

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT TRIỆU SƠN 4**

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY CHO HỌC SINH
THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC CÁC TÍNH CHẤT HÌNH
HỌC ĐỂ TÌM LỜI GIẢI CHO MỘT SỐ BÀI TOÁN TỌA
ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG (CHƯƠNG III HÌNH HỌC 10)**

**Người thực hiện: Lê Thị Hương
Chức vụ: Giáo viên
SKKN môn: Toán**

THANH HÓA NĂM 2016

MỤC LỤC

<i>Nội dung</i>	<i>Trang</i>
1. Mở đầu	1
- <i>Lí do chọn đề tài</i>	1
- <i>Mục đích nghiên cứu</i>	1
- <i>Đối tượng nghiên cứu</i>	1
- <i>Phương pháp nghiên cứu</i>	2
2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm	2
2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.	2
2.2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu.	2
2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.	3
2.3.1. <i>Kiến thức cơ bản.</i>	4
2.3.2. <i>Một số ví dụ tiêu biểu.</i>	6
2.3.3. <i>Bài tập tự luyện.</i>	18
2.4. Hiệu quả của sáng kiến.	19
3. Kết luận và kiến nghị.	20

1. MỞ ĐẦU

LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Một trong những mục tiêu cụ thể của giáo dục phổ thông hiện nay là: *“Tập trung phát triển trí tuệ, thể chất, hình thành phẩm chất, năng lực công dân phát hiện và bồi dưỡng năng khiếu, định hướng nghề nghiệp cho học sinh; Phát triển khả năng sáng tạo, tự học, khuyến học tập suốt đời”*. Để thực hiện được mục tiêu trên thì việc phát triển năng lực tư duy cho học sinh có vai trò hết sức quan trọng. Do đó trong quá trình dạy học nói chung và dạy học môn toán nói riêng người giáo viên cần phải hết sức coi trọng vấn đề này.

Trong chương III hình học lớp 10 có một phần rất quan trọng của hình học phổ thông đó là phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, đây là phần tiếp nối của hình học phẳng ở cấp THCS nhưng được nhìn dưới quan điểm đại số và giải tích. Như vậy mỗi bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng đều mang bản chất của một bài toán hình học phẳng nào đó, khi giải các dạng bài tập này thì khả năng tư duy của học sinh được nâng lên rất nhiều. Tuy nhiên khi tìm lời giải cho các bài toán hình học tọa độ học sinh thường không chú trọng đến bản chất hình học của bài toán ấy, khi cần giải quyết bài toán các em không biết bắt đầu từ đâu, dựa vào đâu để suy luận tìm lời giải. Nguyên nhân của vấn đề trên là một phần vì học sinh ngại hình học phẳng vì cứ nghĩ hình học phẳng là khó nên “lười” tư duy, một phần vì giáo viên khi dạy cũng không chú trọng khai thác hướng dẫn cho học sinh, chưa phân tích tác kĩ các thao tư duy để tìm lời giải cho các bài toán, các bài tập minh họa cũng đơn điệu, rời rạc, thiếu sức hấp dẫn, điều này không gây được hứng thú học tập và sự sáng tạo cho các em. Dẫn đến kết quả học tập của học sinh còn nhiều hạn chế.

Vì vậy, thực tế yêu cầu phải trang bị cho học sinh các phương pháp suy luận giải toán hình học tọa độ trong mặt phẳng dựa trên việc kết hợp các tính chất hình học mà các em đã có ở THCS và các kiến thức mà các em đã tiếp thu được khi học phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng nhằm kích thích khả năng tư duy sáng tạo, tăng cường hứng thú học tập của học sinh. Từ đó phát huy khả năng tư duy tích cực, chủ động giải quyết vấn đề, tự mình có thể suy luận tìm ra phương án tối ưu để giải quyết các yêu cầu mà mỗi bài toán đặt ra và hình thành ở học sinh năng lực giải quyết các tình huống thực tế.

Từ những lí do trên tôi chọn đề tài ***“Phát triển năng lực tư duy cho học sinh thông qua việc khai thác các tính chất hình học để tìm lời giải cho một số bài toán tọa độ trong mặt phẳng (chương III hình học 10)”***.

MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Thông qua đề tài phát huy khả năng tự tìm lời giải cho các bài tập liên quan đến các kiến thức ở chương III hình học lớp 10, phát huy tính tích cực, chủ động, tư duy sáng tạo cho học sinh.

ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

+ Tìm hiểu các thao tác tư duy, các bước suy luận để tìm lời giải cho một bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng.

+ Xây dựng và định hướng khai thác một số tính chất hình học thuần túy, kết hợp với các kiến thức của hình học giải tích để giải quyết một số bài tập phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

+ Thực nghiệm sư phạm nhằm đánh giá tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

+ Phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết.

+ Phương pháp nghiên cứu điều tra khảo sát thực tế, thu thập thông tin.

+ Phương pháp thống kê, xử lý số liệu.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1 Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Trong học tập môn Toán thì hoạt động chủ đạo và thường xuyên của học sinh là hoạt động tư duy giải bài tập, thông qua đó hình thành kỹ năng, kỹ xảo đồng thời rèn luyện phát triển trí tuệ. Vì vậy, nó được quan tâm nhiều trong dạy học. Việc hướng dẫn cho học sinh tự học, tự nghiên cứu, biến quá trình đào tạo thành quá trình tự đào tạo là một vấn đề cần thiết. Đối với môn toán việc rèn luyện khả năng tư duy trừu tượng, tư duy logic, khả năng phân tích tổng hợp, dự đoán, tương tự hóa, khái quát hóa, biết liên hệ, xâu chuỗi kiến thức sẽ góp phần quyết định trong việc tìm ra lời giải của một bài tập hình học nói chung và các bài tập phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng nói riêng. Do đó trong quá trình hướng dẫn học sinh làm bài tập giáo viên cần quan tâm đến vấn đề phát huy khả năng tư duy độc lập, định hướng tìm lời giải cho mỗi bài toán đồng thời tạo điều kiện thuận lợi để phát huy tính tích cực, tư duy sáng tạo cho các em.

Các dạng bài tập phần tọa độ trong mặt phẳng rất phong phú, nhiều bài toán hay, xâu chuỗi được nhiều mảng kiến thức, có nhiều vấn đề để học sinh khai thác. Do vậy khi dạy học phần này giáo viên cần lưu ý tạo điều kiện để học sinh phát huy tính tích cực, chủ động, khả năng tư duy để có thể tự mình tìm lời giải cho các bài tập. Từ đó phát huy ở các em tính độc lập, tự chủ, khả năng giải quyết các tình huống mà thực tế mà mình gặp trong cuộc sống.

2.2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

Khi dạy xong chương III hình học 10 phương pháp tọa độ trong mặt phẳng tôi thấy đa số học sinh mới chỉ làm được một số dạng bài tập đơn giản; còn những bài tập mang tính suy luận, đòi hỏi khả năng vận dụng cao thì các em không tự mình tìm được lời giải mặc dù trước đó khi giáo viên tiến hành giảng dạy các tiết chữa bài tập các em tỏ ra khá hiểu bài. Trong khi đó, các bài toán liên quan đến phần này ở các đề thi đại học, trung học phổ thông quốc gia, các đề thi học sinh giỏi trong những năm gần đây lại đòi hỏi tính suy luận cao. Để giải được những bài toán này học sinh không chỉ phải nắm được các kiến thức của hình học giải tích mà còn phải phát hiện ra “điểm nút” của bài toán đó là các tính chất hình học thuần túy ở trung học cơ sở ẩn chứa trong mỗi bài toán. Điều này dẫn đến kết quả làm bài của học sinh chưa được như mong muốn.

Khi dạy các dạng bài tập phần này, một thực tế thường xảy ra là nhiều giáo viên đi theo lối mòn như: Nêu dạng toán, phương pháp giải chứ chưa phân tích cho học sinh thấy được trong bài toán tại sao lại phải đi tìm tọa độ điểm này

trước, điểm kia sau, ưu tiên đường này trước, đường kia sau, tính độ dài các đoạn thẳng, tính các góc để làm gì? Tại sao lại kẻ thêm đường thẳng này, kẻ với mục đích gì?...Sở dĩ có thực trạng trên là vì giáo viên chưa chịu thực hiện đổi mới phương pháp dạy học hoặc biết nhưng ngại áp dụng, thiếu kiên nhẫn phân tích, giải thích cho học sinh. Điều này làm hạn chế khả năng tư duy, niềm đam mê, hứng thú học tập của các em. Theo tôi việc phân tích, định hướng cho học sinh cách tiếp cận một bài hình học là rất cần thiết, đây là công việc mà người giáo viên phải chú trọng hơn là cung cấp cho các em một lời giải khô khan.

