

CHỦ ĐỀ 4

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y = f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ

BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y = f(x)$

Chú ý: $y' = [f(u)]' = u' \cdot f'(u)$

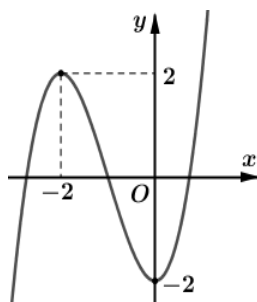
DẠNG 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM HỢP $y = f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN

THIÊN CỦA HÀM $y = f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $y = f(x - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 0)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(0; 2)$

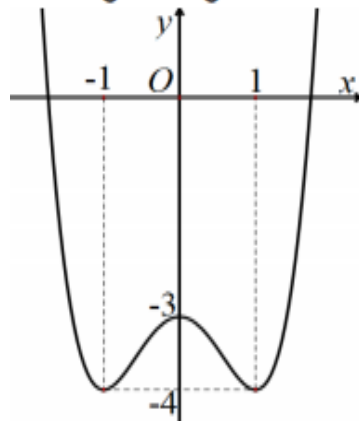
D. $(-\infty; -2)$

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = f(x - 2)$ là tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang bên phải trục Ox 2 đơn vị $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x - 2)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x + 2019)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

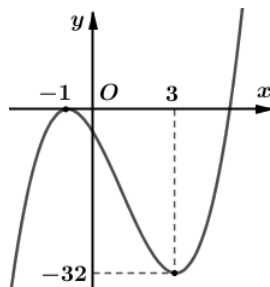
- A. $(-\infty; -2020)$ B. $(2020; +\infty)$ C. $(1; +\infty)$ **D. $(-2018; +\infty)$**

Lời giải

Chọn C.

Đồ thị hàm số $y = f(x + 2019)$ là tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang bên trái trục Ox 2019 đơn vị $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x + 2019)$ đồng biến trên khoảng $(-2020; -2019)$ và $(-2018; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x) + 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

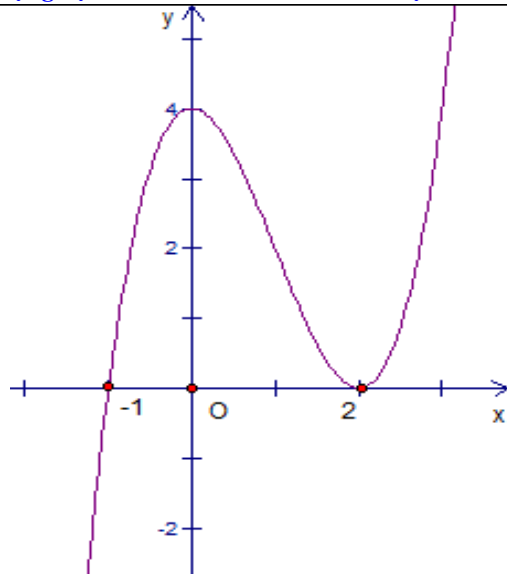
- A. $(-\infty; -1)$** B. $(1; 3)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(-\infty; 3)$

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = f(x) + 2$ là tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên bên trên trục Oy 2 đơn vị $\Rightarrow$ Tính đơn của hàm số $y = f(x) + 2$ không thay đổi so với hàm số $y = f(x) \Rightarrow y = f(x) + 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-2; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Xét hàm số $y = f(2 - x^2)$ ta có $y' = -2xf'(2 - x^2)$.

Để hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến thì $-2xf'(2 - x^2) > 0 \Leftrightarrow xf'(2 - x^2) < 0$.

Ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x > 0 \\ f'(2 - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 2 - x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x < 0 \\ f'(2 - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \begin{cases} 2 - x^2 > 2 \\ 2 - x^2 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}.$$

Vậy hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên các mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hàm số $g(x) = f(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2})$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; \frac{1}{4})$

B. $(\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$

C. $(\frac{5}{4}; \frac{9}{4})$

D. $(\frac{9}{4}; +\infty)$

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -2$ và $f'(x) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g(x) = f(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2})$ Xét

$$\begin{array}{l} g'(x) > 0 \Rightarrow 4x - \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{8} \\ g'(x) < 0 \Rightarrow 4x - \frac{5}{2} < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{8} \end{array}$$

$f(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \Rightarrow 1 < x < \frac{9}{4}$

$f(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \Rightarrow x < \frac{5}{8}$

+

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	$-\infty$	

Hàm số $g(x) = f(|x - 2|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

A. $(3; +\infty)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C.

- Do $h(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y = h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$			
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|)$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|x - 2|)$:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$			
$g'(x)$	+	0	-		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(|x - 2|)$ ta thấy hàm số $g(x) = f(|x - 2|)$ nghịch biến trên $(-1; 2)$ và $(5; +\infty)$

Câu 7. Cho parabol (P) : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4; 3)$, (P) cắt Ox tại $N(3; 0)$ và Q sao cho $\triangle INQ$ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $f(2x - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(5; 7)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C.

Vì (P) đi qua $M(4; 3)$ nên $3 = 16a + 4b + c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0 = 9a + 3b + c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t;0), t < 3$

$$\begin{cases} t+3 = -\frac{b}{a} \\ 3t = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Theo định lý Viét ta có

Ta có $S_{\Delta INQ} = \frac{1}{2} IH \cdot NQ$ với H là hình chiếu của $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH = \left| -\frac{\Delta}{4a} \right|$, $NQ = 3 - t$ nên $S_{\Delta INQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| -\frac{\Delta}{4a} \right| \cdot (3 - t) = 1$

$$\Leftrightarrow (3 - t) \left| \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{2}{a} \right| \Leftrightarrow (3 - t) \left| \frac{(t+3)^2}{4} - 3t \right| = \left| \frac{2}{a} \right| \Leftrightarrow (3 - t)^3 = \frac{8}{|a|} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có $7a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 7a$ suy ra $t + 3 = -\frac{3 - 7a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4 - t}{3}$

Thay vào (3) ta có $(3 - t)^3 = \frac{8(4 - t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 3$.

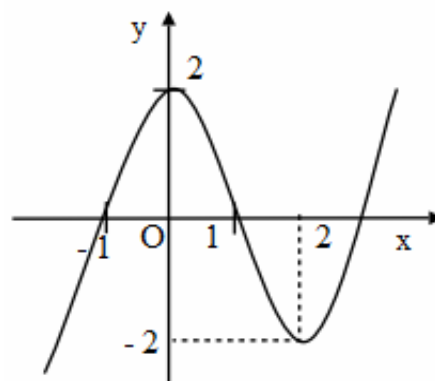
Vậy (P) cần tìm là $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Khi đó $f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 4(2x - 1) + 3 = 4x^2 - 12x + 8$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



A. Hàm số $y = f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

B. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

C. Hàm số $y = f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

Lời giải

A. Hàm số $y = f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ SAI

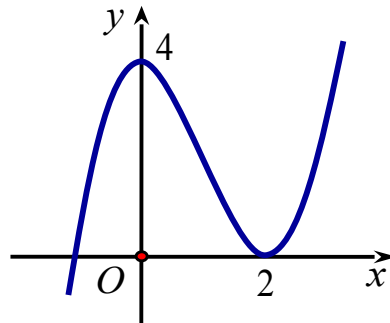
B. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ ĐÚNG

C. Hàm số $y = f(x+1)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ ĐÚNG

D. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ ĐÚNG

Đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ là tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang bên trái trục Ox 1 đơn vị $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2})$.

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{-1}{2}; 0)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ SAI

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ SAI

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{-1}{2}; 0)$ ĐÚNG

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ SAI

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0 \Rightarrow d=4$; $x=2 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0$; $f'(0)=0 \Rightarrow c=0$.

