SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN HÀM ẨN, HÀM HỢP
Người biên soạn: Ngô Văn Khánh
Đơn vị công tác:Trường THPT Lý Thái Tổ

I. HỆ THỐNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1. Định nghĩa tích phân

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa:

+ Liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

+ $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Lúc đó hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ được gọi là tích phân từ a đến b và kí hiệu $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$

Chú ý:

+ *a, b* được gọi là 2 cận của tích phân.

+ Tích phân không phụ thuộc và biến số, tức là $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(t\right)dt=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

1.2. Tính chất của tích phân:

+ $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx,\ \left(a<c<b\right)$.

+ $\int\limits_a^b kf\left(x\right)dx=k\int\limits_a^b f\left(x\right)dx,$ với k là hằng số khác 0.

+ $\int\limits_a^b\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\pm\int\limits_a^b g\left(x\right)dx$.

1.3. Các phương pháp tính tích phân:

- Sử dụng bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp
- Sử dụng phương pháp đổi biến số.
- Sử dụng phương pháp tính phân từng phần

4. Một số kết quả đặc biệt

4.1. Tích phân của hàm chẵn, lẻ

 Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và lẻ trên $\left[-a;a\right]$ thì $\int\limits_{-a}^a f\left(x\right).dx=0$.

 Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục và chẵn trên $\left[-a;a\right]$ thì $\begin{cases}\int\limits_{-a}^a f\left(x\right)dx=2\int\limits_0^a f\left(x\right)dx\\ \int\limits_{-a}^a \dfrac{f\left(x\right)}{b^x+1}dx=\int\limits_0^a f\left(x\right)dx\end{cases}$.

4.2. Tích phân của hàm số liên tục

 Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)dx$.

 Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ thì

+ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx$.

+ $\int\limits_a^{\pi-a} xf\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^{\pi-a} f\left(\sin x\right)dx$ và $\int\limits_0^{\pi} x.f\left(\sin x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx$.

+ $\int\limits_a^{2\pi-a} xf\left(\cos x\right)dx = \pi\int\limits_a^{2\pi-a} f\left(\cos x\right)dx$ và $\int\limits_0^{2\pi} x.f\left(\cos x\right)dx = \pi\int\limits_0^{2\pi} f\left(\cos x\right)dx$

$\longrightarrow$ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x =$ cận trên $+$ cận dưới $- t$ $\left(x = a + b - t\right)$. Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int\limits_a^b f\left[u\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ thì ta sẽ đặt $u\left(x\right) = t$

Câu 1. Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$. Khi $x = 1$ thì $t = 1$; $x = 4$ thì $t = 2$.

Suy ra $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f\left(t\right).2\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t = 2.2 = 4$.

Vậy $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$.

Câu 2. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $\left[1;3\right]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_1^3 \left[f\left(x\right) + 3g\left(x\right)\right]\mathrm{dx} = 10$ đồng thời $\int\limits_1^3 \left[2f\left(x\right) - g\left(x\right)\right]\mathrm{dx} = 6$. Tính $\int\limits_1^3 f\left(4 - x\right)\mathrm{dx} + 2\int\limits_1^2 g\left(2x - 1\right)\mathrm{dx}$

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_1^3 \left[f\left(x\right) + 3g\left(x\right)\right]\mathrm{dx} = 10 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{dx} + 3\int\limits_1^3 g\left(x\right)\mathrm{dx} = 10$.

$\int\limits_1^3 \left[2f\left(x\right) - g\left(x\right)\right]\mathrm{dx} = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{dx} - \int\limits_1^3 g\left(x\right)\mathrm{dx} = 6$.

Đặt $u = \int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{dx}$; $\mathrm{v} = \int\limits_1^3 g\left(x\right)\mathrm{dx}$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u + 3v = 10 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{dx} = 4 \\ \int\limits_1^3 g\left(x\right)\mathrm{dx} = 2 \end{cases}$

+ Tính $\int\limits_1^3 f\left(4 - x\right)\mathrm{dx}$

Đặt $t = 4 - x \Rightarrow \mathrm{dt} = -\mathrm{dx}$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

$\int_1^3 f(4-x)\,dx = \int_3^1 f(t)(-dt) = \int_1^3 f(t)\,dt = \int_1^3 f(x)\,dx = 4$.

+ Tính $\int_1^2 g(2x-1)dx$

Đặt $z = 2x-1 \Rightarrow dz = 2dx;\ x=1 \Rightarrow z=1;\ x=2 \Rightarrow z=3$.

$\int_1^2 g(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 g(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_1^3 g(x)\,dx = 1$.

Vậy $\int_1^3 f(4-x)dx + 2\int_1^2 g(2x-1)dx = 6$.

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác đinh $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $f(x^2+3x+1) = x+2$. Tính $I = \int_1^5 f(x)\,dx$

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{527}{3}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{464}{3}$.

Lời giải

$f(x^2+3x+1) = x+2$

$\Leftrightarrow (2x+3) f(x^2+3x+1) = (2x+3)(x+2)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (2x+3) f(x^2+3x+1)\,dx = \int_0^1 (2x+3)(x+2)\,dx = \frac{61}{6}$

Đặt $t = x^2+3x+1 \Rightarrow dt = (2x+3)\,dx$

x	0	1
t	1	5

Suy ra $\int_1^5 f(t)\,dt = \frac{61}{6}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x . f(\sin^2 x)\,dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\,dx = 1$.

Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\,dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x . f(\sin^2 x)\,dx = 1$, $I_2 == \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\,dx = 1$.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x.\cos x dx = 2\sin^2 x.\cot x dx = 2t.\cot x dx$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(t\right).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t\;=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\;=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2I_1=2$

Đặt $t=\sqrt{x}\;\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2=\int\limits_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x\;=\int\limits_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t^2}2t\mathrm{d}t\;=2\int\limits_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\;=2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right)\;=2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}$

Khi đó, ta có: $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x+2, & \text{với } x\geq 3\\ 4x-10, & \text{với } x<3\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(5-4x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{98}{5}$. **B.** $\frac{98}{3}$. **C.** $\frac{49}{12}$. **D.** $\frac{13}{6}$.

Lời giải

* Đặt $t=5-4x\;\Rightarrow\;\mathrm{d}t=-4\mathrm{d}x$.

- Đổi cận: • $x=0\;\Rightarrow\;t=5$

• $x=1\;\Rightarrow\;t=1$.

* $I=\int\limits_0^1 f\left(5-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\limits_5^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_1^5 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\left[\int\limits_1^3\left(4x-10\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^5\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{13}{6}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)dx=8$ và $\int\limits_0^5 f(x)dx=4.$ Tính $\int\limits_{-1}^{1}f(|4x-1|)dx.$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-1}^{1}f(|4x-1|)dx=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}}f(|4x-1|)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}f(|4x-1|)dx$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=I+J.$$

+) Xét $I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$

Đặt $t=1-4x \Rightarrow dt=-4dx;$

Với $x=-1 \Rightarrow t=5; x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0.$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx=\int_{5}^{0} f(t)(-\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(x)dx=1.$$

+) Xét $J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx.$

Đặt $t=4x-1 \Rightarrow dt=4dx;$

Với $x=1 \Rightarrow t=3; x=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t=0.$

$$J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=\int_{0}^{3} f(t)(\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(x)dx=2.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=3.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_{3}^{4} f(x)\,dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_{1}^{4} f(x)\,dx=\int_{1}^{4}\left(\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}\right)dx=\int_{1}^{4}\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{4}\dfrac{\ln x}{x}dx=A+B$.

