

CHỦ ĐỀ 3**BA VECTƠ ĐỒNG PHẪNG VÀ KHÔNG ĐỒNG PHẪNG****Tham khảo thêm****♦ Chứng minh ba vector đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng, phân tích một vector theo ba vector không đồng phẳng.**

+ Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng: Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

+ Để phân tích một vector $\vec{x}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho:

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$$

♦ Tính độ dài của đoạn thẳng, vector.

+ Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vector ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

• Chọn ba vector không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sao cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.

- Phân tích $\vec{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

• Khi đó $MN = |\vec{MN}| = \sqrt{\vec{MN}^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$

$$= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn\cos(a,b) + 2np\cos(b,c) + 2mp\cos(c,a)}$$

♦ Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian.

Sử dụng các kết quả

• A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{DA} = m\vec{DB} + n\vec{DC}$

• A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì ta có $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ trong đó $x + y + z = 1$.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

- A. Ba vector đồng phẳng là ba vector cùng nằm trong một mặt phẳng.
- B. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.
- C. Ba vector không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vector bất kì.
- D. Ba vector đồng phẳng là ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D.

Câu A sai vì ba vector đồng phẳng là ba vector có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.

Câu B sai vì thiếu điều kiện 2 vector a, b không cùng phương.

Câu C sai vì $\vec{d} = ma + nb + pc$ với $\vec{d}$ là vector bất kì không phải là điều kiện để 3 vector a, b, c đồng phẳng.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Nếu giá của ba vector a, b, c cắt nhau từng đôi một thì ba vector đó đồng phẳng.
- B. Nếu trong ba vector a, b, c có một vector 0 thì ba vector đó đồng phẳng.
- C. Nếu giá của ba vector a, b, c cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng.
- D. Nếu trong ba vector a, b, c có hai vector cùng phương thì ba vector đó đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.

+ Nắm vững khái niệm ba vector đồng phẳng.

Câu 3. Cho ba vector a, b, c không đồng phẳng. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Các vector $x = a + b + 2c; y = 2a - 3b - 6c; z = -a + 3b + 6c$ đồng phẳng.
- B. Các vector $x = a - 2b + 4c; y = 3a - 3b + 2c; z = 2a - 3b - 3c$ đồng phẳng.
- C. Các vector $x = a + b + c; y = 2a - 3b + c; z = -a + 3b + 3c$ đồng phẳng.
- D. Các vector $x = a + b - c; y = 2a - b + 3c; z = -a - b + 2c$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.

Các vector x, y, z đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n : x = my + nz$

Mà : $x = my + nz$

$$\Leftrightarrow a - 2b + 4c = m(3a - 3b + 2c) + n(2a - 3b - 3c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 1 \\ -3m - 3n = -2 \\ 2m - 3n = 4 \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm})$$

Vậy không tồn tại hai số $m, n : x = my + nz$

Câu 4. Cho ba vector a, b, c . Điều kiện nào sau đây khẳng định a, b, c đồng phẳng?

- A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $ma + nb + pc = 0$.
- B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $ma + nb + pc = 0$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $ma + nb + pc = 0$.

D. Giá của a, b, c đồng qui.

Lời giải

Chọn B.

Theo giả thuyết $m + n + p \neq 0 \Rightarrow$ tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m \neq 0$. Từ $ma + nb + pc = 0 \Rightarrow a = -\frac{n}{m}b - \frac{p}{m}c$.

a, b, c đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba vector).

Câu 5. Cho ba vector a, b, c không đồng phẳng. Xét các vector $x = 2a + b; y = a - b - c; z = -3b - 2c$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vector $x; y; z$ đồng phẳng.

B. Hai vector $x; a$ cùng phương.

C. Hai vector $x; b$ cùng phương.

D. Ba vector $x; y; z$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = \frac{1}{2}(x + z)$ nên ba vector $x; y; z$ đồng phẳng.

Câu 6. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba vector a, b, c đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.