Tìm được $a=1; b=-3; c=0; d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x)=f(\sqrt{x^2+x+2})=(\sqrt{x^2+x+2})^3-3(x^2+x+2)+4$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right); \quad g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của hàm $y=g(x)$:

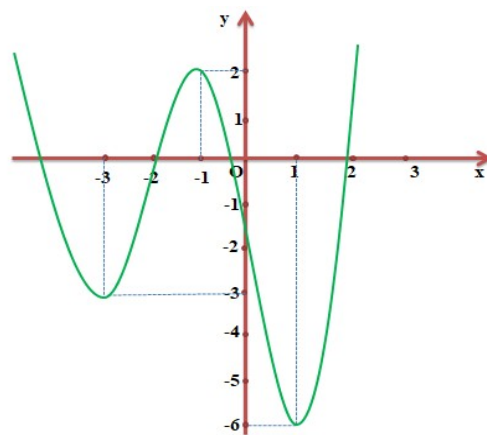
x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 4 4

Vậy $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$; $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$; $(1; +\infty)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Đồ thị hàm số $y=f(x-1)+2022$ là tịnh tiến đồ thị $y=f(x)$ lên bên trên trục Oy 2022 đơn vị và bên phải

trục Ox 1 đơn vị $\Rightarrow y=f(x-1)+2022$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	-1	0	1	0

Hàm số $y = f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào ?

Lời giải

Đáp án: $y = f(|f(x)|)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Đặt $g(x) = f(|f(x)|) \Rightarrow g'(x) = f'(|f(x)|) \cdot \frac{f(x) \cdot f'(x)}{|f(x)|}$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x) = 0$ hay $x = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(|f(x)|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ |f(x)| = 1 \\ |f(x)| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f(x) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có $|f(x)| \in [0; 1], \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Từ đó suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) < 0$ và $[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) + 2x^2$ đồng biến trên khoảng nào ?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $g(x) = f(x) + 2x^2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

$$[f(x) - x] f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow (f(x))^2 - x \cdot f(x) - x^6 - 3x^4 - 2x^2 = 0$$

Ta có

$$t = f(x) \text{ ta được phương trình } t^2 - xt - x^6 - 3x^4 - 2x^2 = 0$$

Đặt

$$\Delta = x^2 - 4(-x^6 - 3x^4 - 2x^2) = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2 = (2x^3 + 3x)^2$$

Ta có

$$\text{Vậy } \begin{cases} t = \frac{x+2x^3+3x}{2} = x^3+2x \\ t = \frac{x-2x^3-3x}{2} = -x^3-x \end{cases} \text{ Suy ra } \begin{cases} f(x) = x^3+2x \\ f(x) = -x^3-x \end{cases}$$

Do $f(1) < 0$ nên $f(x) = -x^3 - x$.

Ta có

$$g(x) = -x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1.$$

Hàm số $g(x) = f(x) + 2x^2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 13. Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = 3x.f(x) + x^2 + 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: Hàm số $y = 3x.f(x) + x^2 + 4x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ giả thiết, thay x bởi $x-1$ ta được $2f(1-x) + f(x) = (x-1)^2$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2 \\ 2f(1-x) + f(x) = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 3f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Suy ra $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 1]$ và thỏa $f(1) = 0$, $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8$. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Đáp án: hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (lý do: về phải là hàm đa thức bậc hai).

$$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

Ta có:

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 16x - 8 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 + 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 + 16x - 8$$

$$\Leftrightarrow (4a^2 + 4a)x^2 + (4ab + 4b)x + b^2 + 4c = 8x^2 + 16x - 8$$

Đồng nhất 2 vế ta được:

$$\begin{cases} 4a^2 + 4a = 8 \\ 4ab + 4b = 16 \\ b^2 + 4c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases}.$$

Do $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a=1, b=2$ và $c=-3$.