- Kết quả thực trạng trên.

Trong các năm học 2013-2014; 2014-2015 tỉ lệ học sinh lớp 12 trường THPT Triệu Sơn 4 làm được câu hình học tọa độ trong mặt phẳng khi đi đại học và THPT Quốc Gia không nhiều (điều đó thể hiện ở kết quả thi, số lượng học sinh đạt điểm tám trở lên mới đạt khoảng 25% trên tổng số thí sinh dự thi)

Năm học 2014- 2015 khi chưa áp dụng sáng kiến vào giảng dạy. Sau khi dạy xong chương III hình học lớp 10 và tổ chức ôn tập, rèn kĩ năng giải bài tập trong các tiết dạy tự chọn và các buổi dạy thêm trong nhà trường. Tôi cho học sinh lớp 10D3 giải thử một số bài tập lấy từ đề thi thử Đại học của một số trường THPT và các đề thi đại học năm 2014. Kết quả như sau:

Lớp	Số HS	Giỏi		Khá		TB		Yếu	
		SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
10D3	48	0	0	10	20,8	20	41,6	18	37,6

Từ kết quả đó, trong năm học 2015- 2016 tôi đã tiến hành đổi mới dạy nội dung này tại lớp 10A3 (lớp 10A3 có chất lượng tương đương với lớp 10D3)

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

Tổ chức cho học sinh hình thành kỹ năng giải toán thông qua một số buổi học có sự hướng dẫn của giáo viên. Trong đó yêu cầu khả năng lựa chọn lời giải ngắn gọn trên cơ sở phân tích bài toán hình học phẳng tương ứng; Tổ chức kiểm tra để thu thập thông tin về khả năng nắm vững kiến thức của học sinh; Cung cấp hệ thống các bài tập mở rộng để học sinh tự rèn luyện. Nội dung cụ thể là:

2.3.1: Tổ chức cho học sinh ôn tập củng cố lại một số kiến thức cơ bản.

Trước khi hướng dẫn học sinh khai thác các tính chất hình học phẳng để giải bài toán phương pháp tọa độ trong mặt phẳng cần tổ chức cho học sinh ôn tập lại một số tính chất hình học cơ bản mà các em đã được học ở trung học cơ sở. Cụ thể là tính chất về các đường trong tam giác, các tính chất của đường tròn tứ giác nội tiếp, tính chất của hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông; các tính chất cơ bản của phần véc tơ trong mặt phẳng và phần phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Tiếp theo, hướng dẫn học sinh tìm hiểu và chứng minh một số tính chất hình học thuần túy thường được khai thác trong các bài toán phương pháp tọa độ trong mặt phẳng nhằm mục đích củng cố, khắc sâu thêm kỹ năng chứng minh quan hệ vuông góc, quan hệ song song, sự bằng nhau của các đoạn thẳng, các góc... đồng thời cũng để các em có cơ sở để tư duy, phát hiện các tính chất hình

học ẩn chứa trong mỗi bài toán và vận dụng chúng trong quá trình tìm giải. Cụ thể là một số tính chất sau:

Gọi I ; G ; H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Ta có các tính chất sau:

- Tính chất 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) , A' là điểm đối xứng của A qua I , H' là giao điểm thứ hai của AH với (C) . Khi đó ta có các kết quả sau:

1. Tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành.
2. Gọi M là trung điểm của BC , ta có $\overline{AH} = 2\overline{IM}$
3. Ba điểm I , G , H thẳng hàng và $\overline{IH} = 3\overline{IG}$ (định lý Ôle)
4. H' đối xứng với H qua BC

Chứng minh

1. Ta có: $\angle CA'A = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BH \parallel A'C$ (cùng vuông góc với AC).

Tương tự ta có $HC \parallel BA'$. Từ đó suy ra tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành.

2. $IM \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC)

$$\frac{IM}{AH} = \frac{AI}{AA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 2IM \Rightarrow \overline{AH} = 2\overline{IM}$$

3. Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 3\overline{IG}$ (1). M là trung điểm của BC nên $\overline{IB} + \overline{IC} = 2\overline{IM}$

Theo chứng minh trên $\overline{AH} = 2\overline{IM}$
 $\Rightarrow \overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = \overline{IA} + \overline{AH} = \overline{IH}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overline{IH} = 3\overline{IG}$

4. $\angle BAH' = \angle BCH$ (cùng phụ với góc $\angle ABC$)

Mà $\angle BAH' = \angle BCH'$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BH'}$)

$\Rightarrow \angle BCH = \angle BCH' \Rightarrow \Delta HCH'$ cân tại C nên H' đối xứng với H qua BC

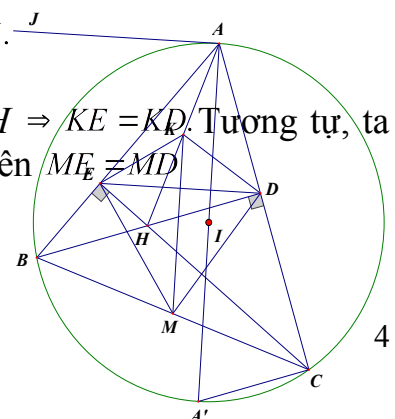
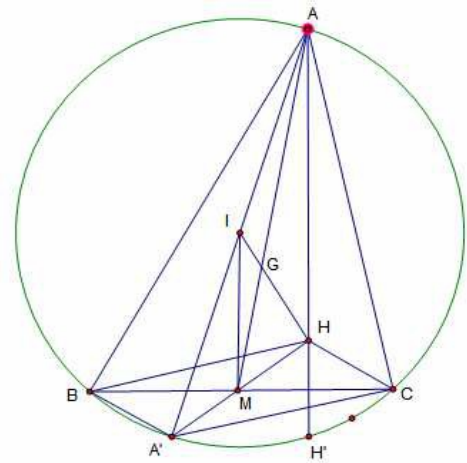
- Tính chất 2:

Cho tam giác ABC . Gọi D , E lần lượt là chân các đường cao kẻ từ đỉnh B và C lên các cạnh AB , AC . Các điểm I , H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC , K là trung điểm của AH , M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó ta có:

5. $KM \perp ED$.
6. $AI \perp DE$ hay $AA' \perp DE$.
7. Tứ giác $EKDM$ nội tiếp đường tròn đường kính KM .

Chứng minh

5. Tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow KE = KD$. Tương tự, ta có tứ giác $EDCB$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $ME = MD$
 $\Rightarrow KM$ là trung trực của ED



6. **Cách 1:** Tứ giác $BEDC$ nội tiếp nên: $\angle ABC = \angle ADE$.
 Mà $\angle ABC = \angle AA'C$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)
 $\Rightarrow \angle ADE = \angle AA'C$. Mà $\angle AA'C + \angle CAA' = 90^\circ \Rightarrow \angle ADE + \angle CAA' = 90^\circ$
 $\Rightarrow AA' \perp DE$.

Cách 2: Qua A kẻ tiếp tuyến AJ với đường tròn. Khi đó $AJ \perp AA'$. Mặt khác $\angle JAB = \angle ACB$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$)
 Mà $\angle AED = \angle ACB \Rightarrow \angle AED = \angle JAB \Rightarrow AJ \parallel DE$. Từ đó suy ra $DE \perp AA'$.

7. DK là đường trung tuyến của tam giác vuông ADH nên $DK = KH = \frac{AH}{2}$
 $\Rightarrow \triangle KDH$ cân tại $H \Rightarrow \angle KDH = \angle KHD = \angle BCA$

+ DM là đường trung tuyến của tam giác DBC nên $DM = MB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại $M \Rightarrow \angle BDM = \angle CBD \Rightarrow \angle KDH + \angle BDM = \angle BCA + \angle DBC = 90^\circ \Rightarrow \angle KDM = 90^\circ$ (1)
 Tương tự ta có $\angle KEM = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $EKDM$ nội tiếp đường tròn đường kính KM .

