMR : $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{b}{b^2+c^2}+\dfrac{c}{c^2+a^2}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

……………………………… **HẾT** ………………………………

Họ tên học sinh: ....; Số báo danh: ....

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.A	5.B	6.D	7.C	8.B	9.A	10.D
11.C	12.A								

Câu 1. Cho biểu thức $L=8(3^2+1)(3^4+1)...(3^{128}+1)$. Thu gọn L ta được

A. $3^{256}-1$. **B.** $3^{256}+3$. **C.** $3^{256}+1$. **D.** $3^{256}-3$.

Giải

Ta có $8(3^2+1)(3^4+1)...(3^{128}+1)=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)...(3^{128}+1)$

$=(3^4-1)(3^4+1)...(3^{128}+1)=(3^8-1)(3^8+1)...(3^{128}+1)$ ....

$=(3^{128}-1)(3^{128}+1)=3^{256}-1$.

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 2: Rút gọn biểu thức $(x+y-z)^2+2(x+y-z)(z-x)+(z-x)^2$ thu được kết quả là

A. x^2. **B.** $-x^2$. **C.** y^2. **D.** z^2.

Giải

Ta có $(x+y-z)^2+2(x+y-z)(z-x)+(z-x)^2=(x+y-z+z-x)^2=y^2$

Đáp án cần chọn là. **C.**

Câu 3: Kết quả của phép chia $\left[(a-b)^3-(a-b)^2+(a-b)\right]:(a-b)$ là

A. $(a-b)^2-(a-b)+1$. **B.** $-(a-b)^2+(a-b)+1$.

C. $(a-b)^2+(a-b)+1$. **D.** $-(a-b)^2+(a-b)-1$.

Giải

$\left[(a-b)^3-(a-b)^2+(a-b)\right]:(a-b)$

$=(a-b)^3:(a-b)-(a-b)^2:(a-b)+(a-b):(a-b)$

$=(a-b)^2-(a-b)+1$.

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 4: Xác định hằng số a,b sao cho $10x^2-bx+a$ chia cho x^2-3 có đa thức dư là $x+4$.

A. $a=-26,b=-1$. **B.** $a=-1,b=-26$. **C.** $a=1,b=26$. **D.** $a=26,b=1$.

Giải

Xét phép chia:

$$\begin{array}{rrr|l} & 10x^2 \quad -bx & +a & x^2 \quad -3 \\ - & 10x^2 \quad\quad & -30 & \hline 10 \quad +4 \\ \hline & -bx & +(a+30) & \end{array}$$

Để $10x^2 - bx + a$ chia cho $x^2 - 3$ có đa thức dư là $-bx + (a+30)$

Để đa thức dư là $x + 4$ nên

$\begin{cases} -b = 1 \\ a + 30 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -26 \end{cases}$.

Vậy $a = -26; b = -1$

Đáp án cần chọn là. A.

Câu 5: Tìm a để giá trị nhỏ nhất của biểu thức $36x^2 - 12ax + a^2 + a - 1$ bằng 19 (mới)

A. 19. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 22.

Giải

Ta có $(36x^2 - 12ax + a^2) + a - 1 = (6x - a)^2 + a - 1$

Vì $(6x - a)^2 \geq 0$ với mọi $x, a \in \mathbb{R}$ nên $(6x - a)^2 + a - 1 \geq a - 1$ với mọi $x, a \in \mathbb{R}$

Để biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất bằng 19 thì $a - 1 = 19$. Vậy $a = 20$.

Đáp án cần chọn là. B.

Câu 6: Cho biểu thức $M = 9x^2 + 6y^2 + 18x - 12xy - 12y - 27$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $M \geq 0$. **B.** $M \leq 0$. **C.** $M \geq 36$. **D.** $M \geq -36$.

