

PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.

Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Tìm n (với $n \in \mathbb{N}^*$) để từ năm thứ n trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất?

Giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ triệu đồng, công sai $d = 18$ triệu đồng.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ triệu đồng, công sai $d' = 1,8$ triệu đồng.

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong n năm ở phương án thứ nhất là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_n = \frac{[2 \cdot 120 + (n-1) \cdot 18]n}{2} = 9n^2 + 111n \quad (\text{triệu đồng})$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong n năm ở phương án thứ hai là tổng $4n$ số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{4n} = \frac{[2 \cdot 24 + (4n-1) \cdot 1,8]4n}{2} = 14,4n^2 + 92,4n \quad (\text{triệu đồng})$$

$$14,4n^2 + 92,4n > 9n^2 + 111n \Leftrightarrow n > \frac{31}{9} \approx 3,44$$

Xét bất phương trình:

Vậy từ năm thứ 4 trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong các năm đi làm ở phương án thứ hai sẽ nhiều hơn ở phương án thứ nhất.

Câu 2.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1 ; C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_2 ; ... Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \dots; C_n; \dots$. Diện tích của hình

vuông C_{2025} có dạng $\frac{1}{2^a}$. Tìm a .

Giải

Gọi u_n là độ dài của cạnh hình vuông C_n .

$$\text{Ta có: } u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 \sqrt{2} = u_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; u_3 = \frac{1}{2} \cdot u_2 \sqrt{2} = u_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \dots$$

Cứ như vậy, dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó,
 $u_{2025} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2024}$ nên diện tích của hình vuông C_{2025} là: $u_{2025}^2 = \frac{1}{2^{2024}} = \frac{1}{2^a}$. Vậy $a = 2024$.

Câu 3. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 30 ghế, hàng thứ hai có 31 ghế, hàng thứ ba có 32 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 63200000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: nghìn đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 30$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng. Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là:

$$S_{20} = \frac{[2 \cdot 30 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 790 \quad (\text{ghế})$$

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên có 790 vé được bán ra. Vậy giá tiền của một vé là: $63200000 : 790 = 80000$ (đồng).

Câu 4. Cho tập hợp A gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A = \{1; 2; 3; \dots; 99\}$. Tìm số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Gọi a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng $(a, b, c \in A)$. Khi đó, $b - a = c - b$ hay $2b = a + c$. Do đó, a và c phải cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ nên số cách chọn hai số a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ là: $C_{49}^2 + C_{50}^2 = 1176 + 1225 = 2401$. Với mỗi cách chọn hai số a, c , có duy nhất một cách chọn số b . Vậy số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng là 2401.

Câu 5. Anh Minh kí hợp đồng lao động có thời hạn ở một công ty với phương án trả lương như sau: Quý thứ nhất, tiền lương là 27 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 2,1 triệu. Tổng số tiền lương anh nhận được trong các năm đã đi làm là 684 triệu đồng. Hỏi anh Minh đã làm ở công ty đó bao nhiêu năm?

Lời giải

Gọi số năm đã đi làm của anh Minh ở công ty đó là $n (n \in \mathbb{N}^*)$. Số quý làm việc là $4n$. Khi đó, tổng số tiền thu được của anh Minh trong n năm đi làm là:

$$S = \frac{[2 \cdot 27 + (4n - 1) \cdot 2,1] \cdot 4n}{2} = 684 \Leftrightarrow 84n^2 + 519n - 3420 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 4 \vee n = \frac{-285}{28}.$$

Do n nguyên dương nên $n = 4$ năm.

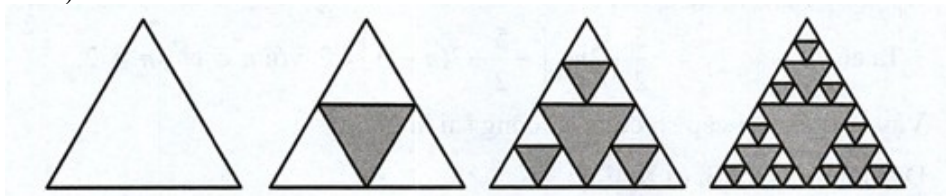
Câu 6. Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao $10m$ rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

Lời giải

Gọi $u_n(m)$ là độ cao mà quả bóng đạt được sau khi nảy lên ở lần thứ n . Ta có: $u_1 = 10 \cdot 0,75 = 7,5$. Ta có, dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 7,5$ và công bội $q = 0,75$. Kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10, quả bóng đã được nảy lên 9 lần rồi lại rơi xuống. Do quãng đường quả bóng nảy lên và rơi xuống bằng nhau nên tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 là:

$$S = 10 + 2(u_1 + u_2 + \dots + u_9) = 10 + 2 \cdot 7,5 \cdot \frac{1 - (0,75)^9}{1 - 0,75} \approx 65,5(m).$$

Câu 7. Một tam giác đều có cạnh bằng $4cm$. Chia tam giác đều đó thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Với mỗi tam giác nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm (Hình). Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ 5 (đơn vị: cm^2 , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi u_n là diện tích phần không được tô màu ở hình tô thứ n , S_0 là diện tích của tam giác ban đầu.