Xét $B=\int_{1}^{4}\dfrac{\ln x}{x}dx=\int_{1}^{4}\ln x\,d(\ln x)=\left.\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right|_{1}^{4}=\dfrac{(\ln 4)^2}{2}-\dfrac{(\ln 1)^2}{2}=2\ln^2 2$.

Xét $A=\int_{1}^{4}\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x}-1 \Rightarrow dt=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$. Khi đó $A=\int_{1}^{4}\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx=\int_{1}^{3} f(t)\,dt=\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

Vậy $\int_{1}^{4} f(x)\,dx=\left(\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right)+2\ln^2 2 \Rightarrow \int_{1}^{4} f(x)\,dx-\int_{1}^{3} f(x)\,dx=2\ln^2 2 \Rightarrow I=2\ln^2 2$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn

$f(x^2+1)+\dfrac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{2x+1}{2x}.\ln(x+1)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Biết $\int_{1}^{17} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 5-2\ln b+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Giá trị $a+b+2c$ bằng?

A. 7. **B.** $\dfrac{29}{2}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết: $f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{4x\sqrt{x}}=\dfrac{2x+1}{2x}.\ln\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x\,f\left(x^2+1\right)+\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}=\left(2x+1\right).\ln\left(x+1\right),\forall x\in\left(0;+\infty\right)$, lấy tích phân 2 vế ta được:

$\int\limits_1^4 2xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^4\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(2x+1\right).\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$ (1).

+) Xét $M=\int\limits_1^4 2xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.
Đổi cận:

x	1	4
t	2	17

Khi đó $M=\int\limits_2^{17}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_2^{17}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ (2).

+) Xét $N=\int\limits_1^4\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.

Đổi cận:

x	1	4
t	1	2

Khi đó $N=\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ (3).

+) Xét $P=\int\limits_1^4\left(2x+1\right).\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+1\right)\\ \mathrm{d}v=\left(2x+1\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ v=x^2+x=x\left(x+1\right)\end{cases}$.

Khi đó $P=\left(x^2+x\right)\ln\left(x+1\right)\Big|_1^4-\int\limits_1^4 x\mathrm{d}x=\left[\left(x^2+x\right)\ln\left(x+1\right)-\dfrac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^4=20\ln 5-2\ln 2-\dfrac{15}{2}$ (4).

Thế (2), (3), (4) vào (1) được: $\int\limits_2^{17}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=20\ln 5-2\ln 2-\dfrac{15}{2}$

$\Leftrightarrow\int\limits_1^{17}f\left(x\right)\mathrm{d}x=20\ln 5-2\ln 2-\dfrac{15}{2}$.

Kết hợp giả thiết ta suy ra được: $a=20$; $b=2$; $c=-\dfrac{15}{2}$ $\Rightarrow a+b+2c=7$.

Vậy $a+b+2c=7$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$ ta sẽ đặt $\begin{cases} u=g(x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

Câu 9. (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=144$. **D.** $I=28$

Lời giải

Đặt $u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \Rightarrow v=2f\left(\frac{x}{2}\right)$

$$I=\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^4-\int_0^4 2f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=8f(2)-\int_0^4 2f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

Tính $I_1=\int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=\frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$, khi đó $I_1=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x==8$

Vậy $I=128-16=112$.

Câu 11.(HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. $I=20$ **B.** $I=7$ **C.** $I=12$ **D.** $I=13$

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^1 xf'(2x)dx=\frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{1}{2}f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)$

$I=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}.16-\frac{1}{4}.4=7$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$.

Lời giải

Thay $x=0$ vào biểu thức ta được:

$$f(0)+f(2-0)=2 \Rightarrow f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1.$$

Ta có: $I_1=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0 \Rightarrow t=2;\ x=2 \Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I_1=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0 f(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\int\limits_0^2 f(\mathrm{t})\mathrm{dt}=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Mà: $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

Ta có: $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Suy ra: $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{-10}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{-10}{3}$.

• **Lưu ý :** Ta có thể sử dụng tính chất $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{a}{b}$ (với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=3a-b$.

A. $T=0$. **B.** $T=-48$. **C.** $T=16$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.\mathrm{d}f(x)=I=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (1)

Theo giả thiết: $5f(x)-7f(1-x)=3\left(x^2-2x\right) \Rightarrow \int\limits_0^1\left[5f(x)-7f(1-x)\right]\mathrm{d}x=3\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 5\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-7\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=3\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow 5\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-7\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-2$. (2)

Bằng cách đổi biến $t=1-x$, ta có $\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. (3)

Thay (3) vào (2), ta có $5\int_0^1 f(x)dx-7\int_0^1 f(x)dx=-2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=1$.

Mặt khác do $5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x)$ nên lần lượt chọn $x=0, x=1$ ta có

$\begin{cases}5f(0)-7f(1)=0\\5f(1)-7f(0)=-3\end{cases} \Rightarrow f(1)=\frac{5}{8}$.

Thay $f(1)=\frac{5}{8}$ và $\int_0^1 f(x)dx=1$ vào (1) ta có $I=f(1)-\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{8}-1=-\frac{3}{8}$.

Vậy $a=3; b=8 \Rightarrow T=3a-b=9-8=1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=1$;

$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Lời giải

- Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=1$, đặt $t=\cos^2 x$. Khi đó $x=0 \Rightarrow t=1, x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2}$;

$\tan x dx=\frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}dx=\frac{-1}{2}.\frac{dt}{t}$. Do vậy $I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}$. Suy ra $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}=2I_1=2$.

- Xét $I_2=\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$, đặt $t=\ln^2 x$. Khi đó $x=e \Rightarrow t=1; x=e^2 \Rightarrow t=4$;

$\frac{dx}{x.\ln x}=\frac{1}{2}.\frac{dt}{t}$. Do vậy $I_2=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt$. Suy ra $\int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt=2I_2=2$.

- Xét $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$, đặt $t=2x$. Khi đó $x=\frac{1}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2}, x=2 \Rightarrow t=4$; $\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}$. Do vậy

$I=\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt+\int_1^4 \frac{f(t)}{t}dt=2+2=4$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+4x)=-2x^2-7x+1$ $,\forall x\in[0;+\infty)$. Biết $f(5)=-8$. Tính $I=\int_0^5 xf'(x)dx$?

A. $I=-\frac{68}{3}$. **B.** $I=-\frac{35}{3}$. **C.** $I=-\frac{52}{3}$. **D.** $I=-\frac{62}{3}$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^5 xf'(x)dx=\int_0^5 xd(f(x))=xf(x)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)dx=-40-\int_0^5 f(x)dx$.

Ta có $f(x^2+4x)=-2x^2-7x+1 \Leftrightarrow f(x^2+4x)(2x+4)=(-2x^2-7x+1)(2x+4), \forall x\in[0;+\infty)$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x^2+4x)(2x+4)dx=\int_0^1 (-4x^3-22x^2-26x+4)dx=-\frac{52}{3}$.