Vậy $f(x)=x^2+2x-3 \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2 \Rightarrow g'(x)=-x^2+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

DẠNG 2

XÉT CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP $y=f(u)$ KHI BIẾT HÀM, ĐỒ THỊ VÀ BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM $y=f(x)$

CỰC TRỊ HÀM HỢP $f(u(x))$ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y=f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y=f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x)=0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y=|f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.

- Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Khi đó hàm số $y=|f(x)|$ có:

+ 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) \geq 0$

+ 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) < 0$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$ $	$+$	0	$+$
f	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Lời giải

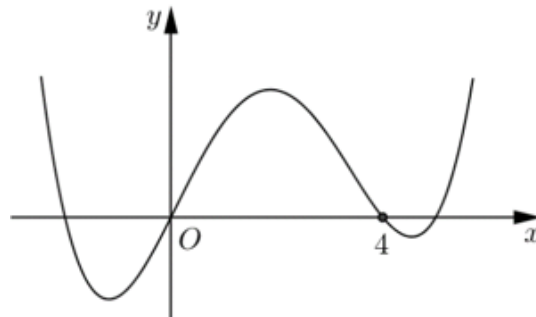
Chọn C.

Ta có $g'(x) = 3f'(x)$

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số là $x = \pm 1$.

Câu 16. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



- A. 5 . B. 3 . C. 7 . D. 11 .

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Tự luận

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

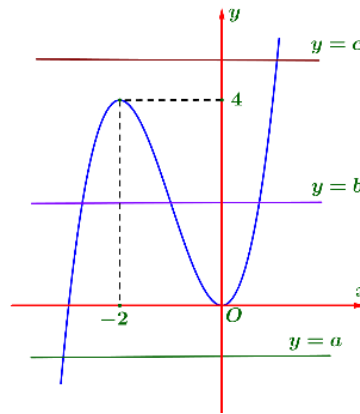
Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a; a<0 \\ x^3+3x^2=b; 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c; c>4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$



Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ có 7 cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

$$u=x^3+3x^2 \text{ ta có } u'=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases}$$

Xét hàm số

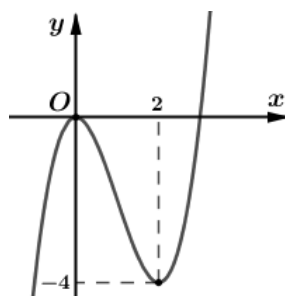
Gọi a, b, c là các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ khi đó $a<0<b<4<c$

Và ta cũng có $f(a)<f(c)<0$; $f(b)>0$.

x	$-\infty$	-2			0			$+\infty$			
$u = x^3 + 3x^2$	$-\infty$	a	b	4	b	0	b	4	c	$+\infty$	
$f(u)$	$+\infty$	$f(a)$		$f(b)$	0	$f(b)$	0	$f(b)$	-2	$f(c)$	$+\infty$

Suy ra $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

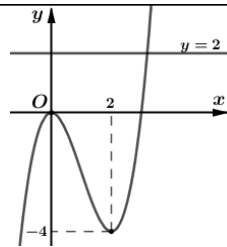
Cách 1: Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0, x = 2$.

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem don)} \\ x = 2 \text{ (nghiem don)} \end{cases}$

Ta có $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiem don)} \\ x = 2 \text{ (nghiem don)} \end{cases}$

$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}$



Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (ng nghiệm kép) và $x = a$ ($a > 2$).

Phương trình (2) có một nghiệm $x = b$ ($b > a$).

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = 2, x = a$ và $x = b$.

Suy ra hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 4 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2:

$$\Rightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_u = 0 \\ f'_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = f(x) = 0 \\ u = f(x) = 2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

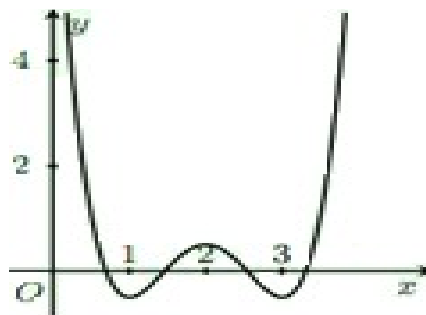
+) Ta có với $u = f(x)$ thì $f'(f(x))_x = f'_u \cdot u_x = f'_u \cdot f'_x$

+) Ta thấy $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_{1,2} = 0 \vee x_3 > 2$.

