TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY

ĐỀ THI ĐỀ XUẤT
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI NĂM 2023
MÔN: TOÁN 11
Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề thi gồm 05 bài trong 01 trang)

Bài 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $0 < a_1 \neq 1$ và $a_{n+1} = a_n + \dfrac{n}{a_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n) = 0$.

Bài 2 (4,0 điểm). Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn

$$2xP(x) + 2yP(y) + 2zP(z) = (x+y+z)[P(x-y) + P(y-z) + P(z-x)], \ (*)$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 6xyz$.

Bài 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. AO cắt EF tại J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AJD cắt (O) tại K khác A. Gọi M là trung điểm BC.

a) Vẽ đường kính AX của đường tròn (O), gọi Y là hình chiếu của H trên AM. Chứng minh EF, HK và XY đồng quy tại một điểm P.

b) Gọi N là trung điểm EF, Q đối xứng với P qua N. R là hình chiếu của H trên AN. Trên PQ lấy L sao cho $HL \perp EF$. Chứng minh trung trực của HL chia đôi BC.

Bài 4 (4,0 điểm). Cho k là một số nguyên dương và đặt $n = (2^k)!$. Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước nguyên dương của n. Chứng minh rằng $\sigma(n)$ có một ước nguyên tố lớn hơn 2^k.

Bài 5 (4,0 điểm). Xét một $n-$giác đều cùng với tâm của nó. Hai người chơi trò chơi như sau: họ lần lượt chọn một đỉnh của đa giác rồi nối với một trong hai đỉnh kề hoặc nối với tâm của hình đa giác đó bởi một đoạn thẳng. Người thắng cuộc là người chơi mà sau lượt chơi của anh ta thì ở bất kỳ đỉnh nào của đa giác đều có thể di chuyển đến mọi đỉnh còn lại bằng các đoạn thẳng đã nối ở trên. Với mỗi $n \geq 3$, hãy xác định xem ai là người có chiến lược thắng cuộc.

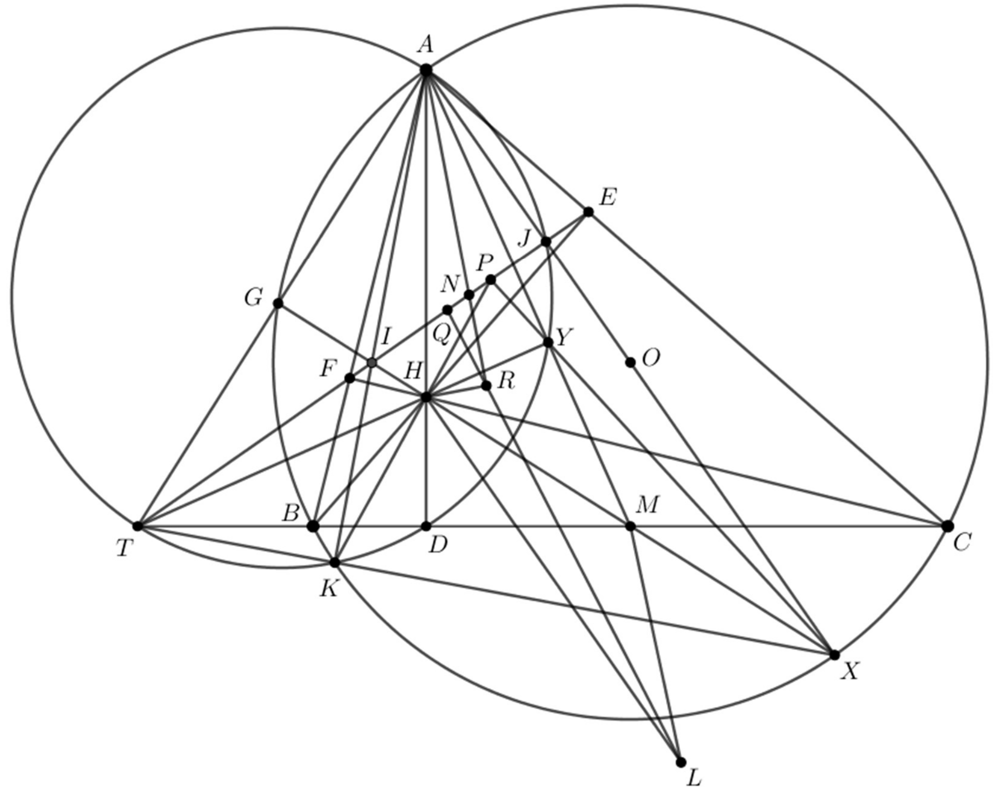
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY	HDC ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI NĂM 2023 MÔN: TOÁN 11 Thời gian làm bài: 180 phút (HDC gồm 08 trang)