- **Tính chất 3:**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I , D là giao điểm của đường phân giác trong góc A với đường tròn (C) . Khi đó ta có các tính chất:

7. Với $\forall M \in AB$, M' là điểm đối xứng với M qua đường phân giác AD thì $M' \in AC$
8. $ID \perp BC$

Chứng minh

7. Nếu $M \equiv A$ thì $M' \equiv M \equiv A$

Với mỗi $M \in AB$ mà M không trùng với A , qua M kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác AD , cắt AC tại M' . Khi đó AD vừa là đường cao vừa là đường phân giác của $\triangle AMM' \Rightarrow AD \cap MM'$ tại trung điểm của MM' nên M' là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AD

8. D là điểm chính giữa cung BC nên $ID \perp BC$

(Tính chất đường kính đi qua điểm chính giữa của cung)

- **Tính chất 4:** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó nếu $MA \perp MC$ thì $MB \perp MD$.

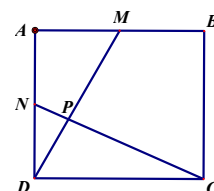
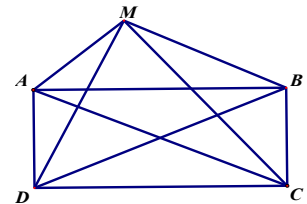
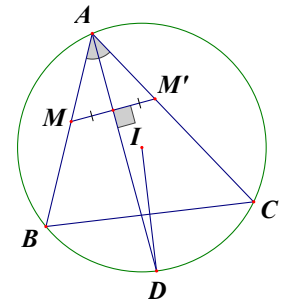
Chứng minh

$ABCD$ là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn đường kính AC . Mà $MA \perp MC$ nên M cũng thuộc đường tròn này. Mặt khác đường tròn đường kính AC cũng chính là đường tròn đường kính DB nên M nhìn BD dưới một góc vuông hay $MB \perp MD$.

- **Tính chất 5:** Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD . Khi đó $DM \perp CN$.

Chứng minh

$$\Rightarrow \angle MPC = \angle PDC + \angle NCD = \angle PDC + \angle ADM = 90^\circ$$



$$\Rightarrow DM \perp CN.$$

2.3.2. Hướng dẫn học sinh tìm lời giải cho bài toán hình học tọa độ phẳng Oxy thông qua một số ví dụ điển hình.

Một bài toán hình học tọa độ phẳng có thể được giải theo một trong ba hướng chính sau: Giải hoàn toàn theo quan điểm hình học giải tích; Giải hoàn toàn theo quan điểm hình học thuần túy sau đó áp dụng vào tọa độ; Kết hợp khai thác các yếu tố hình học phẳng và hình giải tích để giải toán.

Mỗi hướng giải đều có những ưu thế riêng cho từng bài toán nhưng nói chung đối với các bài toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng trong đề thi đại học và trung học phổ thông quốc gia những năm gần đây thì giải theo hướng thứ ba thường hiệu quả hơn cả.

Quy trình tìm và trình bày lời giải cho bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng theo hướng thứ ba thường gồm các bước sau:

Bước 1: Vẽ hình phẳng biểu thị cho bài toán (vẽ hình càng chính xác càng dễ quan sát để nhận ra “điểm nút” của bài toán).

Bước 2: Phân tích bài toán, tìm lời giải:

Quan sát hình vẽ, xác định giả thiết và yêu cầu của bài toán; Trên cơ sở các dữ kiện của bài toán phân tích các yếu tố hình phẳng cần thiết để giải toán.

- Sắp xếp các điểm chưa biết tọa độ, các đường cần tìm theo thứ tự từ nhiều giả thiết đến ít giả thiết. Xác định xem nên ưu tiên tìm điểm nào? Đường nào trước?
- Phân tích các điểm, các đường trên hình vẽ: Liên hệ các điểm, các đường đã biết với nhau; liên hệ các điểm, các đường cần tìm với các điểm đã biết tọa độ hoặc tìm được ngay tọa độ với các điểm khác, với các đường mà giả thiết cho, với tính chất các đường, các góc trong tam giác, trong đường tròn, trong tứ giác (thường là tứ giác nội tiếp, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông)... để dự đoán tính chất hình học ẩn chứa trong bài toán, tiến hành chứng minh tính chất đã phát hiện rồi dựa vào tính chất đó để giải quyết bài toán.
- Lập sơ đồ các bước giải bài toán.

Bước 3: Trình bày lời giải.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng $BC: x - y - 4 = 0$, các điểm $H(2;0)$, $I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy lập phương trình cạnh AB, biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

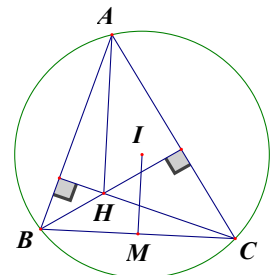
Hướng dẫn học sinh tìm lời giải

Cách 1:

Bước 1: Giáo viên hướng dẫn học sinh vẽ hình

Bước 2: Phân tích tìm lời giải

+ Đầu bài đã cho các điểm $H(2;0)$, $I(3;0)$ và phương trình



đường thẳng BC nên ta tìm mối liên hệ giữa H, I và BC ta sẽ liên hệ đến tính chất $IM \perp BC$ (với M là trung điểm của BC) $\Rightarrow$ tìm được tọa độ điểm M .

+ Mục tiêu bài toán là viết phương trình AB nên ta tìm mối liên hệ giữa các điểm H, I, M, A, B . Đã có tọa độ các điểm H, I, M nên để tìm A ta liên hệ đến tính chất $\overline{AH} = 2\overline{IM} \Rightarrow$ tìm được tọa độ điểm A .

+ Tiếp theo ta phân tích các dữ kiện liên quan đến điểm B , ta nhận thấy $IA = IB$ và $B \in BC$. Từ đó ta tìm được tọa độ điểm B .

+ Sau khi tìm được A, B ta viết được phương trình AB .

- Bước 3:

Trình bày lời giải

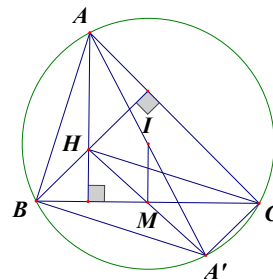
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow IM \perp BC$. Đường thẳng IM đi qua I và có véc tơ pháp tuyến $n(1;1) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng $IM: x + y - 3 = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm M

thỏa mãn hpt: $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Chứng minh $\overline{AH} = 2\overline{IM}$ (tính chất 1)

$$\overline{AH} = 2\overline{IM} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x_A = 1 \\ -y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$$

$$B \in BC \Rightarrow B(t; t-4) \quad (t \leq 3)$$

$$\text{Do } IA = IB \Rightarrow (t-3)^2 + (t-4)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \text{ (I)} \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow B(2; -2)$$



$A(1;1); B(2;-2) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là: $3x + y - 4 = 0$.

Cách 2:

+ **Phân tích:** Đầu bài đã cho các điểm $H(2;0), I(3;0)$

lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nên ta liên hệ ngay đến tính chất ba điểm I, G, H thẳng hàng và $\overline{IH} = 3\overline{IG}$ với G là trọng tâm của tam giác ABC .

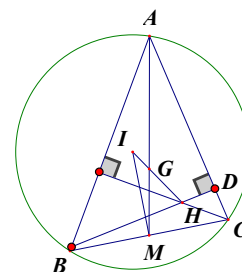
Từ đó tìm được tọa độ điểm G . Sau khi tìm được điểm G , đã biết phương trình BC một cách rất tự nhiên ta quan tâm

đến trung điểm M của BC , tìm mối quan hệ giữa M với các điểm, các đường đã biết, nhận thấy $IM \perp BC \Rightarrow$ tìm được tọa độ điểm M . Mục tiêu của bài toán là viết phương trình cạnh AB nên cần lưu ý đến các điểm $A; B$. Nhận thấy tìm ngay được A dựa vào tính chất $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, tiếp theo ta tìm tọa độ điểm B , dựa vào các điều kiện $B \in BC; IA = IB$ và điểm B có hoành độ không lớn hơn 3. Khi đã tìm được tọa độ $A; B$ ta dễ viết được phương trình đường thẳng AB .

