MỤC LỤC

▶BÀI ❶. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:

- Cho mặt phẳng (α).
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\cdot\vec{n}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng:

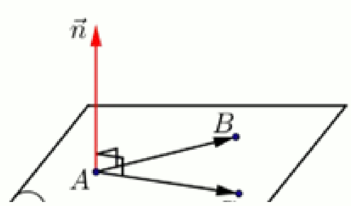
- Cho mặt phẳng (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét:

- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương :

- Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý:

- Vectơ $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai vectơ $Oxyz$ và (α).
- $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right)$.
- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.
- Nếu $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

- Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) thì vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)
- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$.
- Khi đó: $N_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện:

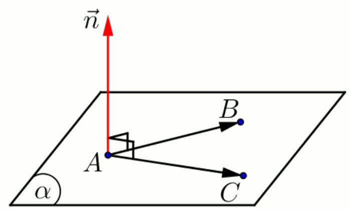
- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến:*
- Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ hay $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$
- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương:*
- Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}; \vec{b}$, ta thực hiện như sau:
- **Bước 1:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\vec{a}; \vec{b}\right]$.

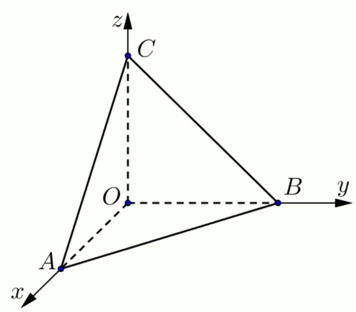
Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm không thẳng hàng:

- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng:*
- Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:
- **Bước 1:** Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- **Bước 2:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Nhận xét:

- Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. với $abc \neq 0$.
- Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.





3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

- Trong không gian $Oxyz$,
- cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$.
- Khi đó: $(\alpha_1)//(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_1}=k\vec{n_2} \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Chú ý

- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_1}=k\vec{n_2} \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ không cùng phương..

- **Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:**
- Trong không gian $Oxyz$,
- cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$.
- Khi đó: $(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- **Định nghĩa**
- Trong không gian $Oxyz$,
- $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$.
- Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

5. Các mặt phẳng đặc biệt

- Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O.	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song/chứa Ox.	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$
(α) song song/chứa Oy.	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$
(α) song song/chứa Oz.	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$
(α) song song/trùng (Oxy).	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song/trùng (Oxz).	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song/trùng (Oyz).	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$

- ***Nhận xét:***
- Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

⬩Dạng ❶: Xác định vecto pháp tuyến của mặt phẳng

Phương pháp

- Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.
- Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là v éctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz,$ mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3),\ \vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

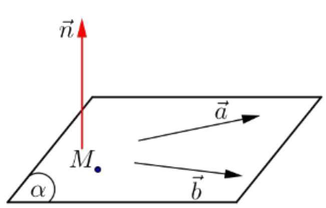
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2y+x+3z-1=0.$ Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-3);B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

⬩Dạng ❷: PTMP khi biết điểm đi qua và cặp vecto chỉ phương

Phương pháp

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$ có dạng:
- $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$ (với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$



☞Các ví dụ minh họa

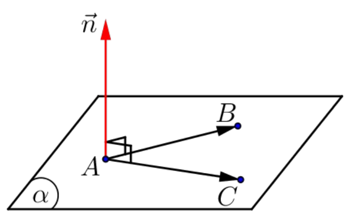
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

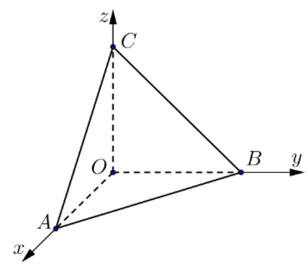
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3), \vec{b}=(1;1;2)$

Dạng ❸: PTMP qua ba điểm không thẳng hàng

Phương pháp

- Phương trình mặt phẳng (P) di qua $A;B;C$ không thẳng hàng.
- **Bước 1:** Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.
- **Bước 2:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.
- Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$ có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.





☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3), B(2;-1;1), C(1;-1;0)$.

(2) Với ba điểm $A(1;0;2), B(-2;3;1), C(3;2;1)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$, $P(0;0;2)$.

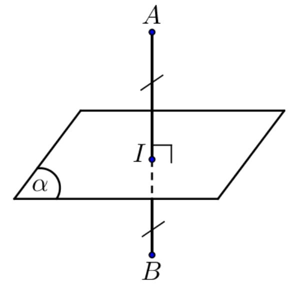
(2) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Dạng ❹: PTMP trung trực của đoạn thẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) ***trung trực*** đoạn thẳng AB
- **Bước 1:** Véctơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 2:** Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$



☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy), và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz). Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN.

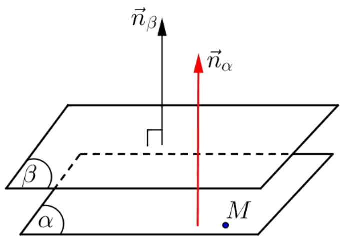
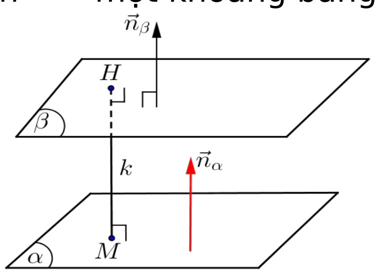
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;2;1), B(3;0;0)$, $C(1;-1;-2), D(-1;1;-1)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm $DABC$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Dạng ❺: PTMP 1 điểm kèm điều kiện song song với mặt phẳng khác

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	**Phương pháp**
(1) Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. 	⌘ ***Cách 1:*** ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ ***Cách 2:*** ≫ Do $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$ ≫ Thay điểm M vào $(\alpha)\Rightarrow D'=?\Rightarrow(\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	≫ Vì $(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0$ $(D\neq D')$. ≫ Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha);(P))=k \xleftrightarrow{M\in(\alpha)} d(M;(P))=k$ $\Leftrightarrow \dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k\Rightarrow D'=?$ ≫ Có $D'\Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ có phương trình là?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là?

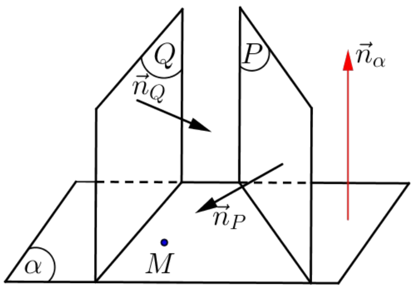
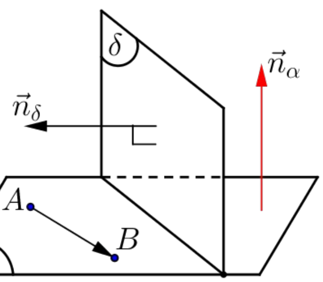
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0, (\alpha_2): x+4y-5=0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

•Dạng ❻: PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác

📝 *Phương pháp*

✅ Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P): Ax+By+Cz+D=0$, $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$. 	≫ Tìm cặp véctơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. ***Hoặc bài toán sẽ gặp:*** "Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$"
Loại	**Phương pháp**
Qua điểm $A;B$ và vuông góc $(d): Ax+By+Cz+D=0$. 	≫ Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(d)}\right]$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(d)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm A.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là?

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là?