Bài	Hướng dẫn	Điểm
1. (4,0 điểm)	**Cho dãy số (a_n) xác định bởi $0<a_1\neq 1$ và $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n},\forall n\geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-n)=0$.**	
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}>2$ (do $a_1\neq 1$). Ta có: $a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-(n+1)=a_n-n+\frac{n}{a_n}-1$ $=\frac{a_n^2-(n+1)a_n+n}{a_n}=\frac{(a_n-n)(a_n-1)}{a_n}$. Quy nạp được $a_n>n,\forall n\geq 2$.	1,0
	Lại có: $\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{a_n-1}{a_n}=1-\frac{1}{a_n}$ $\Leftrightarrow a_{n+1}-(n+1)=(a_2-2)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\left(1-\frac{1}{a_3}\right)...\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$.	1,0
	Ta lại có $1-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+\frac{n}{a_n}-1}{a_{n+1}}<\frac{a_n}{a_{n+1}}$ (do $a_n>n\Rightarrow\frac{n}{a_n}<1$). Suy ra $\prod\limits_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)<\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}...\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_1}{a_n}$. $\Rightarrow a_{n+1}-(n+1)<(a_2-2).\frac{a_1}{a_n}<(a_2-2).\frac{a_1}{n}$ (vì $a_n>n$).	1,0

	$\Rightarrow 0 < a_{n+1} - (n+1) < (a_2 - 2).\dfrac{a_1}{n}$.	
	Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_2 - 2)\dfrac{a_1}{n} = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1} - (n+1)\right) = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n) = 0$.	1,0
2. (4,0 điểm)	**Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn** $2xP(x) + 2yP(y) + 2zP(z) = (x+y+z)[P(x-y) + P(y-z) + P(z-x)]$, (*) **với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $x + y + z = 6xyz$.**	
	Thay $y = -x, z = 0$ vào (*) ta có: $xP(x) = xP(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mà $P(-0) = P(0)$, nên $P(-x) = P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chẵn. Khi $P(x) \equiv c$. Thay vào (*), ta có c = 0. Do đó $P(x) \equiv 0$ là một nghiệm của bài toán.	1,0
	Khi $\deg P = n > 0$, với n chẵn, đặt $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$ Thay $y = \dfrac{1}{3x}, z = x + \dfrac{1}{3x}$ vào (*) ta có $\left(x^2 + \dfrac{1}{3}\right)\left[P\left(x + \dfrac{1}{3x}\right) + P\left(x - \dfrac{1}{3x}\right)\right] = \dfrac{1}{3}P(x) + x^2 P\left(\dfrac{1}{3x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	1,0
	Nhân hai vế với x^n ta được $x^n\left(x^2 + \dfrac{1}{3}\right)\left[P\left(x + \dfrac{1}{3x}\right) + P\left(x - \dfrac{1}{3x}\right)\right] = \dfrac{1}{3}x^n P(x) + x^{n+2} P\left(\dfrac{1}{3x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo biến x và $\deg VT = 2n, \deg VP = \max\{2n, n+2\}$.	1,0
	Bây giờ cả hai vế là các đa thức theo biến x và $\deg VT = 2n, \deg VP = \max\{2n, n+2\}$. Nếu $\deg P = n \geq 4$ thì $\deg VP = 2n$ .So sánh hệ số của x^{2n} hai vế, ta được $\dfrac{2n}{3}a_n = \dfrac{1}{3}a_n$, (vô lý) Do đó $\deg P = 2$. Đặt $P(x) = ax^2 + b (a \neq 0)$. Thay vào (*) ta có $b = a$ Do đó $P(x) = ax^2 + a (a \neq 0)$. Vậy $P(x) = ax^2 + a$(a là hệ số thực bất kỳ) là tất cả đa thức cần tìm.	1,0
3. (3,0 điểm)	**Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. AO cắt EF tại J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AJD cắt (O) tại K khác A. Gọi M là trung điểm BC.** **a) Vẽ đường kính AX của đường tròn (O), gọi Y là hình chiếu của H**	

trên AM. **Chứng minh EF, HK và XY đồng quy tại một điểm P.**

b) Gọi N là trung điểm EF, Q đối xứng với P qua N. R là hình chiếu của H trên AN. Trên PQ lấy L sao cho $HL \perp EF$. Chứng minh trung trực của HL chia đôi BC.