Giải

$M = 9x^2 + 6y^2 + 18x - 12xy - 12y - 27$

$M = 9x^2 + 18x - 12xy + 9 - 12y + 4y^2 + 2y^2 - 36$

$M = 9x^2 + 2.3x(3 - 2y) + (3 - 2y)^2 + 2y^2 - 36$

$M = [3x + (3 - 2y)]^2 + 2y^2 - 36 \geq -36$ (vì $[3x + (3 - 2y)]^2 \geq 0$; $2y^2 \geq 0$).

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$; $y = 0$.

Đáp án cần chọn là. D.

Câu 7: Cho x_1 và x_2 $(x_1 > x_2)$ là hai giá trị thỏa mãn $x(3x - 1) - 5(1 - 3x) = 0$. Khi đó $3x_1 - x_2$ bằng (câu mới).

A. -4. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -6.

Giải

Ta có: $x(3x-1)-5(1-3x)=0$

$x(3x-1)+5(3x-1)=0$

$(3x-1)(x+5)=0$

$\left[\begin{array}{l}3x-1=0\\ x+5=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}3x=1\\ x=-5\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\ x=-5\end{array}\right.$

mà $x_1>x_2$ nên $x_1=\dfrac{1}{3}$; $x_2=-5$.

Suy ra: $3x_1-x_2=3.\dfrac{1}{3}-(-5)=1+5=6$.

Đáp án cần chọn là. **C.**

Câu 8: Xác định hằng số a sao cho $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$.

A. 18. **B.** -18. **C.** 0. **D.** 3.

Giải

Xét phép chia:

$$\begin{array}{rrr|l} 4x^2 & -6x & +a & x-3 \\ \cline{4-4} -\;4x^2 & -12x & & 4x+6 \\ \hline & 6x & +a & \\ - & 6x & -18 & \\ \hline & & a+18 & \end{array}$$

Để $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$ thì $a+18=0 \Leftrightarrow a=-18$.

Vậy với $a=-18$ thì $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$.

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 9: Xác định các hằng số a,b sao cho x^4+ax+b chia hết cho x^2-4;

A. $a=0,b=-16$. **B.** $a=0,b=16$. **C.** $a=16,b=0$. **D.** $a=-16,b=0$.

Giải

Xét phép chia

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^4 & +ax & +b & x^2-4 \\
\cline{5-5}
- & x^4\quad -4x^2 & & & x^2+4 \\
\cline{1-4}
 & 4x^2 & +ax & +b & \\
- & 4x^2 & & -16 & \\
\cline{2-4}
 & & ax & +(b+16) &
\end{array}
$$

Để x^4+ax+b chia hết cho x^2-4 thì đa thức dư $ax+b+16$ phải là đa thức $0.$ Do đó $a=0$, $b=-16$

Vậy với $a=0, b=-16$ thì x^4+ax+b chia hết cho x^2-4

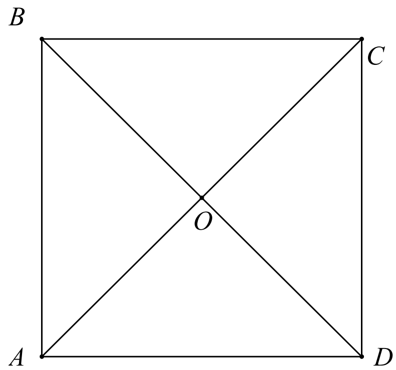
Đáp án cần chọn là. A.

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$, đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $AC=10cm$.

Diện tích tam giác ABC bằng:

A. $100cm^2$. **B.** $50cm^2$. **C.** $20cm^2$. **D.** $25cm^2$.

Giải



Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà $AC=10cm \Rightarrow BD=10cm$. Do đó $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}.10=5(cm)$.

Mặt khác ta lại có ΔABC vuông tại B có BO là đường cao (Vì $BO \perp AC$ theo tính chất hai đường chéo vuông góc của hình vuông).

Ta có: Diện tích tam giác ABC là: $\frac{1}{2}BO.AC=\frac{1}{2}.5.10=25(cm^2)$.