•Dạng ❼: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

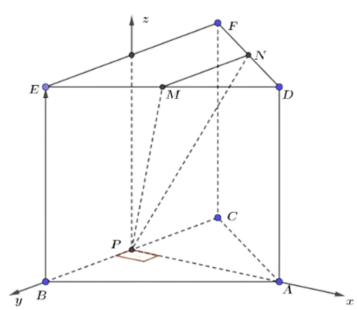
- Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau
- **Bước 1:** Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức $d(M_0,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Lưu ý: $d(M_0,(Oxy))=\sqrt{(z_0)^2}$ $d(M_0,Ox)=\sqrt{(y_0)^2+(z_0)^2}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB=6$, $AD=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



•Dạng ❽: Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Phương pháp

- Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:
- Mặt phẳng $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,
- Ta có các vị trí tương đối sau:

		Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	$\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$	Mặt (P) ***cắt*** mặt (Q)
	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$	Mặt (P) ***song song*** mặt (Q)

	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$	Mặt (P) ***trùng*** mặt (Q)
	$A.A'+B.B'+C.C'=0$	Mặt (P) ***vuông góc*** mặt (Q)

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho ba mặt phẳng $(P_1):2x-y-2z+1=0$, $(P_2):4x-2y-4z+4=0$, $(P_3):x+4y-z+1=0$. Chứng minh $(P_1)//(P_2)$ và $(P_1)\perp(P_3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(a):m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $(b):2x+m^2y-2z+1=0$. Hai mặt phẳng (a) và (b) vuông góc với nhau khi nào?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-3y+5z-1=0$ và $(Q):4x+(m-3)y+(m^2+1)z-7=0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6),D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$,. (P). cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là?

•Dạng ❾: Ứng dụng tích có hướng

Phương pháp

- (1) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện: .... $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\neq 0$.
- $\Leftrightarrow$ A,B,C,D không đồng phẳng
- (2) Diện tích ΔABC: .... $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- $\Rightarrow$ Đường cao ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$
- (3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: .... $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- (4) Thể tích tứ diện $ABCD$: .... $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.
- $\Rightarrow$ Đường cao chóp $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,(BCD)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,(BCD)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

Bài toán tính diện tích tam giác:

- Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 2:** Sử dụng $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ để tính diện tích ΔABC.
- *Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:*
- **Bước 3:** Sử dụng $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}AH.OB \Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH.

Bài toán tính thể tích tứ diện:

- Trong không gian $Oxyz,$ cho $A(...),B(...),C(...),D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$.
- **Bước 2:** Sử dụng $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- *Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:*
- **Bước 3:** Sử dụng $V_{ABCD} = \frac{1}{3}d(A,(BCD)).S_{\Delta BCD} \Rightarrow d(A,(BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$.

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác $OAB.$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$.

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m)$, $B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

©. Dạng toán rèn luyện

•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}$. **C.** $\overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ADD'A')$?

A. $\overrightarrow{CC'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC)?

A. $(3;4;5)$. **B.** $(0;4;5)$. **C.** $(-3;4;0)$. **D.** $(-3;0;-5)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(-1;4;1), C(3;-2;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC)?

A. $(1;2;2)$. **B.** $(8;-16;16)$. **C.** $(-1;2;-2)$. **D.** $(1;4;4)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;-4;2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(-4;4;2)$. **D.** $(0;0;-3)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}-1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là?

A. $(4;6;2)$. **B.** $(2;3;1)$. **C.** $(3;2;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z+1=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là:

A. $\vec{n_2}=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{n_1}=(2;-3;1)$. **C.** $\vec{n_3}=(-2;0;-3)$. **D.** $\vec{n_4}=(-2;3;-1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây:

A. $M(-1;-1;-1)$. **B.** $N(1;1;1)$. **C.** $P(-3;0;0)$. **D.** $Q(0;0;-3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ **không** đi qua điểm nào dưới đây:

A. $P(0;2;0)$. **B.** $Q(0;0;3)$. **C.** $M(1;2;3)$. **D.** $N(1;0;0)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2024=0$. **C.** $y+2025=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm nào sau đây:

A. $M(1;2;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(1;0;-3)$. **D.** $Q(0;2;-5)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-1)$ là:

A. $(\alpha):2x+3y-z-2=0$. **B.** $(\alpha):2x+3y-z+2=0$.
C. $(\alpha):2x-y+3z-2=0$. **D.** $(\alpha):2x-y+3z+2=0$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+4=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với (P)?