+) Ta thấy $f(x) = 2$ có hai nghiệm $x_4 > x_3$

$\Rightarrow f'(f(x)) = 0$ có nghiệm $x = 0$ bậc 3, $x = 2, x_3, x_4$ bậc 1 $\Rightarrow$ hàm số có 4 cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-1)|$ là:

A. 7

B. 5

C. 3

D. 6

Lời giải

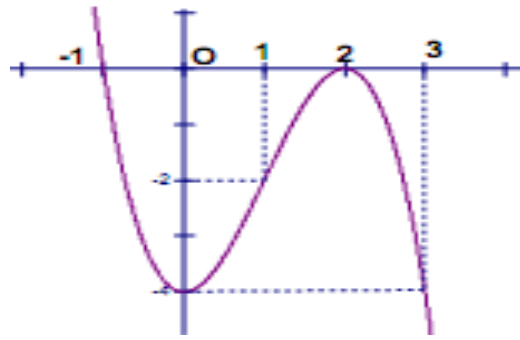
Chọn A.

◆ Đồ thị $y = f(x-1)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

◆ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x-1)$ có 2 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y = |f(x-1)|$ có 7 điểm cực trị

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x+2|)$ là:

A. 5

B. 3

C. 1

D. 2

Lời giải

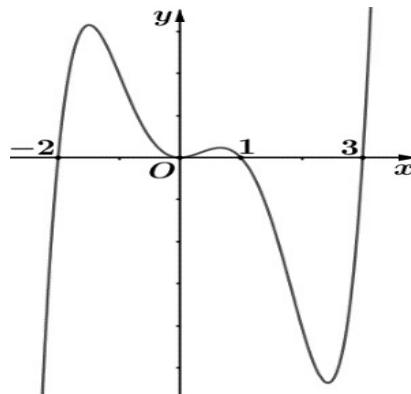
Chọn A.

♦ Đồ thị $y = f(x+2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên trái trục Oy 2 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

♦ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x+2)$ có 0 điểm cực trị có hoành độ dương

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(|x+2|)$ có 1 điểm cực trị

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $h(x) = f(|x|) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

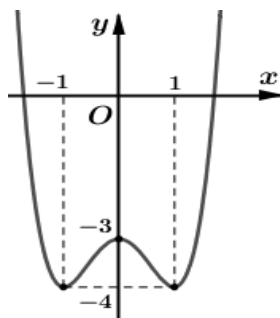
Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương

$\Rightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\Rightarrow$ hàm số $h(x) = f(|x|) + 2021$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

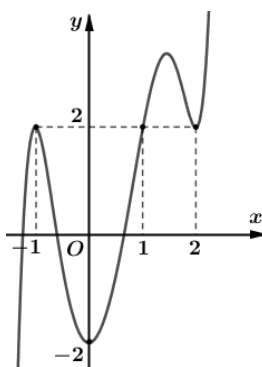
Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn C.

Xét $g(x) = 2f(x) - 3$ và $g(x) = 2f(x)$;

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ theo đồ thị $f(x)$ ta có:

$x = -1$
 $x = 0$
 $x = a$ ($1 < a < 2$)
 $x = 2$

Ta tính được

$g(-1) = 1$
 $g(0) = -7$
 $g(a) > 1$
 $g(2) = 1$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	a	2	$+\infty$	
g'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	1	-7	$g(a)$	1	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

+ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

+ Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$
y	-2	$+\infty$	$+\infty$	2

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 3

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn B.