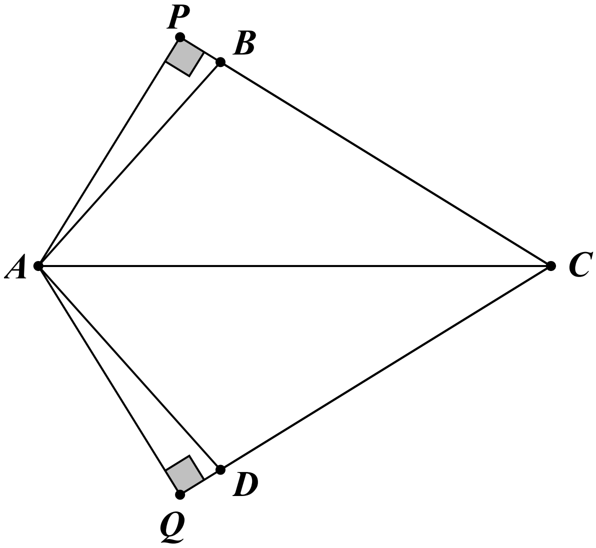
Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB=AD$, CA là phân giác của $\widehat{BAD}$, $\widehat{ADC}=100^\circ$. Kẻ $AP \perp CB$, $AQ \perp CD$ (B nằm giữa P và C, D nằm giữa Q và C). Số đo của $\widehat{ABC}$ là:

A. 80°. **B.** 90°. **C.** 100°. **D.** 135°.

Lời giải

Đáp án cần chọn là. **C.**



Xét ΔAPC và ΔAQC có:

$\widehat{APC} = \widehat{AQC} = 90^\circ$ ($AP \perp CB,\ AQ \perp CD$)

AC chung

$\widehat{PCA} = \widehat{QCA}$ (CA là phân giác của $\widehat{PCQ}$)

$\Rightarrow$ $\Delta APC = \Delta AQC$ (ch.gn)

$\Rightarrow$ $AP = AQ$ (các cạnh tương ứng)

Xét ΔAPB và ΔAQD có:

$\widehat{APC} = \widehat{AQC} = 90^\circ$ ($AP \perp CB,\ AQ \perp CD$)

$AB = AD$ (gt)

$AP = AQ$ (cmt)

$\Rightarrow$ $\Delta APC = \Delta AQD$ (ch.cgv)

$\Rightarrow$ $\widehat{ABP} = \widehat{ADQ}$ (các góc tương ứng)

Mà $\widehat{ABP} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (kề bù), $\widehat{ADQ} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow$ $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 100^\circ$

Đáp án cần chọn là. **C.**

Câu 12: Thống kê số môn học yêu thích của một nhóm 100 học sinh lớp 8 được chọn ngẫu nhiên của trường THCS Y, thu được kết quả như bảng sau:

Số môn học yêu thích	0	1	2	3	4
Số học sinh	5	20	32	28	15

Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường Y. Gọi A là biến cố: “Số học sinh yêu thích các môn học lớn hơn hoặc bằng 2”. Hãy dự đoán trong nhóm 80 học sinh khác (được chọn ngẫu nhiên) của trường: Có bao nhiêu em có số môn học yêu thích không ít hơn 2?

A. 60. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 70.

Giải

Ta có tổng số học sinh yêu thích số môn học lớn hơn hoặc bằng 2 là :

$32+28+15=75.$

Xác suất của của biến cố A: “Số học sinh yêu thích các môn học lớn hơn hoặc bằng 2” là:

$$P(A)=\frac{75}{100}=0,75.$$

Gọi k là nhóm học sinh có số môn học yêu thích không ít hơn 2.

Ta có $P(A)\approx\frac{k}{80}$. Thay giá trị ước lượng của $P(A)\approx 0,75$, ta được $\frac{k}{80}\approx 0,75$.

Suy ra $k\approx 0,75.\,80=60$.

Vậy trong nhóm 80 học sinh có khoảng 60 học sinh có số môn học yêu thích không ít hơn 2.