Đặt $t=x^2+4x \Rightarrow dt=(2x+4)dx$

Khi $x=0 \Rightarrow t=0$,khi $x=1 \Rightarrow t=5$

$\int_0^1 f(x^2+4x)(2x+4)dx=-\frac{52}{3} \Leftrightarrow \int_0^5 f(t)dt=-\frac{52}{3} \Rightarrow \int_0^5 f(x)dx=-\frac{52}{3}$

Suy ra $I=\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^5 x\mathrm{d}\left(f(x)\right)==-40+\frac{52}{3}=-\frac{68}{3}$.

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}}\ln 3x.f'\left(3x\right)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$. **B.** $\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **C.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **D.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$.

Lời giải

Ta có: $2f\left(x\right)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$ (1)

$\Leftrightarrow 2\frac{f\left(x\right)}{x}+5\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}=3,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}dx+5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}3dx=\frac{9}{5}$ (2)

Xét $I_1=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx$ đặt $u=\frac{2}{5x}\Rightarrow du=-\frac{2}{5x^2}dx\Rightarrow -\frac{2}{5}\frac{du}{u^2}=dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{2}{5}\Rightarrow u=1 \\ x=1\Rightarrow u=\frac{2}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1=-5\int\limits_{1}^{\frac{2}{5}}\frac{f\left(u\right)}{u}du=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(u\right)}{u}du=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}dx$

Từ (2) suy ra, $2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}dx+5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\frac{9}{35}$

Tính $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}}\ln 3x.f'\left(3x\right)dx$.

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx\Rightarrow\frac{1}{3}dt=dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{2}{15}\Rightarrow t=\frac{2}{5} \\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=1 \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\ln t.f'(t)dt$

Đặt: $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=f'(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{t}dt\\ v=f(t)\end{cases}$

$I=\frac{1}{3}(\ln t.f(t))\Big|_{\frac{2}{5}}^{1}-\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}.f(\frac{2}{5})-\frac{3}{35}$

Tính $2f(x)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$

Cho $x=1;x=\frac{2}{5}$ vào (1) ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases}2f(1)+5f\left(\frac{2}{5}\right)=3\\ 2f\left(\frac{2}{5}\right)+5f(1)=\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=0\\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}\end{cases}$

Suy ra, $I=-\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\ln\frac{2}{5}-\frac{3}{35}=\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$.

Câu 17. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -9.

Lời giải

Đặt $t=3x\Rightarrow\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Suy ra $1=\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=9$.

Đặt $\begin{cases}u=f(t)\\ \mathrm{d}v=t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(t)\mathrm{d}t\\ v=\frac{t^2}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow\int\limits_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3-\int\limits_0^3\frac{t^2}{2}f'(t)\mathrm{d}t=\frac{9}{2}f(3)-\frac{1}{2}\int\limits_0^3 t^2f'(t)\mathrm{d}t$.

$\Leftrightarrow 9=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_0^3 t^2f'(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_0^3 t^2f'(t)\mathrm{d}t=-9$.

Vậy $\int\limits_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x=-9$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$; $f(3-x).f(x)=1, f(x)\neq-1$ với mọi

$x\in[0;3]$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân: $\displaystyle\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

$(1+f(3-x))^2.f^2(x)=f^2(x)+2.f(3-x).f^2(x)+f^2(3-x).f^2(x)$

$=f^2(x)+2.f(x)+1=(f(x)+1)^2$.

$$I=\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{(1+f(x))^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{f'(x)}{(1+f(x))^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{1+f(x)} \end{cases}$

$$I=\left.\frac{-x}{1+f(x)}\right|_0^3+\int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)}=\frac{-3}{1+f(3)}+I_1$$

$f(0)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(3)=2$

Đặt $t=3-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$

$x=3\Rightarrow t=0$

$$I_1=\int_0^3 \frac{dt}{1+f(3-t)}=\int_0^3 \frac{dx}{1+\dfrac{1}{f(x)}}=\int_0^3 \frac{f(x).dx}{1+f(x)}$$

$$2I_1=\int_0^3 \frac{1+f(x)}{1+f(x)}dx=3\Rightarrow I_1=\frac{3}{2}$$

Vậy $I=-1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 1.3. Bài toán với điều kiện hàm ẩn có dạng:

1) $f'(x)=g(x).h(f(x))$

2) $f'(x).h(f(x))=g(x)$

Phương pháp giải:

1) $f'(x)=g(x).h(f(x))\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{h(f(x))}=g(x)\Rightarrow \displaystyle\int \frac{d(f(x))}{h(f(x))}=\int g(x)dx\Rightarrow \dots$

2) $f'(x).h(f(x))=g(x)\Rightarrow \displaystyle\int h(f(x))df(x)=\int g(x)dx\Rightarrow \dots$

Câu 19. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$ **B.** $-\dfrac{71}{20}$ **C.** $-\dfrac{79}{20}$ **D.** $-\dfrac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow \displaystyle\int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{15}{4}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{4}{5}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3,\forall x\in[2;4], f(2)=\dfrac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\dfrac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0,\forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3\Leftrightarrow x^3[4f(x)+1]=[f'(x)]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}dx=\int xdx\Leftrightarrow\frac{1}{4}\int\frac{d[4f(x)+1]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\frac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow\frac{3}{8}\sqrt[3]{[4f(x)+1]^2}=\frac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}(x^2-1)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...f(2020)$ bằng

A. $-\dfrac{2015}{2019}$. **B.** $-\dfrac{2020}{2021}$. **C.** $-\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2016}{2021}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$

$\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C$

Mặt khác: $f(1)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=1+1+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

Do đó: $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\Rightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{2020}f(n)=-\sum_{n=1}^{2020}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2021}\right)=-\frac{2020}{2021}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ dương, liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f'(x)=3x^2[f(x)+1],\forall x\in[1;2]$ và $f(1)=2$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $3e^7$. **B.** $3e^7+1$. **C.** $3e^7-1$. **D.** e^7.

Lời giải

Do $f'(x)$ dương trên đoạn $[1;2]$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$,

$\Rightarrow f(2)\ge f(x)\ge f(1)=2,\forall x\in[1;2]\Rightarrow\begin{cases}f(x)+1\ne 0\\ f(2)>0\end{cases},\forall x\in[1;2]$. Do đó

$f'(x)=3x^2\left[f(x)+1\right],\forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)+1}=3x^2,\forall x\in[1;2].$

Dễ thấy cả hai vế đều là các hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Lấy tích phân từ 1 đến 2 hai vế, ta được

$\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 3x^2\mathrm{d}x=7$.

Đặt $t=f(x)+1\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=f(1)+1=3; x=2\Rightarrow t=f(2)+1>0$, ta có

$$\int\limits_3^{f(2)+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_3^{f(2)+1}=\ln\frac{f(2)+1}{3}=7\Rightarrow f(2)=3e^7-1.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\dfrac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)'$

Do đó $\dfrac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}=1\Rightarrow\int\dfrac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}dx=\int 1dx\Rightarrow -\dfrac{1}{xf(x)+1}=x+c$

$\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+c}$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+c}\Rightarrow c=0\Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(-\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Dạng 1.4. Bài toán với điều kiện hàm ẩn có dạng:

$A.f(x)+B.u'(x)f(u(x))+C.f(a+b-x)=g(x)$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=-1$ và $xf(1-x^3)+f'(x)=x^7+x-2,x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{-5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Lời giải

Cách 1: PP tự luận:

Từ $xf(1-x^3)+f'(x)=x^7+x-2,x\in\mathbb{R}$ suy ra $x^2f(1-x^3)+xf'(x)=x^8+x^2-2x,x\in\mathbb{R}$

Do đó $\int_0^1 x^2 f\left(1-x^3\right)dx+\int_0^1 xf'\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)dx$.