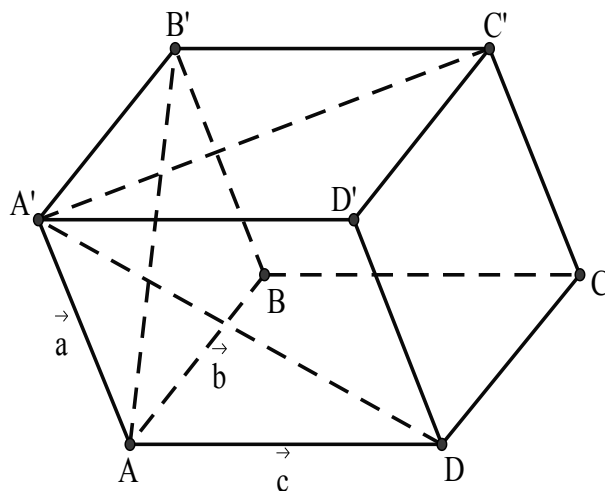
B. Ba vector a, b, c đồng phẳng nếu có một trong ba vector đó bằng vector 0.

C. vector $x = a + b + c$ luôn luôn đồng phẳng với hai vector a và b .

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\vec{AB'}, \vec{C'A'}, \vec{DA'}$ đồng phẳng

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

C. Sai

D. Đúng vì
$$\begin{cases} \vec{DA'} = \vec{AA'} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{c} \\ \vec{AB'} = \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{C'A'} = \vec{CA} = -\vec{b} - \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{AB'} = \vec{DA'} - \vec{CA'} \Rightarrow 3 \text{ vector } \vec{AB'}, \vec{C'A'}, \vec{DA'} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 7. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

A. Từ hệ thức $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$ ta suy ra ba vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng.

B. Vì $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .

C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

D. Vì $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D.

A Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 vector.

B. Đúng

C. Đúng vì $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OI} + \vec{IB}$

Mà $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ (vì I là trung điểm AB) $\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$.

D. Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Vì I là trung điểm đoạn AB nên từ O bất kì ta có: $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

B. Vì $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

C. Vì $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm đoạn MP .

D. Từ hệ thức $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$ ta suy ra ba vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.

Do $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ đúng với mọi điểm A, B, C, D nên câu B sai.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Ba vector a, b, c đồng phẳng khi và chỉ khi ba vector đó có giá thuộc một mặt phẳng

B. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

C. Cho hai vector không cùng phương a và b . Khi đó ba vector a, b, c đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $c = ma + nb$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

D. Nếu có $ma + nb + pc = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vector a, b, c đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.

Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vector đó có giá song song hoặc thuộc một mặt phẳng. Câu A sai

Câu 10. Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ ta suy ra $m = n = p = 0$.
- B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, trong đó $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- C. Với ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ ta có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- D. Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.**

Lời giải

Chọn D.

Câu D sai. Ví dụ phản chứng 3 cạnh của hình chóp tam giác đồng qui tại 1 đỉnh nhưng chúng không đồng phẳng.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\vec{BD}, \vec{BD_1}, \vec{BC_1}$ đồng phẳng.
- B. $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BD}$ đồng phẳng.
- C. $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BC}$ đồng phẳng.**
- D. $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BC_1}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.

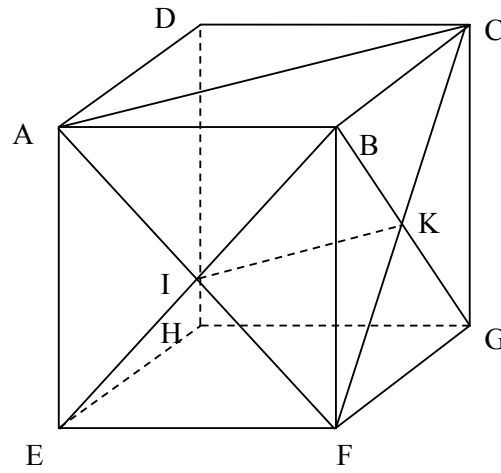
Ta có 3 vector $\vec{BA_1}, \vec{BD_1}, \vec{BC}$ đồng phẳng vì chúng có giá cùng nằm trên mặt phẳng (BCD_1A_1) .