Đáp án cần chọn là. **A.**

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

<table>
<tr><th>CÂU</th><th>NỘI DUNG</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td colspan="3">Câu I. (2 điểm)
a) Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$.
b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $\left(a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac\right)-4c^2$.</td></tr>
<tr><td></td><td>a) Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $a^4+b^4+c^4=2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$.
Từ $a+b+c=0$ ta có: $b+c=-a$, suy ra $(b+c)^2=a^2$
$(b+c)(b+c)=a^2$
$b^2+2bc+c^2=a^2$
$a^2-b^2-c^2=2bc$
Suy ra $\left(a^2-b^2-c^2\right)^2=4b^2c^2$
$\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2-c^2\right)=4b^2c^2$
$a^4-a^2b^2-a^2c^2-a^2b^2+b^4+b^2c^2-a^2c^2+b^2c^2+c^4=4b^2c^2$
$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2=4b^2c^2$
$a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2+4b^2c^2$
$a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2=2\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)$ (đpcm).</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử</td><td></td></tr>
</table>

$\left(a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac\right)-4c^2$.

$\left(a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ac\right)-4c^2$

$=\left(a+2b+3c\right)^2-\left(2c\right)^2=\left(a+2b+c\right)\left(a+2b+5c\right)$.

Câu II. (3 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x)=x^4-2x^2\left(3x-\frac{9}{4}\right)+\left(3x-\frac{9}{4}\right)^2$.

b) Tìm x,y thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức sau: $\frac{4+x}{7+y}=\frac{4}{7}$ và $x+y=22$.

a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $f(x)=x^4-2x^2\left(3x-\frac{9}{4}\right)+\left(3x-\frac{9}{4}\right)^2$.

Cho $x^4-2x^2\left(3x-\frac{9}{4}\right)+\left(3x-\frac{9}{4}\right)^2=0$

$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)^2=0$

$\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]^2=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^4=0$

$x=\frac{3}{2}$

Vậy $x=\frac{3}{2}$ là nghiệm của đa thức $f(x)=x^4-2x^2\left(3x-\frac{9}{4}\right)+\left(3x-\frac{9}{4}\right)^2$.

b) Tìm x,y thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức sau: $\frac{4+x}{7+y}=\frac{4}{7}$ và $x+y=22$.

Ta có $\frac{4+x}{7+y}=\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{4+x}{4}=\frac{7+y}{7}=\frac{4+x+7+y}{4+7}=\frac{11+22}{11}=\frac{33}{11}=3$

Suy ra $4+x=12$ nên $x=8$ và $7+y=21$ nên $y=14$.

Vậy $x=8, y=14$.

Câu III. (2. điểm)

a)Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức $x+y=xy$.

b) Chứng minh $P=n^4-2n^3-n^2+2n$ chia hết cho 24 với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

a)Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đẳng thức $x+y=xy$.

Ta có $x+y=xy$ được viết thành: $xy-x-y=0$.

Do đó suy ra: $x(y-1)-(y-1)=1$ hay $(y-1)(x-1)=1$

Mà $1=1.1=(-1).(-1)$ nên: $\begin{cases} y-1=1 \\ x-1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy ta có hai cặp số nguyên cần tìm là $(0;0)$ và $(2;2)$.

b) Chứng minh $P=n^4-2n^3-n^2+2n$ chia hết cho 24 với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Ta có:

$P=n^4-2n^3-n^2+2n=n\left[n^2(n-2)-(n-2)\right]=n(n-1)(n+1)(n-2)$

là tích bốn số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 8

Mặt khác tích của bốn số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 3

Mà $(3,8)=1$ nên $P\,\vdots\,24$.