Đặt $t=1-x^3$ ta có $dt=-3x^2dx$ do đó ta được

$$\int_0^1 x^2 f\left(1-x^3\right)dx=-\frac{1}{3}\int_1^0 f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x\right)dx.$$

Vậy ta có $\int_0^1 x^2 f\left(1-x^3\right)dx+\int_0^1 xf'\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_0^1 xf'\left(x\right)dx=\frac{-5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x\right)dx+\left(xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(x\right)dx\right)=\frac{-5}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{3}\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\frac{5}{9}-\left[f\left(1\right)-0.f\left(0\right)\right]=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{-2}{3}.$$

Vậy $I=\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\frac{2}{3}$.

Cách 2: PP chọn hàm đại diện

Từ đẳng thức $xf\left(1-x^3\right)+f'\left(x\right)=x^7+x-2, x\in\mathbb{R}$ suy ra chọn đặt hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số bậc 2 dạng $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Ta có $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7+x-2$.

Do đó $x\left[a\left(1-x^3\right)^2+b\left(1-x^3\right)+c\right]+2ax+b=x^7+x-2$

$$\Leftrightarrow x\left[ax^6-\left(2a+b\right)x^3+\left(a+b+c\right)\right]+2ax+b=x^7+x-2$$

$$\Leftrightarrow ax^7-\left(2a+b\right)x^4+\left(3a+b+c\right)x+b=x^7+x-2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\3a+b+c=1\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=0\end{cases}.$$

Do vậy $f(x)=x^2-2x$ thỏa mãn $f(1)=-1$, từ đó ta có $I=\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x^2-2x\right)dx=\frac{-2}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(1\right)=1$ và $f\left(2x\right)-xf\left(x^2\right)=5x-2x^3-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ Tính tích phân $I=\int_1^2 xf'\left(x\right)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=5$.

Lờigiải

Ta có: $I=\int_1^2 xf'\left(x\right)dx=\int_1^2 x\,d\left(f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right)\Big|_1^2-\int_1^2 f\left(x\right)dx.$

Từ giả thiết $f\left(2x\right)-xf\left(x^2\right)=5x-2x^3-1\Rightarrow\int_0^1 f\left(2x\right)dx-\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx=\int_0^1\left(5x-2x^3-1\right)dx=1.$

Đặt $K=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$. Đổi biến $t=2x \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow K=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $L=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x$. Đổi biến $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow L=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)=1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Từ giả thiết $f(2x)-xf(x^2)=5x-2x^3-1$ ta suy ra $f(2)=3$.

Như vậy: $I=xf(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2.f(2)-1.f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2.3-1.1-2=3$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $xf(1-x^3)+f'(x)=x^7-2x^4+3x-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{13}{12}$.

Lời giải

$xf(1-x^3)+f'(x)=x^7-2x^4+3x-1 \Leftrightarrow x^2f(1-x^3)+xf'(x)=x^8-2x^5+3x^2-x$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[x^2f(1-x^3)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^8-2x^5+3x^2-x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[x^2f(1-x^3)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left[xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{x^9}{9}-2\frac{x^6}{6}+x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[x^2f(1-x^3)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left[xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{5}{18} \quad (*)$

+) Tính $I_1=\int_0^1\left[x^2f(1-x^3)\right]\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t=-3x^2\mathrm{d}x$

Đổi cận

x	0	1
t	1	0

$I_1=\int_0^1\left[x^2f(1-x^3)\right]\mathrm{d}x=\int_1^0\left[f(t)\right]\left(-\frac{1}{3}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

+) Tính $I_2=\int_0^1\left[xf'(x)\right]\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

$I_2=\int_0^1\left[xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\left(xf(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{18} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{13}{18}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{12}$

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

$f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow f(x)=8x^3f(x^4)-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

$I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\quad(1)$

Xét $\int\limits_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2f(x^4)d(x^4)=2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2I$

Xét $\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{(t^2-1)t\mathrm{d}t}{t}=\left.\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1)\Rightarrow I=2I-\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow I=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$.

Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{35}{6}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $-\dfrac{7}{24}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3$

$\Rightarrow x^4f(x^5)+x^3f(1-x^4)=x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\quad(*)$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 x^4f(x^5)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^3f(1-x^4)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x^5)\mathrm{d}(x^5)-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 f(1-x^4)\mathrm{d}(1-x^4)=\dfrac{33}{40}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{33}{40}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{11}{6}$

Mặt khác : $(*)\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 x^4f(x^5)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 x^3f(1-x^4)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{5}\int_{-1}^{0} f\left(x^5\right)\mathrm{d}\left(x^5\right) - \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}\left(1-x^4\right) = -\frac{7}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{5}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{24} \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 5\left(-\frac{7}{24}+\frac{1}{4}.\frac{11}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Lấy tích phân hai vế, ta có $\int_0^1\left[4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \;\; (*)$.

Xét tích phân $J=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Khi đó, ta có

$$J=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Xét tích phân $K=\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$K=\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Xét tích phân $L=\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$L=\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x=3\int_1^0 f(t)(-\mathrm{d}t)=3\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Dạng 1.5. Bài toán biến đổi giả thiết về đạo hàm của một tổng – hiệu; tích – thương.

Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Bài toán 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$

(Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ (1). Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ $(a,\ b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $2(a^2+b^2)$

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Xét trên đoạn $[1;2]$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(x+1)^2$, ta được:

$\frac{x}{x+1}\cdot f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\cdot f(x)=\frac{x}{x+1}$ $\Rightarrow\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow\int\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{x}{x+1}\cdot f(x)+C_1=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ $\Rightarrow\frac{x}{x+1}\cdot f(x)=x-\ln|x+1|+C$ (2).

Theo giả thiết, $f(1)=-2\ln 2$ nên thay $x=1$ vào phương trình (2), ta được:

$\frac{1}{2}f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow-\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Thay $x=2$ vào (2), ta được:

$\frac{2}{3}f(2)=2-\ln 3-1\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$ $\Rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}$. Vậy $2(a^2+b^2)=9$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

$f(0)=-2$ và $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=-\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=-\frac{5}{2}$.

Lời giải

- Theo giả thiết: $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}.f'(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{x^2+1}.f(x)\right]'=\left(-\sqrt{x^2+1}\right)'$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}+C$.