a) Vẽ đường kính AX của đường tròn (O), gọi Y là hình chiếu của H trên AM. Chứng minh EF, HK và XY đồng quy tại một điểm P.	
Gọi G là giao điểm thứ hai của (O) và XH. Khi đó G thuộc đường tròn (AH). Suy ra AG,EF,BC là các trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AH) và (O), (BC) và (AH), (O) và (BC). Do đó AG,EF,BC đồng quy tại T. Đồng thời, theo kết quả quen thuộc thì M là trung điểm HX.	0,5
Dễ thấy $AO \perp EF$ nên J, D thuộc đường tròn đường kính AT nên $\angle AKT = 90^\circ$. Điều này kéo theo T, K, X thẳng hàng.	0,5
Trong tam giác ATX, các đường cao AK, TJ, XG đồng quy tại một điểm I.	0,5
Suy ra $Y(IK,XT) = I(YK,XT) = I(YA,MT) = T(YA,MI) = T(HA,DE) = -1$. Do đó nếu gọi $P = XY \cap EF$ và $K' = PH \cap XY$ thì $Y(IK',XT) = -1 = Y(IK,XT)$, dẫn đến $K \equiv K'$, ta có điều phải chứng minh.	0,5
b) Gọi N là trung điểm EF, Q đối xứng với P qua N. R là hình	

	chiếu của H trên AN. Trên PQ lấy L sao cho $HL \perp EF$. Chứng minh trung trực của HL chia đôi BC	
	Ta thấy R, Y, E, F nằm trên đường tròn đường kính AH. Theo kết quả quen thuộc thì AY là đối trung của tam giác AEF, do dó $RY \parallel EF$.	0,5
	Suy ra $EFRY$ là hình thang cân, kéo theo R, Y đối xứng qua trung trực của EF là MN, đồng thời P, Q cũng đối xứng qua MN.	0,5
	Do HL và AX cùng vuông góc EF, đồng thời H, X đối xứng qua M nên HL đối xứng AX qua MN.	0,5
	Điều này dẫn đến, giao điểm của NR và HL đối xứng với giao điểm của AX và PY, tức L đối xứng với X qua MN. Suy ra $MH = MX = ML$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	0,5
4. (4,0 điểm)	**Cho k là một số nguyên dương và đặt $n = \left(2^k\right)!$. Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước nguyên dương của n. Chứng minh rằng $\sigma(n)$ có một ước nguyên tố lớn hơn 2^k.**	
	Ta có $$v_2(n) = v_2\left(\left(2^k\right)!\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2^k}{2^i} \right\rfloor = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^k - 1.$$	1,0
	Do đó $n = 2^{2^k - 1} q$, với q lẻ. Suy ra $$2^{2^k} - 1 = \sigma\left(2^{2^k - 1}\right) \mid \sigma\left(2^{2^k - 1}\right)\sigma(q) = \sigma(n).$$ Mà $2^{2^{k-1}} + 1 \mid 2^{2^k} - 1$ nên $2^{2^{k-1}} + 1 \mid \sigma(n)$.	1,0
	Gọi p là một ước nguyên tố lẻ của $2^{2^{k-1}} + 1$. Khi đó $p \mid 2^{2^k} - 1$. Do đó nếu đặt $h = \mathrm{ord}_p(2)$ thì $h \mid 2^k$, dẫn đến $h = 2^m$ với $m \le k$. Nếu $m < k$ thì $h \mid 2^{k-1}$, do đó $-1 \equiv 2^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Dẫn đến $p = 2$, mâu thuẫn.	1,0
	Do đó $h = 2^k$. Mặt khác theo định lí Fermat nhỏ thì $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ thế nên $2^k = h \mid p - 1$. Suy ra $p > 2^k$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	1,0
5. (3,0 điểm)	**Xét một $n-$giác đều cùng với tâm của nó. Hai người chơi trò chơi như sau: họ lần lượt chọn một đỉnh của đa giác rồi nối với một trong hai đỉnh kề hoặc nối với tâm của hình đa giác đó bởi một đoạn thẳng. Người thắng cuộc là người chơi mà sau lượt chơi của anh ta thì ở bất kỳ đỉnh nào của đa giác đều có thể di chuyển đến mọi đỉnh còn lại bằng các đoạn thẳng đã nối ở trên. Với mỗi $n \ge 3$, hãy xác định xem ai là người có chiến lược thắng cuộc.**	