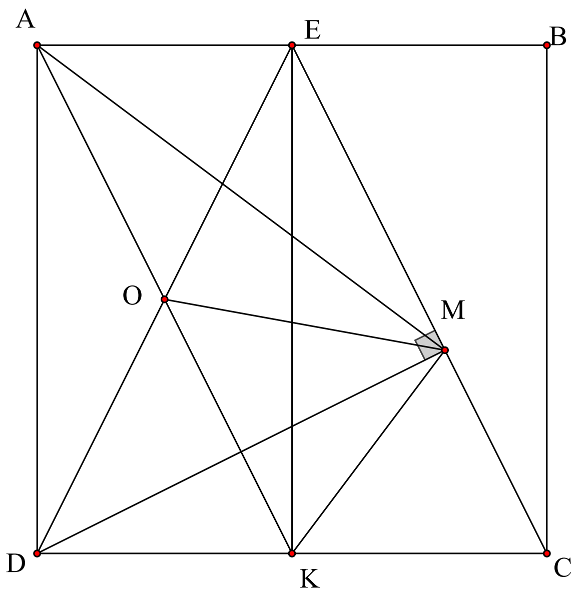
Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E,K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ $DM\perp CE$.

1. Chứng minh tứ giác $ADKE$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra $AM\perp KM$.

2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh ΔADM cân và tính số đo của $\widehat{ANB}$.

3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng $CF\le 2EF$.



1. Chứng minh tứ giác $ADKE$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra $AM\perp KM$.

Ta có : $ABCD$ là hình vuông

E,K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$\Rightarrow AE=DK$ và $AE//DK$

$\Rightarrow AEKD$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{DAE} = 90^\circ$

$\Rightarrow AEKD$ là hình chữ nhật.

Ta có O là giao điểm của 2 đường chéo AK và DE nên

$OA = OE = OK = OD = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}DE$

Xét ΔMDE vuông tại M có :

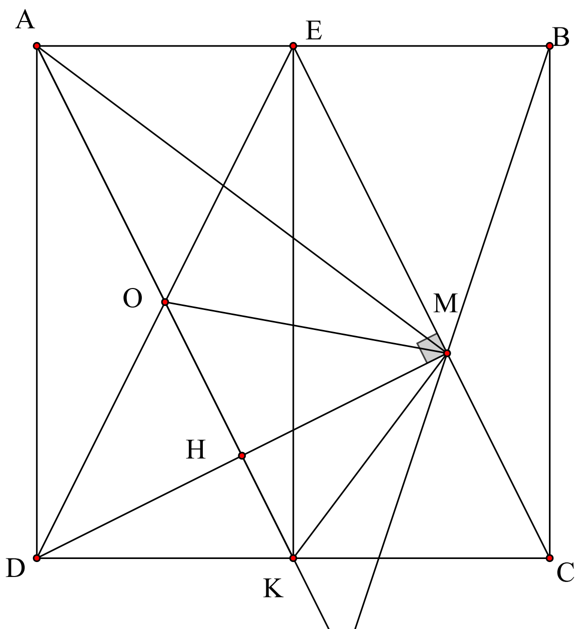
MO là đường trung tuyến

$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}AK$

$\Rightarrow \Delta AMK$ vuông tại M

$\Rightarrow AM \perp KM$ (đpc/m).

2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh ΔADM cân và tính số đo của góc ANB.



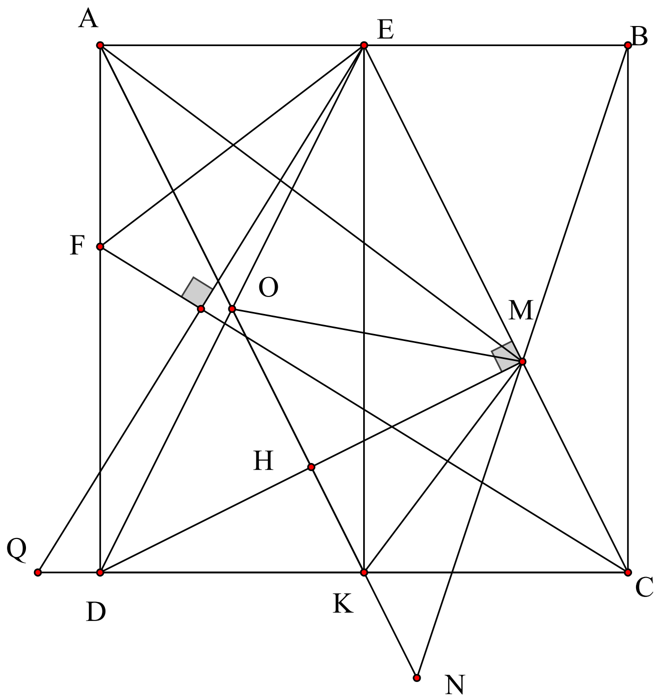
Gọi H là giao điểm của AK và DM.