- $f(0)=-2\Rightarrow\sqrt{1}.f(0)=-\sqrt{1}+C\Rightarrow C=-1$.
- $\sqrt{x^2+1}.f(x)=-\sqrt{x^2+1}-1$ $\Rightarrow f(x)=-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Khi đó:

$$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left[-x-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x^2+1}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{3+1}\right)-(-0-1)=-\frac{5}{2}$$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện: $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(11;12)$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\cos x\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\cos x+c$$

$$\Rightarrow f(x)=\cos x+cx$$

Khi đó:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+cx)\sin x dx=-4$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\sin x dx+c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin x dx=-4 \Leftrightarrow 0+c(-2)=-4 \Leftrightarrow c=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\cos x+2x \;\Rightarrow f(\pi)=2\pi-1\in(5;6).$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(4;+\infty)$ và thỏa mãn đẳng thức $f(x)+(x^2-7x+12)f'(x)=\dfrac{(x^3-6x^2+9x)}{\sqrt{x^2+9}}$ với mọi $x\in(4;+\infty)$. Giá trị $f(5)$ của bằng

A. $f(5)=\sqrt{34}-5$. **B.** $f(5)=2\sqrt{34}+10$.

C. $f(5)=2\sqrt{34}-10$. **D.** $f(5)=\sqrt{34}+5$.

Lời giải

Ta có

$$f(x)+(x^2-7x+12)f'(x)=\frac{(x^3-6x^2+9x)}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+(x-3)(x-4)f'(x)=\frac{x(x-3)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2}.f(x)+\frac{x-4}{x-3}.f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x-4}{x-3}.f(x)\right]'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \frac{x-4}{x-3}.f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+C \quad (*)$$

Vì hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục với mọi $x\in(4;+\infty)$ và thỏa mãn $(*)$ vớ i $x\in(4;+\infty)$ nên ta thay $x=4$ vào $(*)$ ta được $C=-5$.

Suy ra $\dfrac{x-4}{x-3}.f(x)=\sqrt{x^2+9}-5 \;\Rightarrow \dfrac{1}{2}f(5)=\sqrt{34}-5 \Rightarrow f(5)=2\sqrt{34}-10.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=3x^2-2x+4$. Biết $f(1)=0$. Tính $\left[f(3)\right]^2$

A. $\dfrac{116}{3}$. **B.** $\dfrac{58}{3}$. **C.** 58. **D.** 116.

Lời giải

Ta có $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=3x^2-2x+4$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x)+f(x).\left[f'(x)\right]'=3x^2-2x+4$

$\Leftrightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=3x^2-2x+4$

$\Rightarrow f(x).f'(x)=\int\left(3x^2-2x+4\right)dx$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=x^3-x^2+4x+C$

Vì $f(1)=0$ nên $f(1).f'(1)=1^3-1^2+4+C=0\Rightarrow C=-4$.

Vậy $f(x).f'(x)=x^3-x^2+4x-4$

Khi đó

$\int\limits_1^3 f(x).f'(x)dx=\int\limits_1^3\left(x^3-x^2+4x-4\right)dx$

$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)d\left(f(x)\right)=\frac{58}{3}$

$\Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^3=\frac{58}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{f^2(3)}{2}-\frac{f^2(1)}{2}=\frac{58}{3}$

$\Rightarrow f^2(3)=\frac{116}{3}$

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2. **B.** $e^{\frac{3}{2}}$. **C.** e^3. **D.** $e^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2]\Rightarrow f(x)\ge f(0)=1>0$ do đó $f(x)>0\quad \forall x\in[0;2]$.

Ta có $\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo đề bài $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$

$\Rightarrow f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2=\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=1$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=x+C\Rightarrow\int\limits_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\limits_0^2(x+C)dx\Rightarrow\int\limits_0^2\frac{1}{f(x)}d\left(f(x)\right)=\left.\left(\frac{x^2}{2}+Cx\right)\right|_0^2$

$\Rightarrow \ln\left|f(x)\right|\Big|_0^2=2+2C\Rightarrow\ln\left|e^6\right|-\ln|1|=2+2C\Rightarrow C=2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=x+2$.

Do đó $\ln f(x)\Big|_0^1=\left.\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_0^1\Rightarrow\ln f(1)=\frac{5}{2}\Rightarrow f(1)=e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$,

$\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x+\left(x^2-1\right).f'(x)+2x.f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right).f(x)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)+C\ \ (1)$.

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-1+\left(x^2-1\right).f(x)$

$\Leftrightarrow \left[f(x)-1\right].\left[f(x)+1\right]=\left(x^2-1\right).\left[f(x)+1\right]$

$\Leftrightarrow f(x)-1=x^2-1$ (vì $f(x)\ge 0\Rightarrow f(x)+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$)

$\Leftrightarrow f(x)=x^2$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=\mathrm{e}^2$ và $2\sin 2x\left[f(x)+\mathrm{e}^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

$2\sin 2x\left[f(x)+\mathrm{e}^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x.f(x)+2\sin 2x.\mathrm{e}^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}+f'(x)=0\ \ (1)$

. Do hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên chia hai vế phương trình (1) cho $2\sqrt{f(x)}$ ta được $\sin 2x.\sqrt{f(x)}+\sin 2x.\mathrm{e}^{\cos 2x}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=0\ \ (2)$.

Nhân hai vế của phương trình (2) với $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}$ ta được:

$\sin 2x.\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}=-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right)'=-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\int\left(-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\right)\mathrm{dx}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}+C\ \ (3)$.

Trong đẳng thức (3) cho $x=0$ ta được $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{f(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\mathrm{e}^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow C=0$.

$(3)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\cos 2x}\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2\cos 2x}$

$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{e}^{2\cos\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\simeq 0.367\in(0;1)$.

Dạng 1.6. Biến đổi về dạng bình phương

Câu 38. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Lời giải

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]dx=-\frac{109}{12}.\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(f(x)-(3-x)\right)^2-(3-x)^2\right]dx=-\frac{109}{12}$

$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2dx=-\frac{109}{12}$.

Mà $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(9-6x+x^2\right)dx=\left(9x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{109}{12}$

Suy ra $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-(3-x)\right)^2dx=0$.

Vì $\left[f(x)-(3-x)\right]^2\geq0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ nên $f(x)=3-x$, $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x+2}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)dx$

$=\left(-\ln|x+1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{9}$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin2x)dx$

$=\left(x+\frac{1}{2}\cos2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}$.

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3f(x)}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1.f(1)-0.f(0)}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ (1).

$\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{x^7}{7}\Big|_0^1=\frac{1}{7}\Rightarrow\int_0^1 49x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}.49=7$ (2).

$\int_0^1 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=-14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+\int_0^1 49x^6\mathrm{d}x+\int_0^1 14x^3.f'(x)\mathrm{d}x=7+7-14=0$.

$\Rightarrow\int_0^1\left\{\left[f'(x)\right]^2+14x^3f'(x)+49x^6\right\}\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\geq0\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x\geq0$. Mà $\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)=-7x^3$.

$f\left(x\right)=-\frac{7x^4}{4}+C$. Mà $f\left(1\right)=0\Rightarrow -\frac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}$.

Do đó $f\left(x\right)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\frac{7}{5}$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$7=7\left(\int\limits_0^1 x^3f'\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\le 7\left(\int\limits_0^1\left(x^3\right)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x\right)=7\cdot\frac{1}{7}\cdot\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'\left(x\right)=ax^3$, với $a\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3.ax^3\mathrm{d}x=-1\Rightarrow\left.\frac{ax^7}{7}\right|_0^1=-1\Rightarrow a=-7$.

