|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****NAM ĐỊNH****ĐỀ CHÍNH THỨC**  | **ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN****NĂM HỌC 2019-2020**Môn thi chuyên: **TOÁN**  |

**Câu 1.**

1. Cho . Tính giá trị của biểu thức 
2. Cho ba số thỏa mãn Chứng minh:



**Câu 2.** Giải phương trình, hệ phương trình sau:



**Câu 3.** Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn O. Đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E (cùng khác A). Gọi G là hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, Gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng AD và GM song song
2. Chứng minh 
3. Chứng minh : 

**Câu 4.**

1. Chứng minh rằng nếu là số nguyên thì cũng là số nguyên
2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên sao cho và đều là số chính phương.

**Câu 5.**

1. Cho các số thực thỏa mãn . Chứng minh rằng: 
2. Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được bút tổng cộng là 25.

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1.**

****

b) Từ 

Tương tự: 

Vế trái đẳng thức trở thành



Khai triển và thu gọn ta được kết quả bằng 0

**Câu 2.**

1. ĐKXĐ: 

Phương trình cho tương đương với 



Vậy 

1. 

Điều kiện xác định: . Ta có:



Sử dụng hằng đẳng thức :

ta thu được



**Câu 3.**

****

1. Có là các phân giác trong và ngoài của nên chúng vuông góc, suy ra là đường kính của (O)

Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy thẳng hàng và 

Xét tứ giác có nên là tứ giác nội tiếp

Suy ra , lại có : nên 

1. và nên , lại có và nên 

Từ đó suy ra là trực tâm tam giác , do đó hay 

Có (cùng vuông góc với nên là hình bình hành nên 

Từ AE là phân giác của và suy ra là đường trung trực của đoạn HG.

1. Từ (vì cùng cộng với , (vì cùng bằng nên 

Có là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên là tứ giác nội tiếp

Lại có: đối xứng nhau qua AE) nên 

Có .

Từ có hay 

Vậy 

**Câu 4.**

1. Ta có: 

Với n nguyên thì là ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên 

Và nếu nếu n chia 5 dư 1,2,3,4 thì chia cho 5 dư 1 do đó . Từ đó suy ra .

Vậy  là số nguyên

b)Giả sử tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu. Khi đó, mà



Nói cách khác phương trình (1): có nghiệm với và . Ta xem là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện nhỏ nhất

Từ (1) có . Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 thì chỉ có thể cho số dư là 0,1,2,4 nên khi và chỉ khi ,.

Khi đó (1) trở thành:

Lập luận tương tự dẫn đến 

**Câu 5.**

1. Ta chứng minh kết quả 

Thật vậy, 

, bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Tương tự có 

Thấy các vế của đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức ta được:



1. Gọi là số bút mà học sinh thứ I (trong 32 học sinh) nhận được . Như vậy và . Ta ký hiệu



Với mỗi ta có: 

Xét 128 số gồm:

32 số nhóm 

32 số nhóm (2):

32 số nhóm 

32 số nhóm 

Thấy 128 số này lấy giá trị nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 124 theo nguyên lý Dirichle tồn tại hai số nào đó trong chúng bằng nhau. Vì nên dãy 32 giá trị trong mỗi nhóm ở trên tăng dần kể từ trái qua phải. Suy ra tồn tại mà với và (do hai số bằng nhau thì không cùng nhóm)

Vì nên . Lại có 

Nên hay nghĩa là nhóm gồm các học sinh từ học sinh thứ đến học sinh thứ j nhận được tổng cộng 25 cây bút.