Xét tứ giác $AECK$ có:

$AE = CK\left(= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD\right)$

$AE // CK$

	$\Rightarrow AECK$ là hình bình hành . $AK//CE \Rightarrow HK//MC$ Xét ΔDMC có $\begin{cases} KD = KC \\ HK//MC \end{cases} \Rightarrow HD = HM$ Có : $DM \perp CE \Rightarrow AH \perp DM$ $\Rightarrow \Delta ADM$ cân tại $A \Rightarrow AD = AM = AB$ $\Rightarrow \Delta AMB$ cân tại A. Do ΔADM cân tại $A \Rightarrow \widehat{AMD} = \dfrac{180^\circ - \widehat{DAM}}{2}$ Do ΔABM cân tại $A \Rightarrow \widehat{AMB} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAM}}{2}$ $\Rightarrow \widehat{AMD} + \widehat{AMB} = \dfrac{180^\circ - \widehat{DAM} + 180^\circ - \widehat{BAM}}{2} = \dfrac{360^\circ - (\widehat{DAM} + \widehat{BAM})}{2}$ $= \dfrac{360^\circ - \widehat{DAB}}{2} = \dfrac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$ $\Rightarrow \widehat{BMD} = 135^\circ$ Lại có $\widehat{BMD}$ là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được $\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{MNH} + \widehat{MHN}$ $\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{BMD} - \widehat{MHN} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ Vậy $\widehat{ANB} = \widehat{MNH} = 45^\circ$.	
	3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng $CF \leq 2EF$.	



Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q.
Xét hình vuông $ABCD$ có EK là đường trung bình .
Suy ra $EK = AD = CD$, $EK // AD \Rightarrow AD \perp CD \Rightarrow \widehat{EKQ} = 90^\circ$
Xét ΔCDF và ΔEKQ có:
$\widehat{KEQ} = \widehat{FCQ}$ (cùng phụ với góc EQC)
$CD = EK$; $\widehat{EKQ} = \widehat{CDF} = 90^\circ$
$\Rightarrow \Delta CDF = \Delta EKQ$ (g.c.g)
$\Rightarrow CF = EQ$ (Hai cạnh tương ứng)
Xét ΔCEQ có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao.
Suy ra ΔCEQ cân tại C
$\Rightarrow CF$ cũng là đường trung trực
$\Rightarrow FE = FQ$ (tính chất đường trung trực)
$\Rightarrow EF + FQ = 2EF$
$\Rightarrow EQ \le EF + FQ = 2EF$
Dấu $"="$ xảy ra khi $E;Q,F$ thẳng hàng
Mà $EQ = FC \Rightarrow FC \le 2EF$ (đpc/m).

Câu IV. (1 điểm)

Cho $a,b,c > 0$. CMR : $\dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{b^2+c^2} + \dfrac{c}{c^2+a^2} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$..

Áp dụng Cô si cho hai số $a^2, b^2 > 0$, ta có : $a^2 + b^2 \ge 2ab$
Làm tương tự ta sẽ có

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \ge 2bc \\ c^2 + a^2 \ge 2ca \end{cases} \Rightarrow VT \le \frac{a}{2ab} + \frac{b}{2bc} + \frac{c}{2ca} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

	Dấu " = " khi và chỉ khi: $\begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$	

----------- **Hết** -----------

<u>Chú ý</u>:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.