+ **Học sinh tự trình bày lời giải theo quá trình phân tích ở bước 2.**

Nhận xét: Điểm mấu chốt của bài toán là các tính chất liên quan đến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác; mối liên hệ giữa đường kính và dây cung của đường tròn. Cũng với mối liên hệ đó khi thay đổi một số giả thiết của bài toán ta sẽ được những bài tập mới.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, trực tâm $H(2;1)$, $BC = 2\sqrt{5}$. Hãy lập phương trình đường thẳng BC biết trung



điểm M của BC nằm trên đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$ và điểm M có tung độ dương.

- Bước 1: Yêu cầu học sinh tự vẽ hình.

- Bước 2: Phân tích : Đường thẳng BC đi qua điểm M nhận $\vec{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến, $\vec{AH}$ đã biết nên ta cần tìm tọa độ điểm M . Đầu bài đã cho các điểm A và H ; $BC = 2\sqrt{5}$ do đó ta nghĩ đến mối liên hệ giữa M và AH đó là $\vec{AH} = 2\vec{IM}$ (với I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$) và mối liên hệ về độ dài giữa BC ; IA ; IM để tìm tọa độ M

- Bước 3: Trình bày lời giải.

Do $M \in d \Rightarrow M(2a+1; a), (a > 0)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $\vec{AH} = 2\vec{IM}$

Ta có $\vec{AH} = (4; 2)$; $AH = 2\sqrt{5}$ và $\vec{AH} = 2\vec{IM} \Rightarrow I(2a-1; a-1)$

$IM = \sqrt{5}$. Vì M là trung điểm của BC nên $IM \perp BC$. Do đó:

$$IA^2 = IB^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + IM^2 = 10 \Rightarrow (2a+1)^2 + a^2 = 10 \Rightarrow a = 1$$

hoặc $a = -\frac{9}{5}$. Do $a > 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow M(3; 1)$. Đường thẳng BC đi qua $M(3; 1)$, nhận

$\vec{AH} = (4; 2)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình $2x + y - 7 = 0$.

Nhận xét: Qua ví dụ 2, ta thấy giả thiết của bài toán có thể thay đổi nhưng khi học sinh nắm vững bài toán gốc (tính chất $\vec{AH} = 2\vec{IM}$) thì các em vẫn có thể giải quyết được yêu cầu của bài toán mới.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$, đường thẳng AC đi qua $E(2; -3)$. Gọi H và K lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh B và C . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết phương trình đường thẳng HK là $3x + y = 0$ và A có hoành độ âm, B có tung độ dương.

Hướng dẫn học sinh tìm lời giải

- Bước 1: Hướng dẫn học sinh vẽ hình.

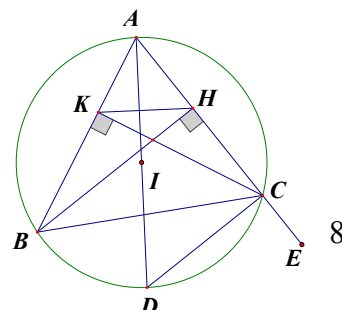
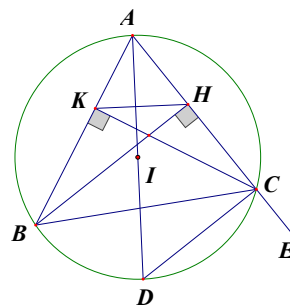
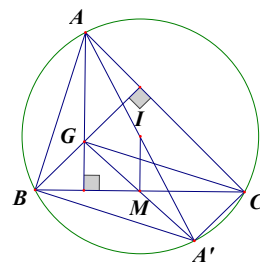
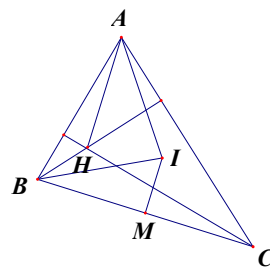
- Bước 2: Phân tích: + Ta tìm được ngay tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Trên cơ sở giả thiết của bài toán xác định sẽ tìm tọa độ điểm A trước liên hệ điểm A với các điểm, các đường đã biết là điểm I và đường thẳng HK , ta tìm mối liên hệ giữa AI và HK . Dự đoán AI vuông góc với HK và tiến hành chứng minh (tính chất 2).

+ Sau khi chứng minh được $AI \perp HK$, viết được phương trình đường thẳng $AI \Rightarrow A = (C) \cap AI \Rightarrow$ tọa độ điểm A , sau khi tìm được tọa độ điểm A , viết được

phương trình đường thẳng AC (AC đi qua A và E) $\Rightarrow H = HK \cap AC \Rightarrow BH$, từ đó suy ra $B = BH \cap (C)$.

- Bước 3: Trình bày lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(2; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$



Ta có tứ giác $HKBC$ nội tiếp nên $\angle ABC = \angle HKC$ (1)

Gọi D là giao điểm thứ hai của AI với (C) . Khi đó

$\angle ABC = \angle ADC$ (2). Từ (1) và (2) ta có $\angle HKC = \angle ADC$.

Mặt khác $\angle AID + \angle ADC = 90^\circ$. Suy ra $\angle AID + \angle HKC = 90^\circ$

Vậy $AI \perp HK$

Do đó phương trình AI là: $x - 3y - 8 = 0$. Suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \text{ Ta được } A(5; -1) \text{ (loại)} \text{ và } A(-1; -3)$$

Khi đó AC đi qua $A(-1; -3)$ và $E(2; -3)$ nên có phương trình: $y + 3 = 0$

Suy ra tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = -3 \Rightarrow C(-1; -3) \equiv A \\ x = 5; y = -3 \Rightarrow C(5; -3) \end{cases}$$

H là giao điểm của đường thẳng HK và AC nên $H(1; -3)$

- Đường thẳng BH đi qua H và vuông góc với AC nên BH có phương trình:

$x - 1 = 0$. B là giao điểm của BH và (C) nên tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = 1; y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(1; 1) \text{ (do } B \text{ có tung độ dương)}$$

Vậy $A(-1; -3)$; $B(1; 1)$; $C(5; -3)$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm H , phương trình đường thẳng AH là $3x - y + 3 = 0$, trung điểm của cạnh BC là điểm $M(3; 0)$. Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ C và B đến AB và AC , phương trình đường thẳng EF là $x - 3y + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm A , biết A có hoành độ dương.

- **Hướng dẫn học sinh vẽ hình**

- **Phân tích:** + Đầu bài đã cho phương trình EF và tọa độ trung điểm M của BC nên ta liên hệ ngay đến tính chất $KM \perp EF$ với K là trung điểm của AH . Phương trình AH đã biết từ đó tìm được tọa độ điểm K . Bốn điểm E ; F ; K ; M thuộc đường tròn (C) đường kính KM (tính chất 2); Có tọa độ K và M ta viết được phương trình đường tròn này từ đó ta tìm được tọa độ điểm E ($E = (C) \cap EF$)

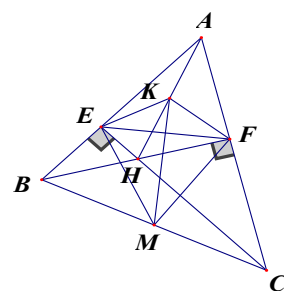
+ Để tìm tọa độ A ta liên hệ A với các điểm đã tìm được tọa độ E ; K ; M . Nhận thấy EM là trung tuyến của tam giác vuông $EHA \Rightarrow KE = KA$ (1). Kết hợp điều kiện $A \in AH$ với điều kiện (1) và giả thiết A có hoành độ dương ta tìm được tọa độ điểm A .

- **Trình bày lời giải**

Gọi K trung điểm AH . Tứ giác $AEHF$ nội tiếp và bốn điểm B , C , E , F cùng thuộc một đường tròn nên $KM \perp EF$ (đoạn nối tâm vuông góc với dây chung).

Ta có: $\angle KEF + \angle KMF = 90^\circ \Rightarrow \angle KEF + \frac{1}{2} \angle EKF = 90^\circ$ mà $\angle BAF = \frac{1}{2} \angle EKF$

$\Rightarrow \angle KEF + \angle BAF = 90^\circ \Rightarrow \angle KEF = \angle ABF$ (cùng phụ với góc $\angle BAF$)



$$\text{và: } \angle ABF = \frac{1}{2} \angle EMF = \angle KME \Rightarrow \angle MEK = \angle KEF + \angle FEM = \angle KME + \angle FEM$$

$$\Rightarrow \angle MEK = 90^\circ. \text{ Tương tự } \angle MFK = 90^\circ$$

Do đó tứ giác $MEKF$ nội tiếp đường tròn đường kính KM , tâm là trung điểm J của KM .