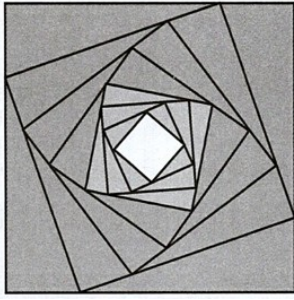
Ta có: $u_1 = \frac{3}{4} \cdot S_0$. Do ở hình tô thứ n , diện tích phần không được tô màu bằng $\frac{3}{4}$ diện tích phần không được tô màu ở hình tô trước đó nên dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{4} \cdot S_0$, công bội $q = \frac{3}{4}$. Do đó,

$$u_n = \frac{3}{4} \cdot S_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = S_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$S_n = S_0 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$$

Vậy diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ n là:
 $S_5 = 4\sqrt{3} \cdot (1 - 0,75^5) \approx 5,28(cm^2)$

Câu 8. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng $4cm$. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông C_1 thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ như Hình. Tính diện tích của hình vuông thứ 6 (đơn vị: cm^2 , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi $a_n^{(cm)}$ là độ dài cạnh hình vuông thứ n . Ta có:

$$a_1 = 4, a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_1}{4}\right)^2} = a_1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Cứ như thế, dãy (a_n) lập thành cấp số nhân có công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Do đó, $a_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}$. Vậy diện tích hình vuông thứ 6 là $a_6^2 \approx 1,53 (cm^2)$.

Câu 9. Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25 - 1)d] = \frac{25}{2} [2 \cdot 16 + 24 \cdot 2] = 1000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1000 ghế.

Câu 10. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Lời giải

Số tiền lương trong 10 năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng, gồm 10 số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Tổng các số hạng này là:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{10}{2} [2u_1 + (10 - 1)20] = \frac{10}{2} (2 \times 100 + 9 \times 20) = 1900 \quad (\text{triệu đồng})$$

Vậy tổng số tiền lương anh Nam nhận sau 10 năm là 1900 triệu đồng

Câu 11. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n - 1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5 - 1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 12. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2}[2 \times 15 + (n - 1) \times 3] = \frac{n}{2}(27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 13. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n - 1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11; u_{11} = 1200 + 30(11 - 1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 14. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

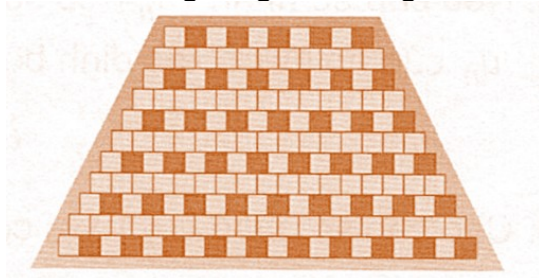
$$S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$$

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là:

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: $70800000 : 590 = 120000$ (đồng).

Câu 15. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng $2,4m$ ở đáy và rộng $1,2m$ ở đỉnh (hình vẽ bên).



Các viên gạch hình vuông có kích thước $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?

Lời giải

Đổi $2,4\text{m} = 240\text{cm}; 1,2\text{m} = 120\text{cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là

$$u_n = 120 : 10 = 12.$$

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n - 1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 \quad (\text{viên gạch}).$$

Câu 16. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế trước nó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10, d = 4$ để tìm

$$n, \text{ ta được } 2040 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 10 + (n - 1)4].$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

Câu 17. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với

$$S_n = 319200, u_1 = 35000, d = 1400,$$

$$319200 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 35000 + (n - 1) \cdot 1400].$$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la.

Câu 18. Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5\text{m}$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 19. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 20. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \frac{20 [2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590 \cdot 60000 = 35400000$ (đồng).

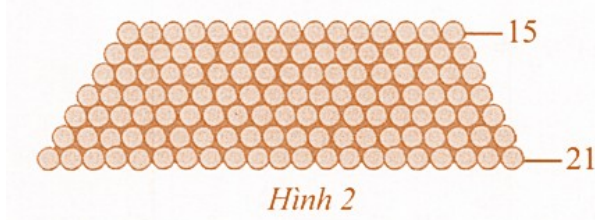
Câu 21. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông;...; lúc 12h trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là: $S = (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 1.11 = 89$

- Câu 22.** Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,..., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Lời giải

Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15 + 16 + \dots + 21 = \frac{(21 + 15) \cdot 7}{2} = 126$

- Câu 23.** Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5, ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp như hình bên). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)d] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2} [2.1 + (n - 1) \cdot 2] \Leftrightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30.$$

Vậy hàng dưới cùng có $u_{30} = 1 + 29.2 = 59$ hộp sữa.

