|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ**  **NĂM HỌC 2020-2021**  **Môn thi : Toán**  **Ngày thi: 13.01.2021**  **Thời gian làm bài : 150 phút** |

**Bài I. (5,0 điểm)**

1. Giải phương trình : 
2. Cho là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh biểu thức có giá trị nguyên

**Bài II. (5,0 điểm)**

1. Biết là các số nguyên thỏa mãn chia hết cho 3 và chia hết cho 3. Chứng minh chia hết cho 9
2. Cho đa thức có nghiệm (là các số hữu tỉ). Chứng minh chia hết cho đa thức 

**Bài III. (2,0 điểm)** Với các số thực không âm thỏa mãn tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài IV. (6,0 điểm)**

Cho đường tròn nội tiếp tam giác nhọn . Đường tròn tiếp xúc với lần lượt tại Qua kẻ đường thẳng vuông góc với cắt tại J. Gọi là hình chiếu vuông góc của trên BC

1. Chứng minh 
2. Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và Chứng minh 
3. Gọi là giao điểm của hai đường thẳng và Gọi là trung điểm của Chứng minh vuông góc với 

**Bài V. (2,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các số nguyên dương thỏa mãn 
2. Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt trong hình chữ nhật)
3. Chứng minh mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá 
4. Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1.**

1. Điều kiện xác định Phương trình ban đầu tương đương với :



Vậy 

1. Quy đồng mẫu số biểu thức thì ta được :



Phân tích thành nhân tử ở tử số của K



Do vậy 

**Bài 2.**

1. Đặt (với . Khi đó ta có Vì vậy



Từ giả thiết ta suy ra chia hết cho 3. Sử dụng kết quả quen thuộc ta suy ra  đều chia hết cho 3, điều này cũng kéo theo chia hết cho 3. Như vậy

chia hết cho 9

1. Ta có nên hay 

Vì  là các số hữu tỉ nên cũng là các số hữu tỉ nên theo kết quả quen thuộc “nếu A, B là các số hữu tỉ thỏa mãn thì ta suy ra . Khi đó :



Điều này có nghĩa có nghiệm là 

Suy ra chia hết cho 

**Bài 3.**

1. Vì nên . Áp dụng bất đẳn thức Bunhiacopxki, ta có :



Nên Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy 

1. Từ giả thiết suy ra , kéo theo 

Ta có 

Và lưu ý là nên:



Vậy chẳng hạn.

**Bài 4.**

****

1. Từ giả thiết ta suy ra J là tâm của đường tròn bàng tiếp đỉnh A của P là tiếp điểm của đường tròn (J) với cạnh 

Đặt và Từ kết quả quen thuộc thì ta có



1. Ta có tương ứng là phân giác trong và phân giác ngoài của . Sử dụng tính chất phân giác cho tam giác thì ta được

và 

Do đó, . Từ đó suy ra 

1. Dựng đường kính của đường tròn . Ta có kết quả quen thuộc rằng thẳng hàng. Chú ý rằng ta có 

Do nên 

Từ đó suy ra . Để ý rằng và nên ta được : 

Điều này kéo theo Do đó 

Hay . Vì vậy, 

**Bài 5.**

1. Ta có : nên Ngoài ra vì nên chẵn, còn lẻ . Xét các khả năng :

Nếu thì với Vì không chia hết cho 3 nên Từ đó tìm được 

Suy ra là một nghiệm của phương trình đã cho

Nếu thì , từ đó suy ra chia hết cho 4. Từ đó chẵn và đặt Thế thì 

Nếu chẵn thì và khi đó chia hết cho 5 nhưng vế phải không chia hết cho 5 do lẻ, Suy ra lẻ và do đó có dạng với Suy ra



Vì là các số lẻ nên Thế vào ta được :

. Lưu ý đều chẵn nên ta có thể viết :