Đường thẳng KM qua M và vuông góc EF nên có phương trình: $3x + y - 9 = 0$.

K là giao điểm của AH và KM nên tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(1; 6)$$

Đường tròn đường kính KM có tâm $J(2; 3)$ và bán kính $r = JM = \sqrt{10}$ nên có phương trình: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 7 \\ (y - 3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow E(5; 4) \text{ hoặc } E(-1; 2).$$

Vì $A \in AH$ nên $A(a; 3a + 3)$

$$\text{Ta có: } KA = KE \Leftrightarrow KA^2 = KE^2 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (3a - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$$

Vì A có hoành độ dương nên $A(1 + \sqrt{2}; 6 + 3\sqrt{2})$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC . Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là $3x + 5y - 8 = 0$; $x - y - 4 = 0$. Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là $D(4; -2)$. Viết phương trình các đường thẳng AB , AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

- Hướng dẫn học sinh vẽ hình.

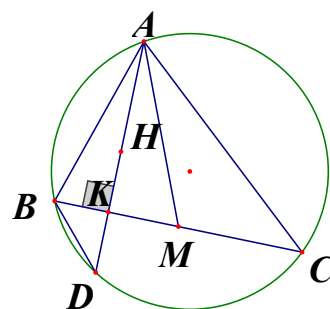
- Phân tích: Từ điều kiện bài toán suy ra tìm ngay được M là trung điểm của BC , viết được phương trình $AD \Rightarrow A = AD \cap AM$ và $K = AD \cap BC$

Nhận thấy trực tâm H đối xứng với D qua BC (tính chất 1), suy ra tọa độ điểm H ; Để viết được phương trình AB , AC ta tìm tọa độ các điểm B , C gọi $B(t; t - 4)$, dùng điều kiện M là trung điểm của BC suy ra tọa độ của điểm C theo t , dùng điều kiện

$BH \perp AC$ tìm được t từ đó suy ra tọa độ các điểm B , C và viết được phương trình AB , AC .

- Trình bày lời giải

Gọi M là trung điểm của BC , H là trực tâm tam giác ABC , K là giao điểm của BC và AD , E là giao điểm của BH và AC . Do M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:



$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Đường thẳng AD đi qua D và vuông góc với BC nên phương trình AD có dạng $x + y - 2 = 0$. Do A là giao điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow K(3; -1)$$

Tứ giác $HKCE$ nội tiếp nên $\widehat{BHK} = \widehat{KCE}$, mà $\widehat{KCE} = \widehat{BDA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$). Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{BDK}$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2; 4)$.

Do B thuộc $BC \Rightarrow B(t; t - 4)$, do M là trung điểm của BC nên: $C(7 - t; 3 - t)$

$\overrightarrow{HB}(t - 2; t - 8); \overrightarrow{AC}(6 - t; 2 - t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(6 - t) + (t - 8)(2 - t) = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(14 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 7 \end{cases}$$

Do $t \leq 3 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow B(2; -2), C(5; 1)$. Suy ra $AB: 3x + y - 4 = 0; AC: y - 1 = 0$.

Chú ý: Sau khi tìm được tọa độ các điểm A , trung điểm M của BC và trực tâm H ta có thể liên hệ tới tính chất $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ để tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , từ đó viết được phương trình của đường tròn này và các điểm B, C chính là giao điểm của nó với đường thẳng BC .

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có đỉnh $A(-3; 4)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x + y - 1 = 0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $I(1; 7)$. Viết phương trình cạnh BC , biết diện tích $\triangle ABC$ gấp 4 lần diện tích $\triangle IBC$.

- Vẽ hình

- Phân tích

Đã có tâm I và tọa độ điểm A nên viết được phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC . Từ đó tìm được tọa độ D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn (C) . Khi đó $DI \perp BC$ (tính chất 3).

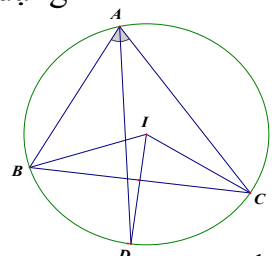
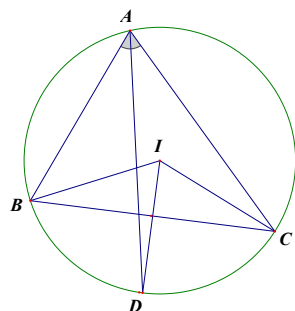
Kết hợp nhận xét $DI \perp BC$ với giả thiết $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle IBC} \Rightarrow d_{(A; BC)} = 4d_{(I; BC)}$ ta viết ta viết được phương trình cạnh BC .

- Lời giải

+ Ta có $IA = 5$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có dạng

$$(C): (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$$

+ Gọi D là giao điểm thứ hai của đường phân giác trong góc A với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tọa độ của D là



nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow D(-2; 3)$$

Vì AD là phân giác trong của góc A nên D là điểm chính giữa cung nhỏ BC

Do đó $ID \perp BC$ hay đường thẳng BC nhận véc tơ $\overrightarrow{DI} = (3; 4)$ làm véc tơ pháp tuyến.

+ Phương trình cạnh BC có dạng $3x + 4y + c = 0$

$$\text{Do } S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle IBC} \text{ nên } d(A; BC) = 4d(I; BC) \Leftrightarrow |7 + c| = 4|31 + c| \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{114}{3} \\ c = -\frac{131}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình cạnh BC là : $9x + 12y - 114 = 0$ hoặc $15x + 20y - 131 = 0$.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc BAC có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A .

- Bước 1: Vẽ hình (đối với bài toán này không nhất thiết phải vẽ hình)

- Bước 2: Phân tích giả thiết và yêu cầu của bài toán :

+ Đã có điểm B và đường phân giác trong (d) của góc A , ta nghĩ ngay đến tính chất của đường phân giác “ B' đối xứng với B qua đường phân giác trong của góc A thì B' thuộc đường thẳng AC ”. Mặt khác đã có tọa độ điểm B và trọng tâm G thì tìm được tọa độ trung điểm M của AC .

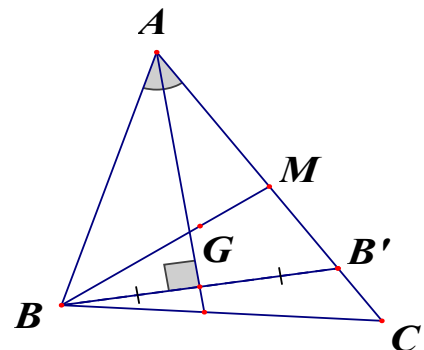
Đường thẳng AC đi qua B' và M từ đó viết được phương trình $AC \Rightarrow A = AC \cap (d)$

Sơ đồ các bước giải bài toán:

+ Tìm tọa độ trung điểm M của AC .

+ Tìm B' đối xứng với B qua đường phân giác trong của góc A .

+ Viết phương trình $MB' \Rightarrow A = MB' \cap (d)$



- Bước 3:

Trình bày lời giải

Đường thẳng (d) đi qua B và vuông góc với đường phân giác trong (Δ) của góc BAC có phương trình : $x + y + 3 = 0$. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua (Δ)

$\Rightarrow B' \in AC$.

Ta có $B'(2; -5)$; Gọi M là trung điểm của AC . Khi đó $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$. Từ đó

$M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$. Đường thẳng AC cũng chính là đường thẳng MB' có phương trình

$$4x - y - 13 = 0; A = (\Delta) \cap AC \Rightarrow \text{tọa độ } A \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x - y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $A(4; 3)$.