A. $2x+y-2z+5=0$. **B.** $x+2y+2z-5=0$.
C. $x+3y-z+1=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến $(P):x+2y+2z-10=0$ là

A. 3. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):x+3y-5z+2=0$.

A. $\vec{n}=(-1;-3;5)$. **B.** $\vec{n}=(2;6;-10)$.
C. $\vec{n}=(-2;-6;-10)$. **D.** $\vec{n}=(-3;-9;15)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz,$ véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P), biết $\vec{a}=(-1;-2;-2)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$ là cặp véctơ chỉ phương của (P)?

A. $\vec{n}=(2;1;2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;-2)$. **C.** $\vec{n}=(2;1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;-2)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz,$ phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;2;-6)$ là

A. $4x+2y-6z+5=0.$ **B.** $2x+y-3z+5=0.$
C. $2x+y-3z+2=0.$ **D.** $2x+y-3z-5=0.$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz,$ cho $A(0;1;1);B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng $AB.$

A. $(P):x+y+2z-3=0$. **B.** $(P):x+y+2z-6=0$.
C. $(P):x+3y+4z-7=0$. **D.** $(P):x+3y+4z-26=0$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Câu 20: Cho hai mặt phẳng $(a): 3x-2y+2z+7=0, (b): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (a) và (b) là:

A. $2x-y-2z=0.$ **B.** $2x+y-2z=0.$ **C.** $2x-y+2z=0.$ **D.** $2x+y-2z+1=0.$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=6, d=-6$. **B.** $a=1, d=1$. **C.** $a=-1, d=-6$. **D.** $a=-6, d=6$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+4=0$ là

A. $2x+y+3z+7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.

C. $2x-y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z-7=0$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình:

A. $(Q): 3x-2y+4z-4=0.$ **B.** $(Q): 3x-2y+4z+4=0.$

C. $(Q): 3x-2y+4z+5=0.$ **D.** $(Q): 3x+2y+4z+8=0.$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-2024=0$.

(a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

(b) Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.

(c) Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.

(d) Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0);B(4;1;2)$.

(a) $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$

(b) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.

(c) Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

(d) Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng ABcó phương trình là $3x+y+2z-12=0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4);B(2;7;9);C(0;9;13)$; $D(1;8;10)$. Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

(a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$

(b) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

(c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$

(d) Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

(a) $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$

(b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$

(c) (ABC): $x-y+z-4=0$

(d) $O\in(ABC)$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$ $(Q):3x-y+z-5=0$ và $(R):2x+4y-mz-2=0$.

(a) $(P)//(Q)$

(b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha):x+2y-z=0$

(c) $(P)//(R)$ khi $m=2$

(d) $(P)\perp(R)$ khi $m=-10$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2;-4;3)$ và $(P):2x-y+2z-3=0$, $(Q):2x-y+2z-6=0$

(a) $d(M,(P))=2$

(b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)

(c) $d((P),(Q))=1$

(d) (α) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(\alpha):2x-y+2z-9=0$

Câu 7: Cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z-5=0$; $(Q):4x-2y+4z+1-m=0$ và điểm $M(2;1;5)$

(a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

(b) Với $m=0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

(c) Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

(d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{a}{b}$ tối giản; $a;b\in ¢$. Tính $T=2a-b$?

Câu 2: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha):x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Tính giá trị biểu thức $S=2a-b$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x-y+2z-1=0$ có dạng $x-y+az+b=0$ Tính giá trị biểu thức $S=a-b$.

Câu 5: Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0); B(0;0;2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P), thì m bằng bao nhiêu?

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho $(a): x+2y-z-1=0$ và $(b): 2x+4y-mz+2=0$. Tìm m để (a) và (b) song song với nhau.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và $(P): x-y+z-4=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), có dạng $(Q): ax+by+cz+2=0$. Tính $T=a+b+c$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0), M(3;0;1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC), (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng -7 và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1).

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3, m,n,p$ là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP). (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.