	Xét n chẵn. **TH1.** Người thứ nhất nối đỉnh với tâm. Người thứ hai nối tâm với đỉnh khác. Như vậy, sau khi người thứ hai thực hiện luôn có số lẻ đỉnh được kết nối. Do đó, người thứ nhất không thể nối hai điểm cuối cùng. Khi đó, người thứ hai chiến thắng. **TH2.** Người thứ nhất nối hai đỉnh. Người thứ hai nối một đoạn thẳng đối xứng với đoạn thẳng người thứ nhất vẽ qua tâm. Sau mỗi bước như vậy có số điểm được nối lại là số lẻ. Người thứ hai tiếp tục thực hiện các bước như thế đến khi người thứ nhất không thể di chuyển được nữa. Giả sử có một lúc nào đó người thứ nhất có thể chiến thắng nếu người thứ hai đi trước. Gọi x là đoạn cuối cùng được nối bởi người thứ nhất ở bước thứ x và x^* là đoạn đối xứng với nó, z là đoạn mà người thứ nhất chiến thắng nếu người thứ hai vẽ x^*. Chú ý là nếu x là đoạn đi qua tâm, khi đó tương tự trường hợp 1. Xét những điểm còn lại trước khi thực hiện bước x. Đoạn x nối 2 điểm khác nhau A và B, đoạn x^* nối hai điểm đối xứng tương ứng khác là A^* và B^*. Xét O là tâm đường tròn. Giả sử O là một trong hai điểm A hoặc B, và nó cũng là A^*. Điều này có nghĩa là $A=A^*$ là đối xứng tâm và chứa tâm của đường tròn. Bởi vậy, sau khi thực hiện bước x^* số điểm là lẻ giống như bước x. Do đó, bước z có thể không chiến thắng. Giả sử O không thuộc A và B. Khi đó có ít nhất một điểm C, trong đó có tâm đường tròn. Để thực hiện bước z chiến thằng, phải nối C với một điểm đã có từ bước x và x^*. Sau khi thực hiện các bước x và $x*$, các điểm nối lại không bao gồm tâm, $B=A^*$, $A=B^*$ và bước x^* không làm giảm số điểm. Vậy người thứ hai có thể chiến thằng bằng việc thực hiện bước z bao gồm x^*.	1,0
	Xét n lẻ. Ta chứng minh rằng người thứ nhất có thể chiến thắng nếu nối các đỉnh tùy ý với tâm đường tròn ở bước đầu tiên. Với $n=3$ điều này hiển nhiên. Giả sử, với n từ 3 đến $2k-1$ thì điều trên đúng. Xét $n=2k+1$, đánh số các đỉnh của đa giác theo chiều kim đồng hồ: A_0, A_1, \ldots, A_{2k+1}. Người thứ nhất nối A_0 với tâm O của đường tròn ở bước đầu tiên của mình. Xét người thứ hai đi đầu tiên: • Nối 2 đỉnh khác A_0. Giả sử rằng người thứ hai nối A_{i-1} với A_i khi $2\le i\le k+1$. Người thứ nhất nối A_i với A_{i+1}, khi đó trò chơi trở thành trường hợp $n=2k-1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, trong đó có một đỉnh được nối từ A_{i-2} qua A_{i-1}, từ A_{i+2} qua A_{i+1}, từ tâm qua A_i, ngoài ra có hai đường phụ nối từ tâm của đường tròn không đóng bất cứ vai trò nào. Người thứ nhất sẽ tạo ra hai đường đó nếu người thứ hai cũng làm vậy.	1,0

- Nối A_0 với đỉnh liền kề. Giả sử rằng người thứ hai nối A_1 với A_0. Người thứ nhất nối A_0 với A_{2n+1}, trò chơi trở về trường hợp $n=2k-1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{2k+1}, A_0, A_1 có một đỉnh (nối từ O ở bước thứ nhất của người thứ nhất) tương tự trường hợp trên.
- Nối O với đỉnh liền kề của A_0. Giả sử người thứ hai nối A_1 với O. Người thứ nhất nối A_{2k+1} với O, trò chơi trở về trường hợp $n=2k-1$. Nghĩa là, các đỉnh A_{2k+1}, A_0, A_1, một trong các đỉnh đó tương tự trường hợp trước. Điều khác biệt duy nhất ở đây bao gồm hai điểm phụ nối tới O, điểm A_1 và A_{2k+1} có hai đường phụ nối tới A_0.
- Nối O với các đỉnh không liền kề với A_0. Không mất tính tổng quát, giả sử người thứ hai nối A_{2i} với O. Người thứ nhất nối A_i với O, sau đó trò chơi trở về trường hợp $n=2k-2i+1$. Nghĩa là, xét các đỉnh ở giữa A_0 và A_2, có một đỉnh nối với O ở lần di chuyển đầu tiên của người chơi đầu tiên. Nếu người chơi thứ hai vẽ một đoạn thẳng nằm trong một trong các miền sau OA_0A_i và OA_iA_{2i}, người chơi thứ nhất sẽ vẽ một đoạn thẳng đối xứng với OA_i. Có một số chẵn bước phụ không đóng bất cứ vai trò gì, do đó trò chơi giảm tính chính xác với số lượng ít hơn.

Trong mỗi trường hợp, trò chơi được giảm xuống tương đương với số ít và số lẻ đỉnh. Vậy người thứ nhất có chiến lược chiến thắng với mọi số lẻ $n \geq 3$.

---------HẾT--------

Người ra đề: Vũ Nguyễn Hoàng Anh - Số điện thoại: 0353291675