Suy ra $f'\left(x\right)=-7x^3\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f\left(1\right)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$

Do đó $f\left(x\right)=\frac{7}{4}\left(1-x^4\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{7x^5}{20}+\frac{7}{4}x\right)\right|_0^1=\frac{7}{5}$.

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Khi đó, ta có $\left(\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)$.

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

Nếu hàm số $h\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\int\limits_a^b h\left(x\right)\mathrm{d}x\ge 0$

Xét tam thức bậc hai $\left[\lambda f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]^2=\lambda^2f^2\left(x\right)+2\lambda f\left(x\right)g\left(x\right)+g^2\left(x\right)\ge 0$, với mọi $\lambda\in\mathbb{R}$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta được

$$\lambda^2\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x+2\lambda\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{g}\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\ge 0\text{, với mọi }\lambda\in\mathbb{R}\qquad(*)$$

Coi $(*)$ là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta'\le 0$

$$\Leftrightarrow\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\text{ (đpcm)}$$

Câu 41. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\cos\left(\pi x\right) \\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x \\ v=f\left(x\right) \end{cases}$. Khi đó:

$$\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\cos\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\cos\left(\pi x\right)f\left(x\right)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(f\left(1\right)+f\left(0\right)\right)+\pi\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-k\sin\left(\pi x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x-2k\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x+k^2\int\limits_0^1\sin^2\left(\pi x\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1.$$

Do đó $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-\sin\left(\pi x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)$. Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g^2\left(x\right)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f\left(x\right)=kg\left(x\right),\forall x\in\left[a;b\right]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x\right]^2\le\int\limits_0^1 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x.\int\limits_0^1\sin^2\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f\left(x\right)=k\sin\left(\pi x\right)$.

Mà $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int\limits_0^1\sin^2\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sin\left(\pi x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$; $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$ và

$\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x^2-x \end{cases}$.

Suy ra $\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$

Ta có: $\int_0^1 (x^2-x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)\,\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{1}{30}$.

Do đó, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (x^2-x)^2\,\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)-(x^2-x)\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)=x^2-x \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+x\right)\right|_0^1=\frac{11}{12}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Lời giải

Đặt $u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=(x-1)^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3}=\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\right|_1^2-\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3}f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6\,\mathrm{d}x=7 \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 49(x-1)^6\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \int_1^2\left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

$(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx + \int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx = \int_0^1 \left(40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4\right)dx.$ (1)

Xét $I = \int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx = \int_0^1 \left(24x^2-4\right)f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \left(24x^2-4\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \left(8x^3-4x\right).f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(8x^3-4x\right).f'(x)dx = 4 - 2\int_0^1 \left(4x^3-2x\right).f'(x)dx.$

Do đó:

$(1) \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx - 2\int_0^1 \left(4x^3-2x\right).f'(x)dx + \int_0^1 \left(4x^3-2x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8\right)dx.$

$\Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - \left(4x^3-2x\right)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1.$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x^4 - x^2 + 1\right)dx = \frac{13}{15}.$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1) = 0$, $\left(f'(x)\right)^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{14}{3}$.

Lời giải

Đặt $I = \int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x$.

Dùng tích phân từng phần, ta có: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = 2x - 4 \end{cases}$.

$I = (2x-4)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x = -\int_1^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $\left(f'(x)\right)^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28 \Rightarrow \int_1^2 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x + 2\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x$

$= \int_1^2 \left(8x^2 - 32x + 28\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 2\int_1^2 (2x-4)f'(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-4)^2 \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(8x^2 - 32x + 28\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-4)^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_1^2 \left[f'(x) - (2x-4)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Hay $I = -\frac{1}{2}\int_0^3 \left(6x^2 - 18x\right).\left(2x^2 - 6x\right)\mathrm{d}x = -\frac{243}{5}$

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2=4\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)=2$. Tính $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right).\mathrm{d}x$

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\left[f'\left(x\right)\right]^2=4\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]\Rightarrow\left[f'\left(x\right)\right]^2+4f\left(x\right)=8x^2+4\quad(*)$.

Lấy tích phân hai vế của biểu thức $(*)$ ta được

$$\int\limits_0^1\left(\left[f'\left(x\right)\right]^2+4f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(8x^2+4\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+4\left(xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x\right)=\frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-4\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-4\int\limits_0^1 x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 4x^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)-2x\right]^2\mathrm{d}x=0$$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=2x\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+C.$

Vì $f\left(1\right)=2\Rightarrow C=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+1$.

Vậy $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right).\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.\left(x^2+1\right).\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

III. HỆ THỐNG CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Một sô câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. **(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'\left(x\right)=\frac{2}{2x-1}$, $f\left(0\right)=1$ và $f\left(1\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f\left(-1\right)+f\left(3\right)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=9$. **D.** $I=2$.

Câu 3: **(Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(2\right)=-\frac{1}{3}$ và $f'\left(x\right)=x\left[f\left(x\right)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(1\right)$ bằng .

A. $-\frac{11}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

Câu 4: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f'\left(x\right)=\sin x$ với mọi x và $f\left(0\right)=1$. Tính $\mathrm{e}^{\pi}.f\left(\pi\right)$.

A. $\frac{e^{\pi}-1}{2}$.   **B.** $\frac{e^{\pi}-1}{2}$.   **C.** $\frac{e^{\pi}+3}{2}$.   **D.** $\frac{\pi+1}{2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$.   **B.** $I=\frac{7}{2}$.   **C.** $I=\frac{9}{2}$.   **D.** $I=\frac{11}{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2x^3 & \text{khi } x>-2\\ -3x-28 & \text{khi } x\le -2\end{cases}$. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(-1+2\sin 2x).\cos 2x.dx$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.   **B.** $-\frac{1}{4}$.   **C.** $\frac{47}{8}$.   D $\frac{-61}{12}$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $e^x f'(e^x)=1+e^x$. Khi đó $\int_1^e f(x)dx$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{2}$.   **B.** $\frac{3e^2-2}{2}$.   **C.** $\frac{e^2+1}{2}$.   **D.** $\frac{e^2}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0.   **B.** 1.   **C.** 4.   **D.** 8.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{3}$.   **B.** $I=4$.   **C.** $I=\frac{3}{2}$.   **D.** $I=6$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$.   **B.** $\frac{1}{4}$.   **C.** $\frac{\pi}{4}$.   **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{16}{3}$.   **B.** $I=-\frac{16}{5}$.   **C.** $I=-\frac{14}{3}$.   **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$, tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2-\mathrm{e}$ **B.** $I = \mathrm{e}-2$ **C.** $I = \frac{\mathrm{e}}{2}$ **D.** $I = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$, thỏa mãn $f(2)=6$ và $f(x) = (x-1)f'(x) + 2x^3 - 3x^2 + 1, \forall x \in (1;+\infty)$. Tính $f\left(\sqrt{2}\right)$.

A. 1. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** -1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x) + x = \int\limits_0^2 \left[f(x) - x\right]\mathrm{d}x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xác định giá trị m để $\int\limits_0^2 \left[mx + f(x)\right]\mathrm{d}x = 0$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -3$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x^2 f\left(x^3\right) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$.

Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{20}$. **C.** $\frac{\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 3$ và $\frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}\right)f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x), \forall x > 0$. Tính $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $6 - 2\ln 2$. **B.** $6 + 4\ln 2$. **C.** $6 + 2\ln 2$. **D.** $8 + 4\ln 2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$f'(x)\sin x = (1 - f(x))\cos x$ với mọi số thực x. Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. -1. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19. hàm số $f(x)$ có đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, thỏa mãn $x^2 + 4x^2 f(x) = \left[f'(x)\right]^2, \forall x \in [1;3]$, $f(2) = 2$. Tính $I = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{20}{3}$. **B.** $\frac{233}{30}$. **C.** $\frac{117}{15}$. **D.** $\frac{23}{3}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left(x^3 + x\right)f\left(x^3\right) + \left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right) = 4x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

2. Hướng dẫn giải

Câu 1. **(Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

+ Xét trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ta có $f(0)=1$, suy ra $C=1$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1)=1+\ln 3$.

+ Xét trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $f(1)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(3)=2+\ln 5$.

Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=9$. **D.** $I=2$.

Lời giải

- Xét $I=\int_1^{16}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=6$, đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$

  Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=16\Rightarrow t=4$

  $I=2\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=6\ \Rightarrow\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=\frac{6}{2}=3$.

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=3$, đặt $\sin x=u\Rightarrow\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$

  Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$

  $J=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=3$

Vậy $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3+3=6$.

Câu 3: (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng .

A. $-\frac{11}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x$.

Do đó $\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int xdx\Leftrightarrow-\int d\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\int xdx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}x^2+C\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+C}$

Theo giả thiết $f(2)=-\frac{1}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}$

Từ đó suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\sin x$ với mọi x và $f(0)=1$. Tính $\mathrm{e}^{\pi}.f(\pi)$.

A. $\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2}$. **C.** $\frac{\mathrm{e}^{\pi}+3}{2}$. **D.** $\frac{\pi+1}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x)+f'(x)=\sin x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên suy ra $\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)=\mathrm{e}^x.\sin x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]' = e^x.\sin x \text{ hay } \int_0^\pi \left[e^x f(x)\right]' dx = \int_0^\pi e^x.\sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x)\right]\Big|_0^\pi \Leftrightarrow e^\pi f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right) \Leftrightarrow e^\pi f(\pi) = \frac{e^\pi + 3}{2}.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{9}{2}$. **D.** $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Dùng tính chất để tính nhanh

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a+b-x) = f(x), \forall x[a;b]$. Khi đó $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

Chứng minh:

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow dx = -dt$, với $x \in [a;b]$. Đổi cận: khi $x = a \Rightarrow t = b$; khi $x = b \Rightarrow t = b$

Ta có $\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xf(a+b-x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt$

$$= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt = (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt = (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}.$$

Áp dụng tính chất trên với $a = 1$, $b = 3$.

$f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(1+3-x) = f(x)$.

Khi đó $\int_1^3 xf(x)dx = \frac{1+3}{4}\int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp:

Đặt $t = 4-x$, với $x \in [1;3]$.

Ta có $\int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4\int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 t.f(t)dt$

$$\Rightarrow 5 = 4\int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2x^3 & \text{khi } x > -2 \\ -3x - 28 & \text{khi } x \le -2 \end{cases}$. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(-1+2\sin 2x).\cos 2x.dx$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{47}{8}$. **D.** $-\frac{61}{12}$.

Lời giải

Đặt $u = -1 + 2\sin 2x \Rightarrow du = 4\cos 2x.dx \Rightarrow \cos 2x.dx = \frac{du}{4}$.

Với $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow u = -3$.

Với $x = 0 \Rightarrow u = -1$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(-1+2\sin 2x).\cos 2x.dx = \int_{-3}^{-1} f(u).\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\left(\int_{-3}^{-2} f(u).du + \int_{-2}^{-1} f(u).du\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-3}^{-2} (-3u-28).du + \int_{-2}^{-1} (3u+2u^3).du\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{41}{2}+\frac{1}{6}\right) = -\frac{61}{12}.$$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $e^x f'(e^x)=1+e^x$. Khi đó $\int_1^e f(x)dx$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{2}$.　　**B.** $\frac{3e^2-2}{2}$.　　**C.** $\frac{e^2+1}{2}$.　　**D.** $\frac{e^2}{2}$.

Lời giải

Ta có: $e^x f'(e^x)=1+e^x \Leftrightarrow f'(e^x)=\frac{1+e^x}{e^x}=1+\frac{1}{e^x} \Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow f(x)=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = x+\ln x + C, \quad \forall x\in(0;+\infty)$

Do $f(1)=1 \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow f(x)=x+\ln x$.

Ta có: $I=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e (x+\ln x)dx=\int_1^e xdx+\int_1^e \ln xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e+\int_1^e \ln xdx=\frac{e^2-1}{2}+\int_1^e \ln xdx$

Xét $J=\int_1^e \ln xdx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=x \end{cases} \Rightarrow J=\left.x\ln x\right|_1^e-\int_1^e 1dx=\left.x\ln x\right|_1^e-\left.x\right|_1^e=1$

Vậy $I=\frac{e^2-1}{2}+1=\frac{e^2+1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_e^{e^2}\frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 4.　　**D.** 8.

Lời giải

* $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\cos^2 x)}{\cos^2 x}.\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos^2 x=t \Rightarrow \sin 2x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.
Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

Khi đó $I_1 = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* $I_2 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x}.\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* Tính $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $2x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4 + 4 = 8$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2; \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{2}{3}$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \frac{3}{2}$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Có $I = \int_{-1}^{1} f(|2x-1|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x$.Đặt $u = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x$

Đổi cận : $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_1 = \frac{-1}{2}\int_3^0 f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^3 f(u)\mathrm{d}u = 3$

Tính $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x$. Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận : $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 1$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ nên

$f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ta có:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left[f(x)\right] = \left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Suy ra: $I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

Vậy $I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0) = 1$ và $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x \in [0;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{16}{3}$. **B.** $I = -\frac{16}{5}$. **C.** $I = -\frac{14}{3}$. **D.** $I = -\frac{32}{5}$.

Lời giải

Cách 1: Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln\left[f(x).f(2-x)\right] = \ln \mathrm{e}^{2x^2+4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$.

Mặt khác, với $x = 0$, ta có $f(0).f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

Xét $I = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^3 - 3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I = \int\limits_0^2 \left(x^3 - 3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(3x^2 - 6x\right)\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \left[\left(x^3 - 3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \left(3x^2 - 6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 6x\right).\ln f(x)\mathrm{d}x \ (1)$.

Đến đây, đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Khi $x = 0 \to t = 2$ và $x = 2 \to t = 0$.