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\vec{BD}, \vec{AK}, \vec{GF}$ đồng phẳng.
- B. $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{GF}$ đồng phẳng.**
- C. $\vec{BD}, \vec{EK}, \vec{GF}$ đồng phẳng.
- D. $\vec{BD}, \vec{IK}, \vec{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B.



$$+ \begin{cases} IK \parallel (ABCD) \\ GF \parallel (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{BD} \text{ đồng phẳng.}$$

+ Các bộ vectơ ở câu A, C, D không thể có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

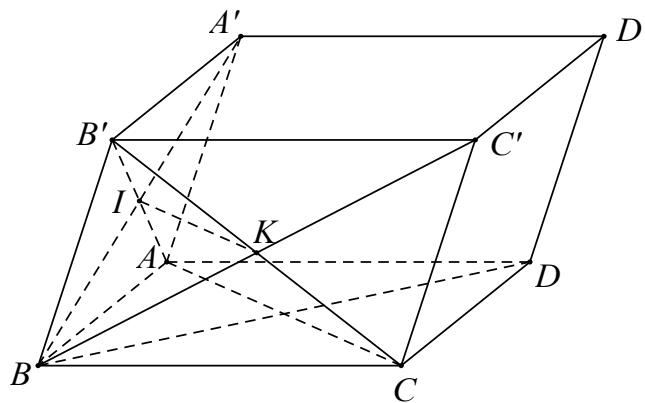
B. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'C'}$

C. Ba vector $\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{IK}; \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc $(B'AC)$

B. Đúng vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'C'}$.

C. Sai vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow$ ba vectơ đồng phẳng.

D. Đúng vì theo câu C $\Rightarrow \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

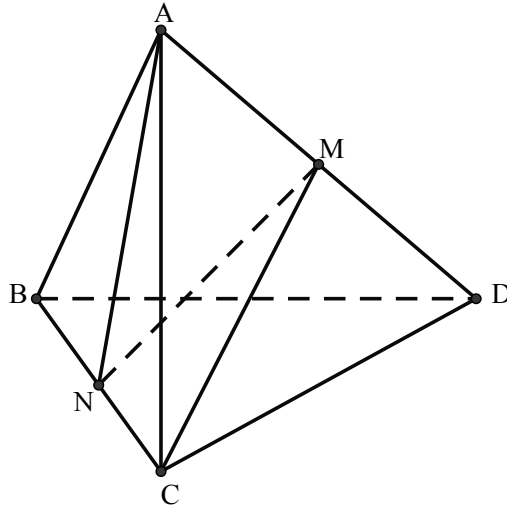
B. Các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vector $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

B. Đúng vì từ N ta dựng vector bằng vector $\overrightarrow{MN}$ thì $\overrightarrow{MN}$ không nằm trong mặt phẳng (ABC) .

C. Sai. Tương tự đáp án B thì $\overrightarrow{AN}$ không nằm trong mặt phẳng (CMN) .

D. Đúng vì $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

D.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

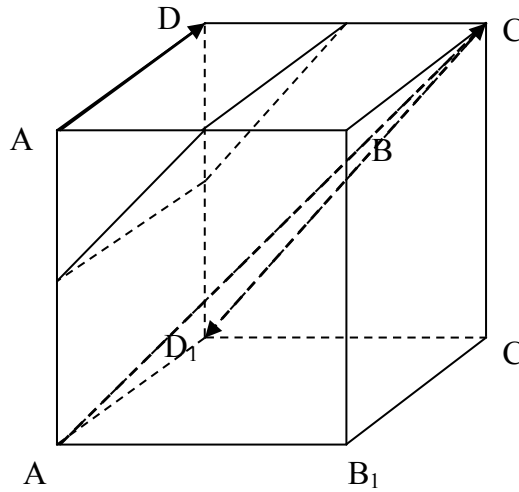
B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C.



+ M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $\overline{AB}, \overline{AA_1}, \overline{DD_1}, \overline{CD}$.