- Câu 24.** Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

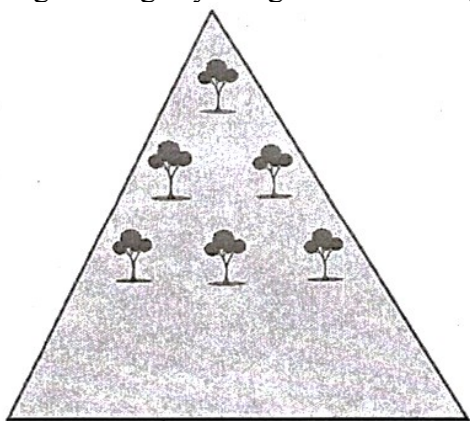
Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai, ..., dãy ghế thứ ba mươi.

Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 15$, công sai $d = 4$ (trong đó $1 \leq n \leq 30$).

Gọi S_{30} là tổng số ghế trong khán phòng. Ta có:

$$S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2} [2u_1 + (30 - 1)d] = 15(2.15 + 29.4) = 2190$$

- Câu 25.** Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác theo cách sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, và cứ như thế mỗi hàng sau sẽ có nhiều hơn hàng ngay trước đó 1 cây. Hỏi tổng số hàng cây trong khu vườn bằng bao nhiêu?



Lời giải

Số cây trên mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Tổng số cây trồng được là: $S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 465 \Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \text{ (nhã)} \\ n = -31 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy số hàng cây trong khu vườn là 30 hàng.

- Câu 26.** Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu $20m$ để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n , trong đó $1 \leq n \leq 20$.

Khi đó, (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$ và công sai $d = 30$.

Số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2.100 + 19.30)}{2} = 7700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

- Câu 27.** Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Số vi khuẩn mỗi giờ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5000$ và công bội $q = 1.08$

Công thức tổng quát: $u_n = 5000 \times 1.08^{n-1}$

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $u_5 = 5000 \times 1.08^{5-1} = 5161$ (con vi khuẩn)

- Câu 28.** Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là $50mg$, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân này

$$S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(mg)$$

và bằng:

- Câu 29.** Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

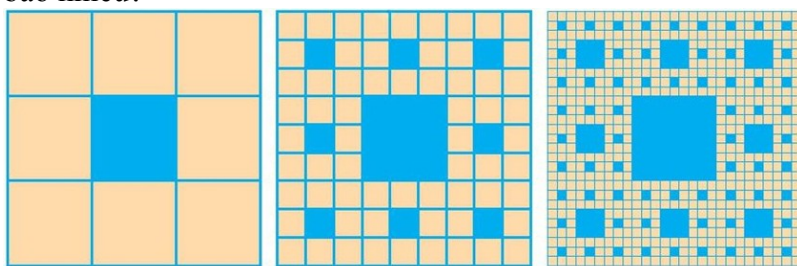
Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là: $1+2+3+\dots+11+12$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = \frac{12 \times (1+12)}{2} = 78$$

- Câu 30.** Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

...

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \times 8^1 + \dots + \frac{1}{9^5} \times 8^4 = 0.445$

Câu 31. Vi khuẩn E.coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. (Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)

Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn E.coli.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E.coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

Lời giải

Số lượng vi khuẩn lúc đầu $Q_0 = 100$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi đầu tiên (sau $20 = 1.20$ phút) là: $Q_1 = 100 \cdot 2 = 200$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ hai (sau $40 = 2.20$ phút) là: $Q_2 = 100 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ ba (sau $60 = 3.20$ phút) là: $Q_3 = 100 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ (vi khuẩn).

Tổng quát: Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ n (sau $n.20$ phút) là: $Q_n = 100 \cdot 2^n$ (vi khuẩn).

Vì vậy số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ 9 (sau $180 = 9.20$ phút) là: $Q_9 = 100 \cdot 2^9 = 51200$ (vi khuẩn).

Câu 32. Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phân nghìn).

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n .

Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} (1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm

$$\text{là: } S_{10} = \frac{60(1 - 1,08^{10})}{1 - 1,08} \approx 869,194 \quad (\text{triệu đồng}).$$

Câu 33. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 9900 &= 0 \\ \Leftrightarrow n = 99 \vee n = -100 \quad (\text{L}) \end{aligned}$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Câu 34. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288 (\text{m}^2)$.

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12288 \cdot \frac{1}{2} = 6144 (\text{m}^2)$.

...