Ta có $I = -\int\limits_2^0 \left(3t^2 - 6t\right).\ln f(2-t)(-\mathrm{d}t) = -\int\limits_0^2 \left(3t^2 - 6t\right).\ln f(2-t)\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I = -\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 6x\right).\ln f(2-x)\mathrm{d}x \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được $2I = -\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 6x\right).\left[\ln f(x) + \ln f(2-x)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I = -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 6x\right).\left(2x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{16}{5}$.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Chọn hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$, khi đó:

$I = \int\limits_0^2 \dfrac{\left(x^3 - 3x^2\right).\mathrm{e}^{x^2-2x}.(2x-2)}{\mathrm{e}^{x^2-2x}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^3 - 3x^2\right).(2x-2)\mathrm{d}x = \dfrac{-16}{5}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$, tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Xét $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(\tan x)}{1 + \tan^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}u = \left(1 + \tan^2 x\right)\mathrm{d}x$

Khi $x = 0$ thì $u = 0$; khi $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Nên $I = \int\limits_0^1 \dfrac{f(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 4$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{\left[\left(x^2+1\right)-1\right]f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Do đó $2 = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 4 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2 - \mathrm{e}$ **B.** $I = \mathrm{e} - 2$ **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ **D.** $I = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$

Lời giải

Xét $A=\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=xe^x \end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1-e^2}{4}$

Xét $\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=e^{2x}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{e^2-1}{4}$

Ta có : $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left(f'(x)+xe^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+xe^x=0, \forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+xe^x\right)^2\geq 0, \forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-xe^x \Rightarrow f(x)=(1-x)e^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)e^x$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (1-x)e^x\mathrm{d}x=(2-x)e^x\Big|_0^1=e-2$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$, thỏa mãn $f(2)=6$ và $f(x)=(x-1)f'(x)+2x^3-3x^2+1, \forall x\in(1;+\infty)$. Tính $f\left(\sqrt{2}\right)$.

A. 1. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** -1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

+) $\forall x\in(1;+\infty)$ ta có:

$f(x)=(x-1).f'(x)+2x^3-3x^2+1$

$\Leftrightarrow f(x)=(x-1).f'(x)+(2\mathrm{x}+1)(x-1)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-(x-1).f'(x)}{(x-1)^2}=2x+1$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x-1}\right]'=2x+1 \Rightarrow \int\left[\dfrac{f(x)}{x-1}\right]'dx=\int(2x+1)dx \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}=x^2+x+C$

+) Vì $f(2)=6 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=(x-1)(x^2+x), \forall x>1 \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+x=\int\limits_0^2\left[f(x)-x\right]\mathrm{d}x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Xác định giá trị m để $\int\limits_0^2\left[mx+f(x)\right]\mathrm{d}x=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Theo đề ta có $f(x)+x=\int\limits_0^2\left[f(x)-x\right]\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)+x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 x\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)+x=k-2$

, với $k=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ là hằng số, suy ra $f(x)=-x+k-2\,(1)$.

Mặt khác, lấy tích phân cận từ 0 tới 2 hai vế của (1) ta được

$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 -x\,dx + \int_0^2 (k-2)\,dx \Rightarrow k = -2 + 2(k-2) \Rightarrow k = 6$.

Suy ra $f(x) = -x + 4$. Thử lại thấy thoả mãn $f(x) + x = \int_0^2 [f(x) - x]\,dx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_0^2 [mx + f(x)]\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [mx - x + 4]\,dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_0^2 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy $m = -3$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$.

Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{20}$. **C.** $\frac{\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết $6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$, lấy tích phân từ 0 đến 1 của 2 vế ta được

$\int_0^1 6x^2 f(x^3)\,dx + \int_0^1 4f(1-x)\,dx = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt $I_1 = \int_0^1 6x^2 f(x^3)\,dx$, $I_2 = \int_0^1 4f(1-x)\,dx$, $I = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

+) Đặt $t = x^3$ ta được $I_1 = 2\int_0^1 f(t)\,dt = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

+) Đặt $v = 1-x$ ta được $I_2 = 4\int_0^1 f(v)\,dv = 4\int_0^1 f(x)\,dx$.

Từ đó ta được $I = 6\int_0^1 f(x)\,dx$

+) Đặt $u = \sin x$ ta được $I = \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{8}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 3$ và $\frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}\right) f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x), \forall x > 0$. Tính $\int_2^4 f(x)\,dx$.

A. $6 - 2\ln 2$. **B.** $6 + 4\ln 2$. **C.** $6 + 2\ln 2$. **D.** $8 + 4\ln 2$.

Lời giải

Với $\forall x > 0$, ta có:

$\frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}\right) f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x) \Rightarrow 2x^2 f^2(x) - (x^3 + 8x) f(x) + 8 = x^4 f'(x)$

$\Rightarrow 2[x^2 f^2(x) - 4xf(x) + 4] = x^3 [f(x) + xf'(x)] \Rightarrow 2[xf(x) - 2]^2 = x^3 [xf(x) - 2]'$

$\Rightarrow \frac{[xf(x) - 2]'}{[xf(x) - 2]^2} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \int \frac{[xf(x) - 2]'}{[xf(x) - 2]^2}\,dx = \int \frac{2}{x^3}\,dx \Rightarrow \frac{-1}{xf(x) - 2} = -\frac{1}{x^2} + C$

Ta có: $f(1) = 3 \Rightarrow \frac{-1}{1.f(1) - 2} = -\frac{1}{1^2} + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xf(x) - 2 = x^2 \Rightarrow f(x) = x + \frac{2}{x}$.

Khi đó: $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+2\ln|x|\right)\right|_2^4=6+2\ln 2$.

Vậy: $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=6+2\ln 2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f'(x)\sin x=(1-f(x))\cos x$ với mọi số thực x. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. -1.

B. 1.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)\sin x=(1-f(x))\cos x$

$\Leftrightarrow\ f'(x)\sin x+f(x)\cos x=\cos x$

$\Leftrightarrow\ (f(x)\sin x)'=\cos x$

Suy ra: $f(x)\sin x=\sin x+C$

Chọn $x=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x).\sin x=\sin x\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6}\right).\sin\dfrac{\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

Câu 19. hàm số $f(x)$ có đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, thỏa mãn $x^2+4x^2f(x)=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;3]$, $f(2)=2$. Tính $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{20}{3}$.

B. $\dfrac{233}{30}$.

C. $\dfrac{117}{15}$.

D. $\dfrac{23}{3}$.

Lời giải

• Ta có: $x^2+4x^2f(x)=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;3]$

$\Leftrightarrow x^2(1+f(x))=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;3]$

Suy ra: $x.\sqrt{1+4f(x)}=f'(x),\forall x\in[1;3]$

(do hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$ nên $f'(x)\geq 0,\forall x\in[1;3]$)

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2f'(x)}{\sqrt{1+4f(x)}}=2x,\forall x\in[1;3]$.

• Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$\int\dfrac{2f'(x)}{\sqrt{1+4f(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\left(\sqrt{1+4f(x)}\right)'\mathrm{d}x=\int 2x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{1+4f(x)}=x^2+C$.

Mà $f(2)=2$ nên $\sqrt{1+4f(2)}=2^2+C\Rightarrow\ C=-1$.

Vậy $\sqrt{1+4f(x)}=x^2-1\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{4}=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2$

Suy ra: $I=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{233}{30}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(x^3+x)f(x^3)+(x^2+1)f(1-x^2)=4x^4-3x^3+4x^2-3x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Ta có: $\left(x^3+x\right)f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=4x^4-3x^3+4x^2-3x$

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)x.f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\left(4x^2-3x\right)$

$\Leftrightarrow x.f\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=4x^2-3x$

$\Leftrightarrow x^2.f\left(x^3\right)+x.f\left(1-x^2\right)=4x^3-3x^2$.

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=-2$. (1)

Xét $\int\limits_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2 \quad (2)$.

Ta lại có $\int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=0 \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\int\limits_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-6$.