Nhận xét: Có thể giải bài toán hoàn toàn theo quan điểm hình học giải tích như sau:

Gọi M là trung điểm của AC . Khi đó $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$. Từ đó $M\left(\frac{7}{2}; 1\right)$. Vì A thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 1 = 0$ nên $A(t; t - 1)$. Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1; 1)$. Vì Δ là phân giác trong của góc BAC nên $\left|\cos(\overrightarrow{AB}; \vec{u})\right| = \left|\cos(\overrightarrow{AM}; \vec{u})\right|$

$$\frac{|2 + 2t|}{\sqrt{(4+t)^2 + (2-t)^2}} = \frac{\left|\frac{11}{2} - 2t\right|}{\sqrt{\left(\frac{7}{2} - t\right)^2 + (2-t)^2}}$$

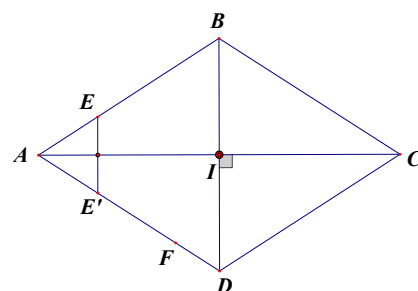
Rõ ràng việc giải phương trình cuối là công kênh và phức tạp. Do đó nếu chúng ta biết khai thác các kết quả của hình học phẳng để giải quyết bài toán như trên thì lời giải ngắn gọn hơn nhiều.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo AC nằm trên đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Điểm $E(9; 4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB , điểm $F(-2; -5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD , $AC = 2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$ biết đỉnh C có hoành độ âm.

Quá trình tư duy tìm lời giải:

- **Học sinh tự vẽ hình.**

- **Phân tích:** Đầu bài đã cho phương trình đường thẳng chứa cạnh AC nên ta liên hệ đến các tính chất đường của đường chéo trong hình thoi $AC \perp BD$, $IA = IC$; $IB = ID$



(với $I = AC \cap BD$), AC là phân giác của các góc

$\angle BAD$ và $\angle BCD$. Đã biết tọa độ các điểm $E \in AB$; $F \in AD$ nên ta khai thác tính chất AC là phân giác của góc $\angle BAD$. Theo tính chất 7, ta có $E \in AB \Rightarrow E' \in AD$ (với E' là điểm đối xứng của E qua AC). Từ đó viết được phương trình AD và tìm ngay được $A = AC \cap AD$, sau khi tìm được A dùng các giả thiết $C \in AC$ và độ dài $AC = 2\sqrt{2}$ nên ta tìm được tọa độ điểm C . Khi đã có tọa độ A và C thì ta tìm được trung điểm tìm được trung điểm I của AC , tiếp theo ta viết được phương trình BD là đường thẳng qua I , vuông góc với $AC \Rightarrow D = AD \cap BD$, dùng điều kiện B đối xứng với D qua I , ta tìm được tọa độ điểm D .

- **Dựa vào quá trình phân tích ở bước 2, học sinh tự trình bày lời giải.**

Nhận xét: Khi làm các bài tập liên quan đến hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông ngoài các tính chất đặc trưng về mối liên hệ giữa các cạnh, các góc, ta thường hay khai thác tính chất của giao điểm hai đường chéo của chúng.

Ví dụ 9: (Đề thi THPT quốc gia năm 2015): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC ; D là điểm đối xứng với B qua H ; K là hình chiếu vuông góc của C trên AD . Giả sử $H(-5; -5)$, $K(9; -3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng có phương trình $x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm A .

- **Vẽ hình**

- **Phân tích tìm lời giải:** + Gọi M là trung điểm của AC . Từ giả bài toán ta xác định tìm tọa độ điểm M trước (vì trong các điểm chưa biết tọa độ thì M chứa nhiều giả thiết nhất). Điều kiện thứ nhất là

$$M \in d: x - y + 10 = 0 \Rightarrow M(t; 10 + t)$$

ta tìm mối liên hệ giữa M với các điểm đã biết

tọa độ là $H(-5; -5)$, $K(9; -3)$ thì nhận thấy $MH = MK$

(vì tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn tâm M , đường kính AC), từ đó tìm được tọa độ điểm M .

+ Sau khi tìm được tọa độ điểm M , ta tìm mối liên hệ giữa A và các điểm đã biết tọa độ là H, K, M , quan sát hình vẽ, ta dự đoán $AK \perp MH$ và đặc biệt hơn nữa là A đối xứng với K qua MH . Chứng minh được nhận xét này thì bài toán hoàn toàn được giải quyết.

- **Lời giải**

Gọi M là trung điểm của AC . Vì $M \in d: x - y + 10 = 0$ nên $M(t; 10 + t)$. Ta có tứ giác $AHKC$ nội tiếp đường tròn tâm M nên $MH = MK = \frac{AC}{2} \Rightarrow$ điểm M thuộc đường trung trực của HK có phương trình $7x + y - 10 = 0 \Rightarrow 7t + 10 + t - 10 = 0 \Rightarrow 8t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow M(0; 10)$.

Do D đối xứng với B qua H nên tam giác ABD cân tại A nên $\angle ABH = \angle ADH$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\angle ABH + \angle ACH = 90^\circ \Rightarrow \angle ADH + \angle ACH = 90^\circ$

Mặt khác $\angle ACH = \angle HMC$ (tam giác MCH cân tại M) $\Rightarrow \angle ADH + \angle HMC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle DIH = 90^\circ$ ($I = AK \cap MH$). Mặt khác $MK = MA$ nên I là trung điểm của AK

$\Rightarrow K$ đối xứng với A qua đường thẳng MH .

Ta có $MH(5; 15)$; đường thẳng MH có phương trình $3x - y + 10 = 0$. Trung điểm I của AK thuộc MH và $AK \perp MH$ nên tọa độ của A thỏa mãn hệ phương trình

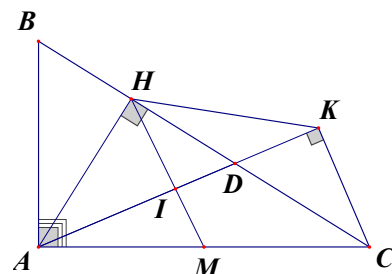
$$\begin{cases} 3\left(\frac{x+9}{2}\right) - \left(\frac{y-3}{2}\right) + 10 = 0 \\ x - 9 + 3(y+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-15; 5)$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh A đối xứng với K qua MH bằng các cách sau:

Cách 1: $\angle HKA = \angle HCA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\angle HCA = \angle HAB$ (cùng phụ với góc $\angle HAC$)

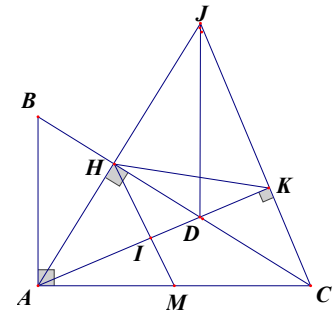
$\angle HAB = \angle HAD$ (tam giác ABD cân tại A)



$\Rightarrow \angle HKA = \angle HAD$ nên tam giác AHK cân tại H , suy ra $HA = HK$ mà $MA = MK$ nên A đối xứng với K qua M .

Cách 2: Gọi $E = AH \cap CK$ thì D trực tâm của tam giác $AEC \Rightarrow AB \parallel DE$. Do đó $\angle BAH = \angle DAH = \angle AED = \angle HAK$ nên $\triangle HAK$ cân tại $H \Rightarrow AH = HK$. Mặt khác $MA = MK \Rightarrow K$ đối xứng với A qua đường thẳng MH

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán là việc chứng minh tam giác HAK cân tại K và để ý đến tính chất của tứ giác nội tiếp.



Ví dụ 10: (Trích đề thi HSG lớp 12 tỉnh Thanh Hóa năm học 2014 – 2015)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $H(1;2)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BD . Điểm $M(\frac{9}{2};3)$ là trung điểm của cạnh BC phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của $\triangle ADH$ là: $4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Quá trình phân tích tìm lời giải:

- Bước 1: Yêu cầu học sinh vẽ hình.

- Bước 2: Phân tích: Gọi AK là đường trung tuyến kẻ từ A của $\triangle ADH$ ($K \in DH$)

đầu bài đã cho phương trình đường thẳng AK và tọa độ các điểm H, M nên ta nghĩ đến việc tìm mối liên hệ giữa chúng, bằng quan sát hình vẽ ta nhận thấy $MK \perp AK$. Sau đó tìm cách chứng minh nhận xét này.