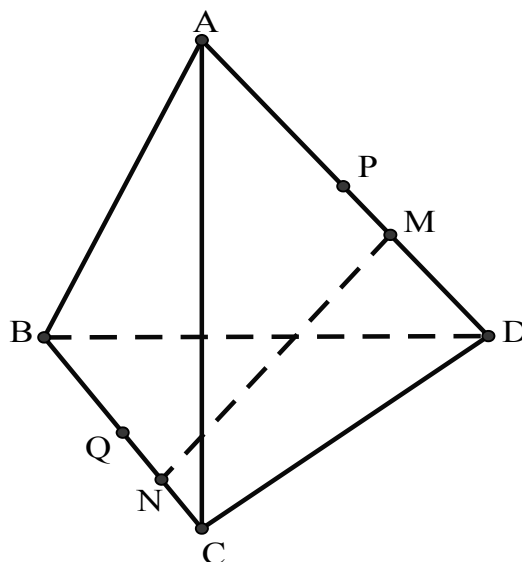
Ta có $\overline{CD_1} \parallel (\overline{MNPQ}); \overline{AD} \parallel (\overline{MNPQ}); \overline{A_1C} \parallel (\overline{MNPQ}) \Rightarrow \overline{CD_1}, \overline{AD}, \overline{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $\overline{AM} = 3\overline{MD}$, $\overline{BN} = 3\overline{NC}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Các vector $\overline{BD}, \overline{AC}, \overline{MN}$ đồng phẳng.
 B. Các vector $\overline{MN}, \overline{DC}, \overline{PQ}$ đồng phẳng.
 C. Các vector $\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{PQ}$ đồng phẳng.
 D. Các vector $\overline{AB}, \overline{DC}, \overline{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A.



A. Sai vì
$$\begin{cases} \overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN} \\ \overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DB} + \overline{BN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN} \\ 3\overline{MN} = 3\overline{MD} + 3\overline{DB} + 3\overline{BN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\overline{MN} = \overline{AC} - 3\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow \overline{BD}, \overline{AC}, \overline{MN} \text{ không đồng phẳng.}$$

B. Đúng vì
$$\begin{cases} \vec{MN} = \vec{MP} + \vec{PQ} + \vec{QN} \\ \vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{MN} = \vec{PQ} + \vec{DC} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{DC})$$

 $\Rightarrow \vec{MN}, \vec{DC}, \vec{PQ}$: đồng phẳng.

C. Đúng. Bằng cách biểu diễn $\vec{PQ}$ tương tự như trên ta có
$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$

D. Đúng. Biểu diễn giống đáp án A ta có
$$\vec{MN} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{DC}.$$

Câu 17. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Từ $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{BA} = -3\vec{CA}$

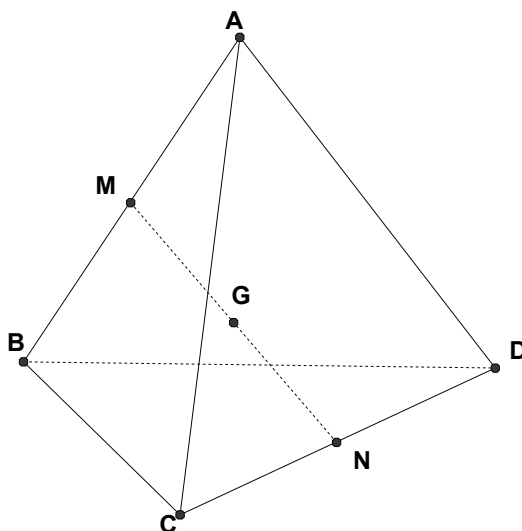
B. Nếu $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC.

C. Vì $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

D. Từ $\vec{AB} = -3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{CB} = 2\vec{AC}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có: $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$

Suy ra: $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

B. Từ $\vec{AB} = -3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{CB} = \vec{AC}$.

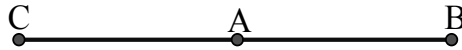
C. Vì $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ ta suy ra $\vec{BA} = -3\vec{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

A. Sai vì $\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{BC} \Rightarrow A$ là trung điểm BC .



B. Sai vì $\vec{AB} - 3\vec{AC} \Rightarrow \vec{CB} = -4\vec{AC}$.



C. Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 vector.

D. Sai vì $\vec{AB} = 3\vec{AC} \Rightarrow \vec{BA} = 3\vec{CA}$ (nhân 2 vế cho -1).

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F là các điểm thỏa mãn $\vec{EA} = k\vec{EB}, \vec{FD} = k\vec{FC}$ còn P, Q, R là các điểm xác định bởi $\vec{PA} = l\vec{PD}, \vec{QE} = l\vec{QF}, \vec{RB} = l\vec{RC}$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. P, Q, R thẳng hàng