Từ đây tìm được Suy ra là nghiệm của phương trình đã cho

Tóm lại, phương trình đã cho có hai nghiệm 

2) (a) Xét tam giác nằm trong hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Qua các đỉnh kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật ta sẽ tạo ra một hình chữ nhật chứa tam giác mà . Điều này có nghĩa là ta chỉ cần xét tình huống ba đỉnh nằm trên các cạnh của hình chữ nhật Có hai khả năng sau :

**Trường hợp 1.** Hai trong ba điểm cùng thuộc một cạnh, giả sử là thuộc Khi đó nằm trên một trong ba cạnh còn lại. Ta thấy :





**Trường hợp 2.** Ba điểm thuộc ba cạnh khác nhau của Giả sử thuộc các cạnh tương ứng Không mất tổng quát, giả sử gần cạnh nhất. Qua kẻ đường thẳng song song với cắt tại E và qua M kẻ đường thẳng song song với cắt tương ứng tại . Khi đó





Tóm lại thì trong mọi tình huống ta đều có 

Gọi tương ứng là trung điểm của Theo nguyên lý chuông thỏ thì tồn tại một trong hai hình hoặc chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho. Không mất tổng quát giả sử chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho.

Theo câu a) thì diện tích của tam giác tạo bởi ba điểm này không vượt quá diện tích của hình chữ nhật mà nên diện tích tam giác không vượt quá 

Tương tự như vậy, gọi lần lượt là trung điểm của Cũng theo nguyên lý chuồng thỏ thì tồn tại một trong hai hình hoặc chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho. Không mất tính tổng quát, giả sử hình chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho. Lập luận tương tự như trên thì diện tích tam giác tạo bởi ba điểm này cũng không vượt quá 

Đến đây có hai khả năng xảy ra như sau :

Trường hợp 1: Hai tam giác và khác nhau. Khi đó thì ta được 

Trường hợp 2: Hai tam giác trùng nhau, giả sử đó là tam giác Khi đó tam giác phải nằm trong hình chữ nhật CJOL (với O là giao điểm của và Gọi U, V là hai điểm còn lại. Nếu một trong hai điểm nằm trong hình chữ nhật , giả sử là điểm U, thì khi dó hai tam giác và có diện tích không vượt quá Nếu một trong hai điểm nằm trong hình chữ nhật giả sử là điểm U, thì khi đó ta có . Như vậy hai tam giác và có diện tích không vượt quá Ta cũng chứng minh tương tự cho trường hợp một trong hai điểm nằm trong hình chữ nhật Cả ba khả năng trên đều có 

Ta xét trường hợp cả hai điểm đều nằm trong hình chữ nhật . Xét bao lồi của 5 điểm Do cả 5 điểm đã cho nằm trong hình lục giác nên diện tích của hình bao lồi này không vượt quá Ta xét các khả năng sau :

Khả năng 1. Bao lồi của 5 điểm là một ngũ giác. Giả sử đó là ngũ giác (xem hình vẽ). Khi đó



Do vậy, ít nhất một trong ba tam giác có diện tích không vượt quá Tính thêm cả tam giác thì ta có 

Khả năng 2: Bao lồi của 5 điểm là một tứ giác. Giả sử đó là tứ giác với điểm nằm trong tứ giác , trong đó Khi dó ta có :



Do vậy, ít nhất hai trong bốn tam giác có diện tích không vượt quá . Như vậy, 



Khả năng 3. Bao lồi của 5 điểm là một tam giác. Giả sử đó là tam giác với hai điểm nằm trong , trong đó . Khi đó ta có :



Do vậy, ít nhất một trong ba tam giác có diện tích không vượt quá Tương tự ít nhất một trong ba tam giác có diện tích không vượt quá Như vậy, ta sẽ có ít nhất hai tam giác có diện tích không vượt quá 

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có Một ví dụ để dấu bằng xảy ra là đặt 5 điểm đã cho như hình vẽ dưới đây, trong đó 