+ Khi đã chứng minh được $MK \perp AK$ thì viết được phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với $AK \Rightarrow$ tọa độ điểm K . Sau khi có tọa độ điểm K ta tìm được tọa độ điểm D (D đối xứng với H qua K) đồng thời viết được phương trình AH và tìm được $A = AH \cap AK$.

+ Sau khi tìm được A, D thì viết được phương trình đường thẳng BC (là đường thẳng qua M nhận $\vec{AD}$ làm véc tơ chỉ phương)

- Bước 3: Trình bày lời giải

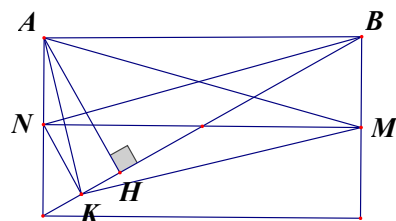
Gọi AK là đường trung tuyến kẻ từ A của $\triangle ADH$ ($K \in DH$), gọi N là trung điểm của AD thì $NK \parallel AH \Rightarrow NK \perp KB$ nên K thuộc đường tròn đường kính NB .

Tứ giác $ABMN$ là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn đường kính NB . Đường tròn này cũng là đường tròn đường kính $AM \Rightarrow K$ nhìn AM dưới một góc vuông
Hay $AK \perp KM$

Đường thẳng KM đi qua $M(\frac{9}{2};3)$ và vuông góc với $AK: 4x + y - 4 = 0$ nên MK

có pt: $x - 4y + \frac{15}{2} = 0$. $K = AK \cap MK \Rightarrow K(\frac{1}{2}; 2)$.

Do K là trung điểm của HD mà $H(1; 2)$ nên $D(0; 2)$



AH đi qua $H(1; 2)$ và vuông góc với HK nên AH có PT: $x - 1 = 0$

$A = AK \cap AH \Rightarrow A(1; 0)$.

BC qua $M(\frac{9}{2}; 3)$ và song song với AD nên BC có PT là: $2x + y - 12 = 0$

Nhận xét:

- Ngoài cách chứng minh trên, có thể chứng minh $MK \perp AK$ theo cách sau: Gọi P là trung điểm của AH . Ta có

PK song song và bằng $\frac{AD}{2} \Rightarrow PK \perp AB$

Mà $AH \perp KB$ do đó P là trực tâm

của tam giác $ABK \Rightarrow BP \perp AK$

mà $BPKM$ là hình bình hành nên

KM song song $BP \Rightarrow KM \perp AK$.

- Có thể dùng tính chất: “Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó nếu $MA \perp MC$ thì $MB \perp MD$ ” để chứng minh qua hệ vuông góc giữa hai đường thẳng với ý tưởng là để chứng minh $MB \perp MD$ ta tạo ra một hình chữ nhật $ABCD$ nhận DB, AC là đường chéo. Sau đó chứng minh $MA \perp MC$.

Ví dụ 11: Cho hình vuông $ABCD$ có hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC , biết CM cắt DN tại $I(\frac{22}{5}; \frac{11}{5})$. Gọi H là trung điểm DI , biết

đường thẳng AH cắt CD tại $P(\frac{7}{2}; 1)$. Biết $x_A < 4$, tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

- Hướng dẫn học sinh tìm lời giải.

+ Đầu bài đã cho tọa độ các điểm I và P nên ta tìm mối liên hệ giữa I, P với các điểm các đường khác.

Ta có $CM \perp DN$ hay $MI \perp DI$ (tính chất 6)

+ Từ thiết của bài toán ta thấy trong các điểm cần tìm thì A có nhiều giả thiết nhất nên ta xác định tìm tọa độ điểm A trước. Ta tìm mối liên hệ giữa A với I và P . Bằng quan sát hình vẽ ta dự đoán $AI \perp IP$.

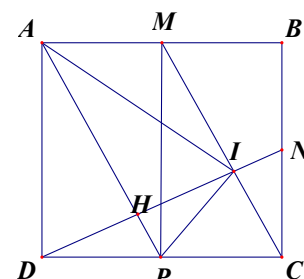
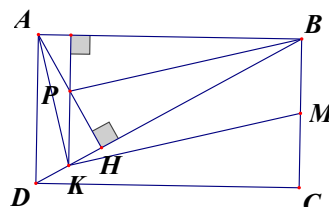
Mặt khác nhận thấy P là trung điểm của DC (giáo viên hướng dẫn để học sinh tự chứng minh bằng cách gọi E là trung điểm của DC , chứng minh AE cắt DI tại trung điểm H của DI . Điều đó chứng tỏ E trùng với P)

$\Rightarrow$ tứ giác $AMCP$ là hình bình hành nên $AP \parallel CM \Rightarrow AP \perp DN \Rightarrow \triangle ADI$ cân tại $A \Rightarrow AI = AD = DC$. Mà $DC = 2IP \Rightarrow AI = 2IP$ (1)

Tứ giác $AMPD$ là hình chữ nhật mà $MI \perp DI$ nên $AI \perp IP$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta tìm được tọa độ điểm A . Khi đã có A thì viết phương trình AP và phương trình DN (DN qua I và vuông góc với AP), suy ra $H = AP \cap DN$, H là trung điểm ID suy ra tọa độ điểm D ; P là trung điểm DC suy ra tọa độ điểm C , dùng điều kiện $\overline{AB} = \overline{DC}$ suy ra tọa độ điểm B .

- Học sinh tự trình bày lời giải dựa vào quá trình phân tích ở trên.



Ví dụ 12. (Trích đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa năm học 2014 – 2015): Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ có $B(2;4)$; $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ các điểm A và C thuộc trục hoành. Gọi E là trung điểm của đoạn AD , đường thẳng EC đi qua điểm $F(-4;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C, D biết EC vuông góc với BD và điểm E có tọa độ nguyên.

Quá trình tư duy tìm lời giải.

- **Bước 1:** Hướng dẫn học sinh vẽ hình.

- **Bước 2:** Phân tích: Trong các điểm chưa biết tọa độ thì E là điểm có nhiều giả thiết nhất nên ta ưu tiên điểm E trước. Đã biết phương trình AC và tọa độ điểm B nên ta tìm mối liên hệ giữa E với B và AC . Quan sát hình vẽ ta dự đoán $EB \perp AC$ và tiến hành chứng minh nhận xét này.

+ Sau khi chứng minh $EB \perp AC$, ta viết được phương trình đường thẳng EB .

+ $A \in Ox \Rightarrow A(a;0)$, sau khi viết được phương trình EB , ta tham số hóa được tọa độ điểm E sử dụng điều kiện $BA \perp EA$; $EF \perp BD$;

E là trung điểm của AD và điểm E có hoành độ

nguyên ta tìm được tọa độ các điểm $A; E; D$

và khi đó tìm được $C = EF \cap Ox$

- **Bước 3:** Lời giải

Gọi K là điểm đối xứng với B qua E thì tứ giác

$ABDE$ là hình bình hành nên $DB \parallel AK \Rightarrow CE \perp AK$

$\Rightarrow E$ là trực tâm của $\triangle ACK \Rightarrow KE \perp AC$ hay

$EB \perp AC$. Đường thẳng BE qua $B(2;4)$ vuông góc

với ox nên có phương trình $x = 2$

Gọi $A(a;0)$; $\Rightarrow E(2;b) \Rightarrow D(4-a;2b)$; $\overrightarrow{BA} = (a-2;4)$; $\overrightarrow{EA} = (a-2;-b)$

$\overrightarrow{BD} = (2-a;2b-4)$; $\overrightarrow{FE} = (6;b-1)$

$BA \perp EA \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{EA} = 0$; $EF \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

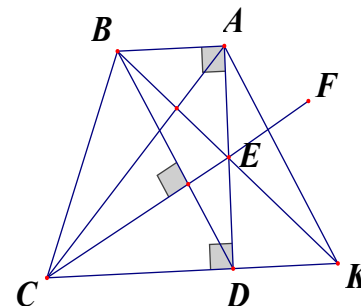
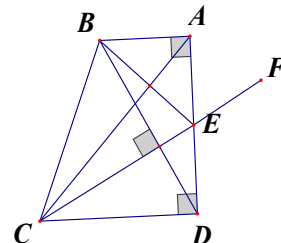
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + 4b = 0 \\ 6(2-a) + (b-1)(2b-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ (do } b \text{ nguyên)}$$

$\Rightarrow A(4;0)$; $D(0;-2)$

Đường thẳng EF có phương trình $x+3y=-1$ cắt Ox tại $C(-1;0)$

Vậy $A(4;0)$; $D(0;-2)$; $C(-1;0)$

Nhận xét: Qua các ví dụ 10; 11; 13 ta nhận thấy nếu đề bài đã cho hai đường thẳng $a; b$ cắt nhau tại điểm H và lần lượt vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau khác thì để chứng minh các quan hệ vuông góc giữa một đường thẳng đi qua H và một đường thẳng khác ta nên lưu ý đến tính chất “ba đường cao của một tam giác đồng quy” và quan tâm đến ý tưởng tạo ra một tam giác có H là trực tâm.