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng quát là:

$$u_n = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12 (\text{m}^2)$$

Câu 35. Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.



Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

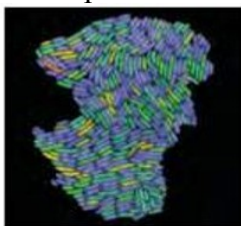
Do tần số của ba phím Sol, La, Si tạo thành cấp số nhân nên gọi tần số 3 phím lần lượt là: a, aq, aq^2

Ta có: $a = 415$ và $aq^2 = 466$. Nên $q = 1,06$

Suy ra: $aq = 440$

Vậy tần số của phím La là 440 Hz

- Câu 36.** Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là:
$$S_{20} = \frac{20 \cdot [1 - 2^{20}]}{1 - 2} = 20971500$$

- Câu 37.** Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là $12\% / \text{năm}$, xuất cư là $2\% / \text{năm}$, tử vong là $8\% / \text{năm}$. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Lời giải

Số cá thể của quần thể qua các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là: $q = 1 + 0,12 - 0,02 - 0,08 = 1,02$

Số cá thể sau hai năm là: $110000 \cdot 1,02^2 = 114444$ (cá thể)

- Câu 38.** Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n . Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số

(u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1310720$ (người).

Câu 39. Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi $0,5\%$ cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

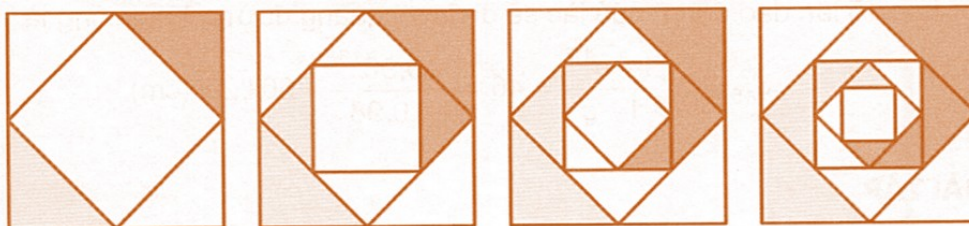
$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 40. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16cm . Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$ và độ dài cạnh hình vuông

sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1 - q^5}{1 - q} = 124 (cm^2)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 41. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

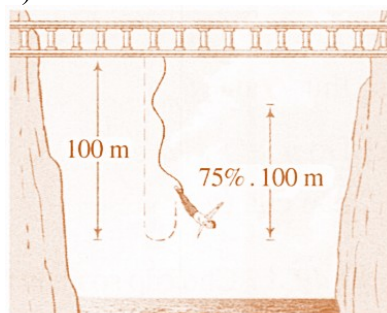
Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n - 1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 42. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $u_1(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$; $v_1(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

$u_2(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

$v_2(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội $0,75$ là: $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right).$$

Ta có:

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right) \approx 661(m).$$

- Câu 43.** Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng lãi suất 7% /năm. Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là bao nhiêu (đơn vị: đồng, tính kết quả gần đúng đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi r là lãi suất tiền gửi theo năm: $r = 0,07$ / năm; tiền gửi là 10^8 (đồng).

Sau năm thứ nhất, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8 + 10^8 r = 10^8(1 + r).$$

Sau năm thứ hai, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8(1 + r) + 10^8(1 + r)r = 10^8(1 + r)(1 + r) = 10^8(1 + r)^2.$$

Theo quy luật đó, ta thấy số tiền mà ông Minh nhận được sau n năm là số hạng thứ n của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10^8(1 + r)$, công bội $q = 1 + r$.

Sau năm thứ n , ông Minh nhận được số tiền:

$$u_n = 10^8(1 + r)^n.$$

Sau 10 năm, số tiền ông Minh nhận được:

$$u_{10} = 10^8(1 + 0,07)^{10} \approx 196715000 \text{ (đồng)}.$$

- Câu 44.** Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hằng năm là $1,33\%$ thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Theo tỉ lệ tăng trưởng $1,33\%$ thì:

- Tháng 12 năm 2019, dân số nước ta là:

$$u_1 = 95,93 + 95,93 \cdot \frac{1,33}{100} = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \text{ (triệu người).}$$

- Tháng 12 năm 2020, dân số nước ta là:

$$\begin{aligned} u_2 &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) + 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \cdot \frac{1,33}{100} \\ &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^2 \text{ (triệu người).} \end{aligned}$$

- Theo quy luật đó, ta biết dân số nước ta vào tháng 12 năm thứ n kể từ năm 2019 được tính theo

công thức
$$u_n = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^n \text{ (triệu người).}$$

- Vậy vào tháng 12 năm 2025 (tức $n = 2025 - 2018 = 7$), dân số nước ta là:

$$u_7 = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^7 \approx 105,23 \text{ (triệu người).}$$