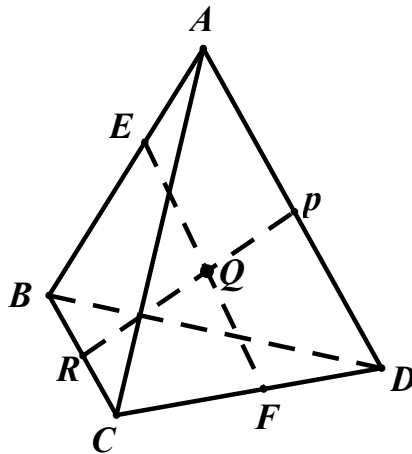
B. P, Q, R không đồng phẳng

C. P, Q, R không thẳng hàng

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AE} + \vec{EQ}$ (1)

$\vec{PQ} = \vec{PD} + \vec{DF} + \vec{FQ}$ (2)

Từ (2) ta có $l\vec{PQ} = l\vec{PD} + l\vec{DF} + l\vec{FQ}$ (3)

Lấy (1) - (3) theo vế ta có : $(1-l)\vec{PQ} = \vec{AE} - l\vec{DF}$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \frac{1}{1-l}\vec{AE} - \frac{l}{1-l}\vec{DF}$$

$$\text{Tương tự } \vec{QR} = \frac{1}{1-l}\vec{EB} - \frac{l}{1-l}\vec{FC}$$

Mặt khác $\vec{EA} = k\vec{EB}, \vec{FD} = k\vec{FC}$ nên $\vec{PQ} = \frac{1}{1-l}\vec{AE} - \frac{l}{1-l}\vec{DF} = \frac{-k}{1-l}\vec{EB} - \frac{kl}{1-l}\vec{FC} = -k\vec{QR}$

Vậy P, Q, R thẳng hàng.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho

$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BC}, \vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AD}, \vec{DP} = k\vec{DC}$. Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

A. $k = \frac{1}{2}$

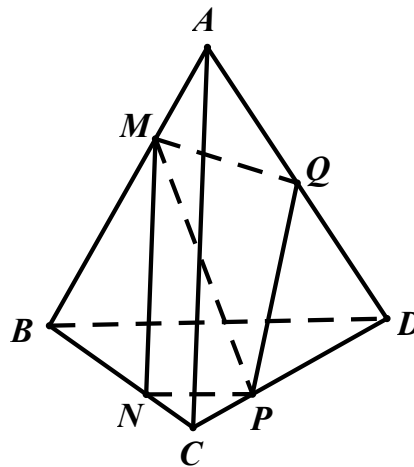
B. $k = \frac{1}{3}$

C. $k = \frac{1}{4}$

D. $k = \frac{1}{5}$

Lời giải

Chọn A.



Cách 1.

Ta có $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Rightarrow \vec{BM} - \vec{BA} = -\frac{1}{3}\vec{BA} \Rightarrow \vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BA}$.

Lại có $\vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$ do đó $MN \parallel AC$.

Vậy Nếu M, N, P, Q đồng phẳng thì $(MNPQ) \cap (ACD) = PQ \parallel AC$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{QA}{QD} = 1 \quad \vec{DP} = \frac{1}{2}\vec{DC} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

hay

Cách 2. Đặt $\vec{DA} = a, \vec{DB} = b, \vec{DC} = c$ thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$$\vec{MN} = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \quad \vec{MP} = -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + kc, \quad \vec{MQ} = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{3}b$$

Các điểm M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\vec{MN}, \vec{MP}, \vec{MQ}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \exists x, y: \vec{MP} = x\vec{MN} + y\vec{MQ}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + kc = x\left(-\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c\right) + y\left(-\frac{1}{6}a - \frac{1}{3}b\right)$$

Do các vec tơ a, b, c không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}, y = 1, k = \frac{1}{2}.$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G' . Ta có $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = k \frac{SG}{SG'}$. Hỏi k bằng bao nhiêu?

A. 3

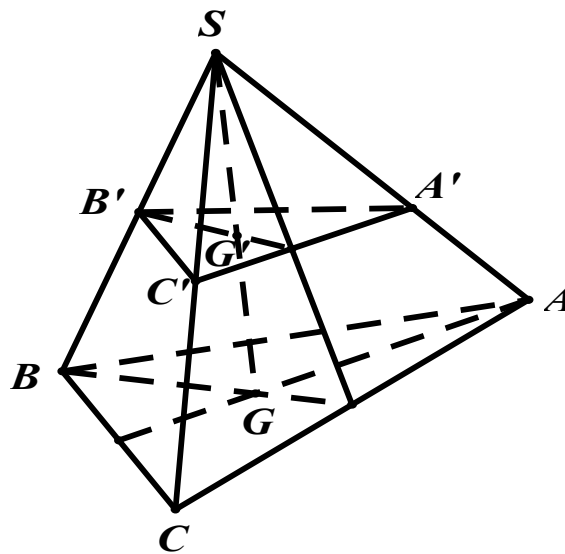
B. 4

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn A.



Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{SG} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}$
 $\Leftrightarrow 3 \frac{SG}{SG'} \vec{SG'} = \frac{SA}{SA'} \vec{SA'} + \frac{SB}{SB'} \vec{SB'} + \frac{SC}{SC'} \vec{SC'}$

Mặt khác A', B', C', G' đồng phẳng nên: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$.

Chú ý: Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng :

Nếu M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC thì $S_a \vec{MA} + S_b \vec{MB} + S_c \vec{MC} = \vec{0}$ trong đó S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB . Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau:

Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SM (M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', M' .

Chúng minh: $\frac{S_a SA}{SA'} + \frac{S_b SB}{SB'} + \frac{S_c SC}{SC'} = \frac{S \cdot SM}{SM'}$. (Với S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB và S là diện tích tam giác ABC).

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SA'} + 2\frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + 2\frac{SD}{SD'}$

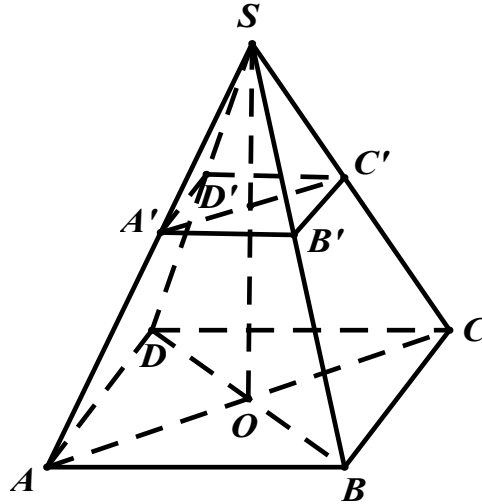
B. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{2SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{2SD'}$

C. $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

D. $\frac{SA}{SA'} - \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$

Lời giải

Chọn C.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì

$$\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} \vec{SA'} + \frac{SB}{SB'} \vec{SB'} = \frac{SB}{SB'} \vec{SB'} + \frac{SC}{SC'} \vec{SC'}$$

Do A', B', C', D' đồng phẳng nên đẳng thức trên $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng (α) luôn đi qua trọng tâm của tam giác ABC , cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$$

A. $\frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $\frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$

D. $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có $3\vec{SG} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}$

$$= \frac{SA}{SA'} \vec{SA'} + \frac{SB}{SB'} \vec{SB'} + \frac{SC}{SC'} \vec{SC'}$$

Mà G, A', B', C' đồng phẳng nên $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3$

Theo BĐT Cauchy schwarz:

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \right) (a^2 + b^2 + c^2) \geq \left(\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{1}{aSA'} = \frac{1}{bSB'} = \frac{1}{cSC'} \quad \text{kết hợp với} \quad \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3 \quad \text{ta được}$$

$$SA' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3a}, SB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3b}, SC' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3c}$$

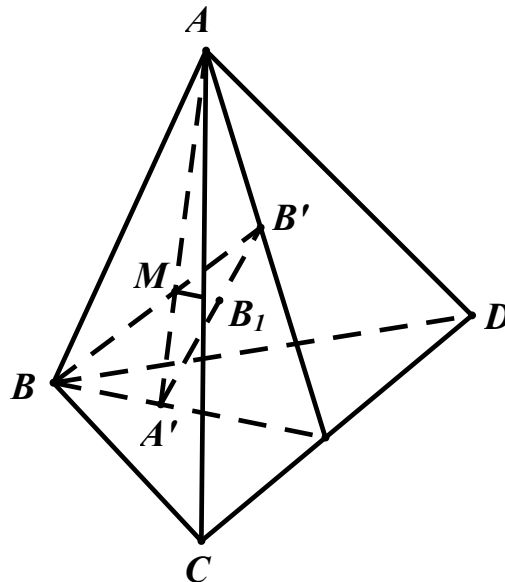
$$\text{Vậy GTNN của } \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \text{ là } \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (BCD) lần lượt cắt $A'B', A'C', A'D'$ tại các điểm B_1, C_1, D_1 . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.