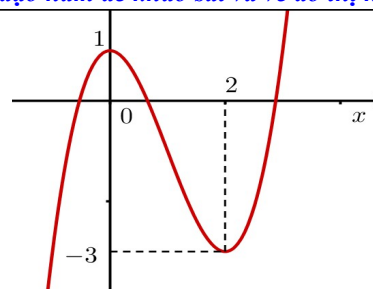
◆ Đồ thị $y = f(x) - 1$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

◆ Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x) - 1$ không có điểm cực trị và cắt trục Ox 3 điểm

$\Rightarrow$ hàm số $y = |f(x) - 1|$ có 3 điểm cực trị

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 24. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = f(x+1) - 2$

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.**
- C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- D. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

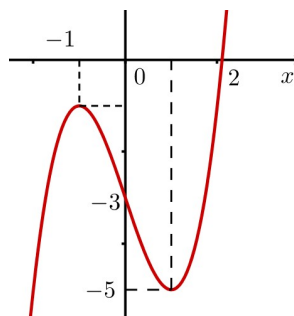
- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **SAI**
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. ĐÚNG**
- C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$. **SAI**
- D. Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. **SAI**

Cách 1: Thực hiện các phép biến đổi đồ thị:

Thực hiện các phép biến đổi đồ thị lần lượt là : tịnh tiến đồ thị $f(x)$ theo vec tơ $-i$ sau đó tịnh tiến đồ thị theo vec tơ $\vec{m} = -2j$ ta được đồ thị hàm số $g(x)$ như hình vẽ. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Cách khác: Ta có $g'(x) = f'(x+1)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Đáp án: hàm số đã cho có ba cực trị.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Từ giả thiết suy ra

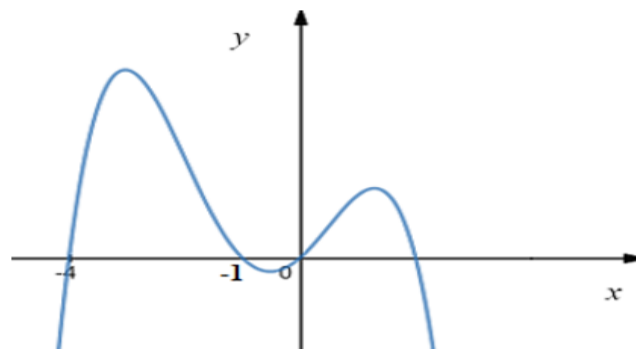
Đặt $g(x) = f(u), u = x^2 - 2x$ thì $g'(x) = 2(x-1) \cdot f'(u)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -2; u = -1; u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \text{ (VN)} \\ x^2 - 2x = -1 \text{ (1)} \\ x^2 - 2x = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm kép là $x = 1$; phương trình (2) có hai nghiệm đơn là $x = 0; x = 2$ nên phương trình

$g'(x) = 0$ có hai nghiệm đơn là $x = 0; x = 2$ và một nghiệm bội ba là $x = 1$ nên hàm số đã cho có ba cực trị.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: hàm số đã cho có 7 cực trị.

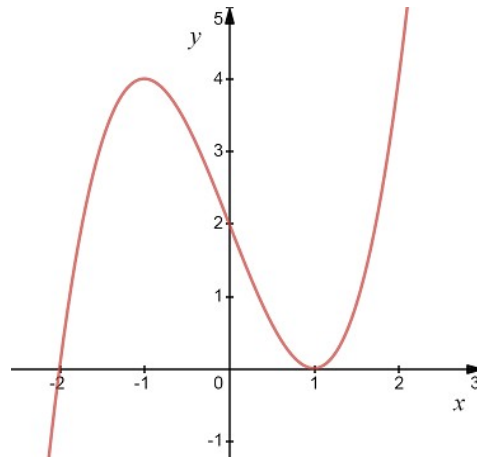
Cách 1: Tự luận

Ta có:

$$g'(x) = (3x^2 - 3) \cdot f'(x^3 - 3x + 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 2 = a \quad (1) \\ x^3 - 3x + 2 = b \quad (2) \\ x^3 - 3x + 2 = c \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, suy ra:



Phương trình (1) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-4 < a < -1$

Phương trình (2) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-1 < b < 0$

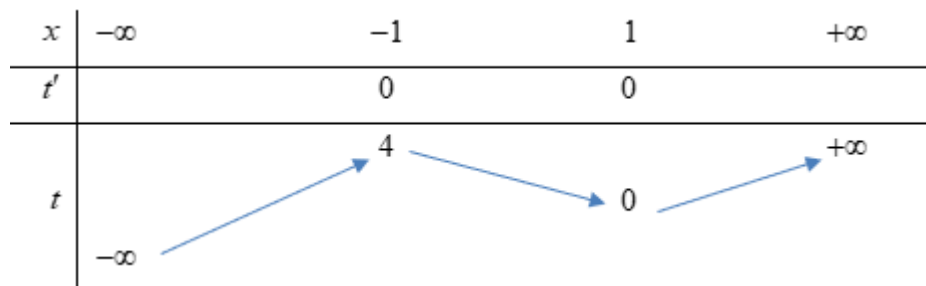
Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác ± 1 , vì $0 < c < 4$

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tức là hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ có 7 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Ta có hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$

Đặt $t = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3; \Leftrightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$



Khi đó hàm số trở thành $g(t) = f(t)$.

Từ đồ thị hàm số $g(x) = f(x)$ ta có các điểm cực trị $a \in (-\infty; -1)$, $b \in (-1; 0)$, $c \in (0; +\infty)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$				-1		1		$+\infty$
t	$-\infty$	a	b	c	4	c	0	c	$+\infty$
$f(t)$		$f(a)$		$f(c)$		$f(c)$	$f(0)$	$f(c)$	

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau ?

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
f'	-	0	+	0	+
f	$+\infty$	-2		2	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Lời giải

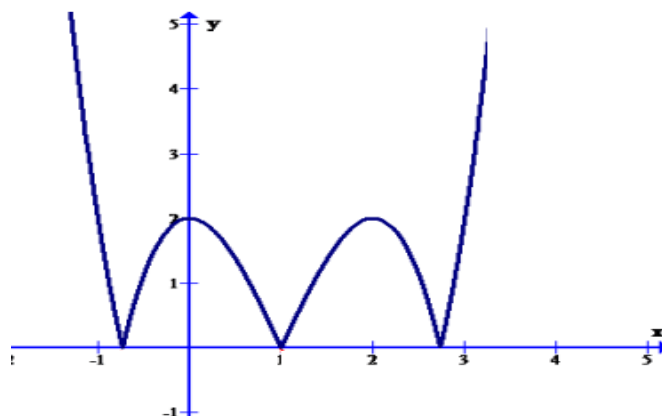
Đáp án: hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có 1 cực trị.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = -2 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (nghiệm bội 3)}$$

Vậy $g'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x = 0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| f(x-1) - \frac{1}{2} \right|$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y = \left| f(x-1) - \frac{1}{2} \right|$ có 11 cực trị.

◆ Đồ thị $y = f(x-1) - \frac{1}{2}$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên phải trục Oy 1 đơn vị và xuống dưới trục Ox $\frac{1}{2}$ đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

◆ Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x-1) - \frac{1}{2}$ có 3 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y = \left| f(x-1) - \frac{1}{2} \right|$ có 11 điểm cực trị

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$ 0 $+$	
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left| f(x) - 2022 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Lời giải

Đáp án: hàm số $y = \left| f(x) - 2022 \right|$ có 3 cực trị.

◆ Đồ thị $y = f(x) - 2022$ là phép tịnh tiến của đồ thị $y = f(x)$ qua bên phải trục Oy 2022 đơn vị nên số cực trị không thay đổi.

◆ Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x) - 2022$ có 1 điểm cực trị có tung độ âm

$\Rightarrow$ hàm số $y = \left| f(x) - 2022 \right|$ có 3 điểm cực trị.