Chú ý: Trong ví dụ 12 có thể hướng dẫn học sinh chứng minh $EB \perp AC$ bằng phương pháp véc tơ (tham khảo đáp án của SGD), phương pháp tọa độ hoặc bằng công cụ hình học thuần túy như sau:

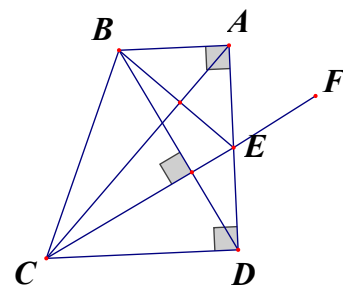
Ta có: $\angle EDB = \angle ADB$ (cùng phụ với góc $\angle EDB$)

$$\Rightarrow \triangle DCE \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AD}$$

$$\text{mà } DE = AE \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DC}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{BA} = \frac{DC}{AE}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BAE \Rightarrow \angle ABE = \angle CAD$$

$$\text{Mà } \angle ABE + \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle CAE + \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow EB \perp AC.$$



2.3.3: Bài tập tương tự để học sinh tự luyện ở nhà.

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A là điểm $D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam

giác ABC là điểm . Tìm tọa độ của B và C biết C có hoành độ âm.

2. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm của CD , đường thẳng BN có phương trình là $13x - 10y + 13 = 0$, điểm $M(-1; 2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC = 4AM$. Gọi H là điểm đối xứng với N qua C , H thuộc đường thẳng $\Delta: 2x - 3y = 0$. Biết $3AC = 2AB$. Tìm tọa độ A, B, C, D .

3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có trọng tâm G . Gọi E, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ; D là điểm đối xứng với H qua A , I là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng CD . Biết điểm $D(-1; -1)$, đường thẳng IG có phương trình $6x - 3y - 7 = 0$ và điểm E có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BF . Tìm tọa độ điểm C biết C thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ và tọa độ hai điểm $E(2;0), H(1; -1)$.

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90^\circ$) có đỉnh $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường chéo AC . Điểm $M\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ là trung điểm HC . Xác định tọa

độ các đỉnh A, B, C biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$.

2.4: Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Trong quá trình thực hiện sáng kiến này ở lớp 10A3 tôi nhận thấy:

- Các em học sinh chăm chú nghe giảng và giải bài tập, bước đầu hình thành nên lối tư duy khoa học hơn, sâu sắc hơn.
- Giờ học sôi nổi, tạo nên tinh thần học tập chung cho cả lớp.

- Học sinh có những thay đổi tích cực về phương pháp học tập và tư duy giải toán.
- Một số học sinh khá còn sáng tạo thêm các bài tập dựa vào bài toán gốc cho cả lớp cùng làm, phong trào thi đua học tập của lớp ngày một nâng cao.

Qua thời gian thực tế dạy học, tôi nhận thấy khi chưa đưa đề tài này vào quá trình giảng dạy, học sinh chỉ có thể giải quyết được các bài tập đơn giản. Không biết phân tích bài toán, lúng túng không biết bắt đầu từ đâu, xử lý các giả thiết đã cho như thế nào, dẫn đến không làm được bài.

Sau khi học đề tài học sinh đã có thể làm tốt các bài tập khó, các em hứng thú và say mê hơn trong học tập, có cách nhìn nhận vấn đề tốt hơn, tư duy, tiếp cận tìm ra lời giải nhanh, một số em có hướng tư duy độc đáo.

Kết quả đó còn được thể hiện rõ rệt qua các bài kiểm tra khi tôi tiến hành dạy đề tài ở lớp 10A3. So sánh giữa các lớp chưa học và các lớp đã được học đề tài, cho thấy hiệu quả của đề tài và tính thiết thực trong việc đổi mới phương pháp dạy học.

Sau khi thực hiện quá trình hướng dẫn học sinh tìm lời giải và cho các em tự luyện tập ở nhà tôi tiến hành cho học sinh lớp 10A3 làm bài kiểm tra 45' (với mức độ đề tương đương với đề đã cho lớp 10D3 năm học 2014 - 2015). Nội dung đề kiểm tra như sau:

Câu 1.(Đề thi ĐH khối D năm 2014): Trong phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1; -1)$. Đường thẳng AB có phương trình $3x + 2y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BD ; E và F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD và BH . Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là $3x - y - 10 = 0$ và E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và D của hình chữ nhật $ABCD$.

Kết quả làm bài của học sinh được thống kê ở bảng sau.

Lớp	Số HS	Giỏi		Khá		TB		Yếu	
		SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
10A3	45	12	26,7	15	33,3	12	26,7	6	13,3

Bản thân tôi và các đồng nghiệp ở trường trung THPT Triệu Sơn 4 nhận thấy khi áp dụng sáng kiến dạy học bài tập chương III hình học lớp 10 thì hiệu quả giảng dạy giảng dạy của giáo viên được nâng lên từ đó góp phần vào việc nâng cao chất lượng giáo dục của các lớp mà mình phụ trách nói riêng và của nhà trường nói chung.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

- Kết luận:

Phát triển năng lực tư duy, tư duy độc lập, khả năng tự phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh là vấn đề cần thiết và cấp bách hiện nay. Làm được điều đó các em mới phát huy hết được khả năng của mình và có những ý tưởng hay trong giải toán, tránh được lời giải máy móc khô khan, loại bỏ dần những cách học sai lệch như học tủ, học vẹt.

Người thầy cần xác định được tầm quan trọng của việc xây dựng nền tảng kiến thức, nền tảng có vững vàng thì các em mới có đủ nội lực để tiếp nhận kiến thức mới, nền tảng có vững vàng các em mới có cơ sở để phát triển, sáng tạo những gì đã học.

Việc cung cấp một lời giải khoa học, chính xác cho học sinh là điều cần thiết, nhưng trước đó người thầy cần có các bước phân tích, biện luận đề cho học sinh mới là điều quan trọng. Các em học cách tư duy từ đây, cách nhìn nhận vấn đề cũng từ đây. Làm tốt được điều này, là một thành công của người thầy.

- Kiến nghị:

Đề tài được tích lũy nhiều năm trực tiếp giảng dạy tại các lớp của trường THPT Triệu Sơn 4, các ví dụ được chọn lọc, tham khảo từ nhiều nguồn tài liệu trong đó có đề thi Đại học – Cao đẳng của Bộ giáo dục, đề thi thử của một số trường THPT, tạp chí Toán học tuổi trẻ... Mặc dù cố gắng tìm tòi, nghiên cứu song chắc chắn đề tài không tránh khỏi những hạn chế. Rất mong được sự đóng góp quý báu của bạn đọc, đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 15 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. <i>Người viết</i> <i>Lê Thị Hương</i>
---------------------------------------	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Sách giáo khoa Hình học lớp 10- Nhà XB Giáo Dục – tháng 6 năm 2008.
- Báo toán học tuổi trẻ các số tháng 4 năm 2014; tháng 8 năm 2015; tháng 11 năm 2014.
- Đề thi đại học và trung học phổ thông quốc gia các năm 2013; 2014; 2015.

- Đề thi học sinh giỏi môn toán lớp 12 tỉnh Thanh Hóa trong các năm học 2014-2015; 2015- 2016.
- Đề thi thử đại học của một số trường THPT trong các năm gần đây; các trang mạng liên quan đến dạy học toán như [www. Moon.Vn](http://www.Moon.Vn); Thư viện trực tuyến Violet; www.diendantoanhoc.net.
- Những điểm mới trong mục tiêu đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục phổ thông – thuvienphapluat.VN.
- Tư liệu ghi chép của cá nhân - đồng nghiệp.