- A. M là trọng tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.
- B. M là trực tâm của tam giác $B_1C_1D_1$.
- C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.
- D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $B_1C_1D_1$.

Lời giải

Chọn D.



Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên

tồn tại $x, y, z, t > 0$ sao cho $\overrightarrow{xMA} + \overrightarrow{yMB} + \overrightarrow{zMC} + \overrightarrow{tMD} = \vec{0}$ (1)

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (BCD) .

Ta có
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (BCD) \\ (BB'A') \cap (\alpha) = MB_1 \Rightarrow MB_1 \parallel BA' \\ (BB'A') \cap (BCD) = BA' \end{cases}$$

Do đó $\frac{MB_1}{BA'} = \frac{MB'}{BB'} \Rightarrow \frac{MB_1}{BB'} = \frac{MB'}{BB'} \frac{BA'}{BA'}$ (2)

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng BB' theo phương (ACD) ta được:

$$\overrightarrow{xMB'} + \overrightarrow{yMB} + \overrightarrow{zMB'} + \overrightarrow{tMB'} = \vec{0} \Rightarrow (x + y + z) \overrightarrow{MB'} + y \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x + y + z + t) \overrightarrow{MB'} = y \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \frac{MB_1}{BB'} = \frac{y}{x + y + z + t}$$

Từ (2) suy ra $\frac{MB_1}{BB'} = \frac{y}{x + y + z + t} \frac{BA'}{BA'} = \frac{y}{x + y + z + t} \frac{BA'}{BA'}$ (3)

Tương tự ta có $\frac{MC_1}{CA'} = \frac{z}{x + y + z + t} \frac{CA'}{CA'}$ (4)

$\frac{MD_1}{DA'} = \frac{t}{x + y + z + t} \frac{DA'}{DA'}$ (5)

Mặt khác chiếu các vec tơ trong (1) lên mặt phẳng (BCD) theo phương AA' thì thu được

$y \overrightarrow{A'B} + z \overrightarrow{A'C} + t \overrightarrow{A'D} = \vec{0}$. Vậy từ (3), (4), (5) ta có

$$\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \frac{1}{x + y + z + t} (y \overrightarrow{BA'} + z \overrightarrow{CA'} + t \overrightarrow{DA'}) = \vec{0}, \text{ hay } M \text{ là trọng tâm của tam giác } B_1C_1D_1.$$

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần

(tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

A. $\frac{9}{S^2}$

B. $\frac{3}{S}$

C. $\frac{2}{S^2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{S}$

Lời giải

Chọn A.

Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA$.

Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng

thức cần chứng minh $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

Theo công thức Leibnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được

$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Câu 26. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC của tứ diện $SABC$. Gọi I là giao điểm của ba mặt phẳng $(BCM), (CAN), (ABP)$ và J là giao điểm của ba mặt phẳng $(ANP), (BPM), (CMN)$. Ta được S, I, J thẳng hàng tính đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{2} = \frac{JS}{JI}$

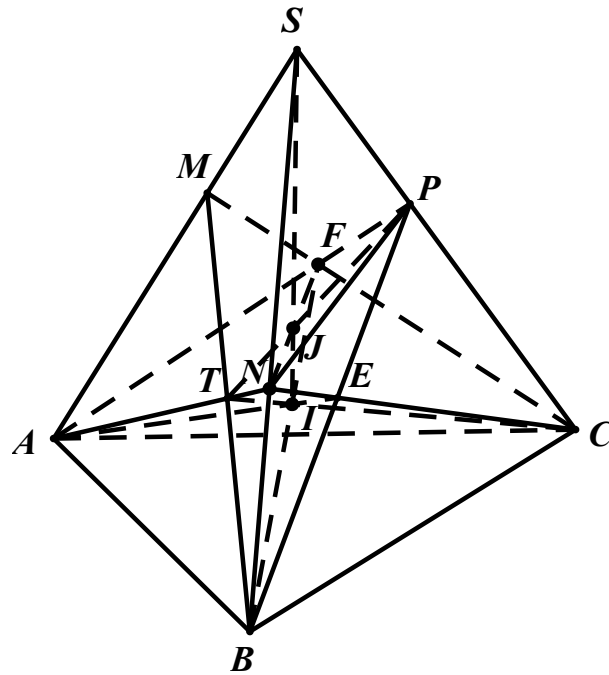
B. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{4} = \frac{JS}{JI}$

C. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + \frac{1}{3} = \frac{JS}{JI}$

D. $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$

Lời giải

Chọn D.



Gọi $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP, T = AN \cap BM$.

Trong (BCM) có $I = BF \cap CT$ trong (ANP) có $NF \cap PT = J$.

Đặt $\overrightarrow{SA} = a, \overrightarrow{SB} = b, \overrightarrow{SC} = c$ và $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có $\overrightarrow{SM} = \frac{x}{x+1}a, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{y+1}b, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{z+1}c$ ($x > 0, y > 0, z > 0$)

Do $T = AN \cap BM$ nên $\begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha \overrightarrow{SM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta \overrightarrow{SN} + (1 - \beta) \overrightarrow{SA} \end{cases} \Rightarrow \alpha \overrightarrow{SM} + (1 - \alpha) \overrightarrow{SB} = \beta \overrightarrow{SN} + (1 - \beta) \overrightarrow{SA}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}a + (1-\alpha)b = \frac{\beta y}{y+1}b + (1-\beta)a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \frac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x+y+1} \\ \beta = \frac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \vec{ST} = \frac{x}{x+y+1}a + \frac{y}{x+y+1}b$$

Vì a, b không cùng phương nên ta có

$$\vec{SE} = \frac{y}{y+z+1}b + \frac{z}{y+z+1}c, \quad \vec{SF} = \frac{z}{z+x+1}c + \frac{x}{z+x+1}a$$

Hoàn toàn tương tự tácó :

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm $I = BF \cap CT$ và $NF \cap PT = J$ ta được :

$$\vec{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}(xa + yb + zc), \quad \vec{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}(xa + yb + zc)$$

$$\vec{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\vec{SI} \Rightarrow \vec{SJ} = (x+y+z+1)\vec{IJ}$$

Suy ra

$$\text{Vậy } S, I, J \text{ thẳng hàng và } \frac{SI}{IJ} = x+y+z+1 = \frac{SM}{MA} + \frac{SN}{NB} + \frac{SP}{PC} + 1$$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$. Gọi (β) là mặt phẳng đi qua A và các trung điểm của SB, SC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) .

A. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

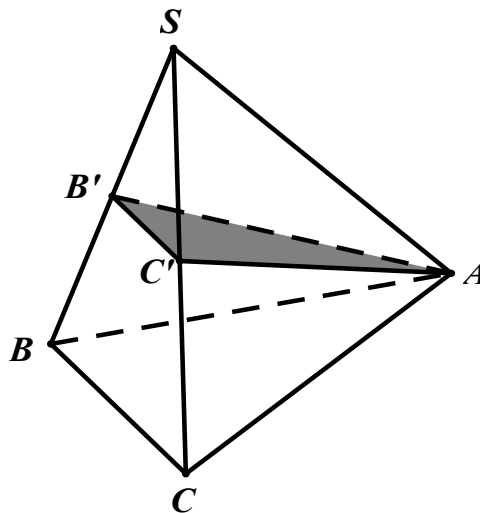
B. $S = \frac{a^2}{2} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

C. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9}$

D. $S = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$

Lời giải

Chọn D.



Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB, SC . Thiết diện là tam giác $AB'C'$.

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{AB'^2 \cdot AC'^2 - (AB' \cdot AC')^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\vec{AB'} = \vec{SB'} - \vec{SA} = \frac{1}{2} \vec{SB} - \vec{SA}$$

Ta có

$$\Rightarrow AB'^2 = \frac{1}{4} SB^2 + SA^2 - \frac{1}{2} \vec{SA} \vec{SB} = \frac{a^2}{4} (5 - 4 \cos \alpha)$$

$$\vec{AB'} \vec{AC'} = \frac{a^2}{4} (4 - 3 \cos \alpha)$$

Tính tương tự, ta có:

$$\text{Vậy } S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4}{16} (5 - 4 \cos \alpha)^2 - \frac{a^4}{16} (4 - 3 \cos \alpha)^2} = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}$$