UBND HUYỆN YÊN LẠC
PHÒNG GD & ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI GIAO LƯU HSG LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2014-2015
MÔN: TOÁN 8
Thời gian : 120 phút

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27}+\frac{3}{x^2+9}\right):\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Với $x>0$ thì P không nhận những giá trị nào ?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $M=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Chứng minh rằng:

a) Nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $M>1$

b) Nếu $M=1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3. (2 điểm)

a) Cho n là tổng của hai số chính phương. $CMR: n^2$ cũng là tổng của hai số chính phương

b) Cho đa thức $A=ax^2+bx+c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x-1$, chia A cho $x+1$ đều có cùng một số dư

Câu 4. (2,5 điểm)

a) Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Tính số đo của góc $\widehat{AIJ}$

b) Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC}=\widehat{ANB}=90^0$. Chứng minh rằng $AM=AN$

Câu 5 (1 điểm)

a) Cho $a,b,c>0$

CMR: $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 3,\qquad P = \dfrac{x+3}{x-3}$

b) Ta có: $P = \dfrac{x+3}{x-3} \Rightarrow x = \dfrac{3(P+1)}{P-1}$

Để $x > 0$ thì $\dfrac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P > 1 \\ P < -1 \end{array}\right.$

Vậy $x > 0$ thì P không nhận những giá trị từ -1 đến 1, $P \notin [-1;1]$

c) Ta có $P = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Từ đó tính được $x \in \{0;1;2;4;5;6;9\}$ (Chú ý loại $x = -3$)

Câu 2

2a)

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a,b,c > 0$ và $a+b-c>0; a+c-b>0; c+b-a>0$

Đặt $A = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}; B = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; C = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Ta cần chứng minh : $M = A + B + C > 1$ hay $(A-1)+(B-1)+(C+1)>0$

Ta có:

$$A - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$B - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}$$

$$C - 1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - 1 = \frac{c^2+a^2-b^2+2ca}{2ca} = \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

Suy ra

$$(A-1)+(B-1)+(C+1)$$
$$=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}+\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}+\frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$
$$=\frac{c(a-b-c)(a-b+c)+a(b-c-a)(b-c+a)+b(c+a-b)(c+a+b)}{2abc}$$
$$=\frac{c(a-b-c)(a-b+c)-a(a-b+c)(b-c+a)+b(a-b+c)(c+a+b)}{2abc}$$
$$=\frac{(a-b+c)\left[c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(c+a+b)\right]}{2abc}$$
$$=\frac{(a-b+c)\left[c(a-b-c)-a(b-c+a)+b(c+a+b)\right]}{2abc}$$
$$=\frac{(a-b+c)\left(ca-cb-c^2-ab+ac-a^2+bc+ba+b^2\right)}{2abc}$$
$$=\frac{(a-b+c)\left(bc-ba+b^2-c^2+ca-cb+ac-a^2+ab\right)}{2abc}$$
$$=\frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc}>0$$
(đúng)

Từ đó suy ra $M-1>0$ đúng vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác hay $M>1$

Câu 2b

$$M=1\Leftrightarrow M-1=0\Leftrightarrow\frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc}=0$$
$$\Leftrightarrow(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)=0$$

Ta xét ba trường hợp:

TH1: Nếu $a-b+c=0$ thì

$$A-1=0;B-1=\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}=\frac{-(a-b+c)(b-c+a)}{2bc}=0;C+1=0$$

Suy ra $A=1;B=1;C=-1$

TH2: Nếu $b-c+a=0$ thì

$$A+1=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1=\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$B-1=0\Rightarrow A=-1;B=1;C=1$

TH3: Nếu $c-a+b=0$ thì

$$A-1=\frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}=\frac{-(c-a+b)(a-b+c)}{2ab}=0;$$

$$C-1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1=\frac{c^2+a^2-b^2-2ca}{2ca}=\frac{(c-a-b)(c-a+b)}{2ca}=\frac{-(b-c+a)(c-a+b)}{2ca}=0$$

$$B+1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=0$$

Suy ra $A=1;B=-1;C=1$

Như vậy trường hợp nào cũng có hai trong ba phân thức A, B, C bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Câu 3

3a) Đặt $N=a^2+b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}$

Khi đó $N^2=a^4-2a^2b^2+b^2+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ là tổng của hai số chính phương.

3b)

Giả sử
$$A=ax^2+bx+c=(x-1)P+R \quad (1)$$
$$A=ax^2+bx+c=(x+1)Q+R \quad (2)$$

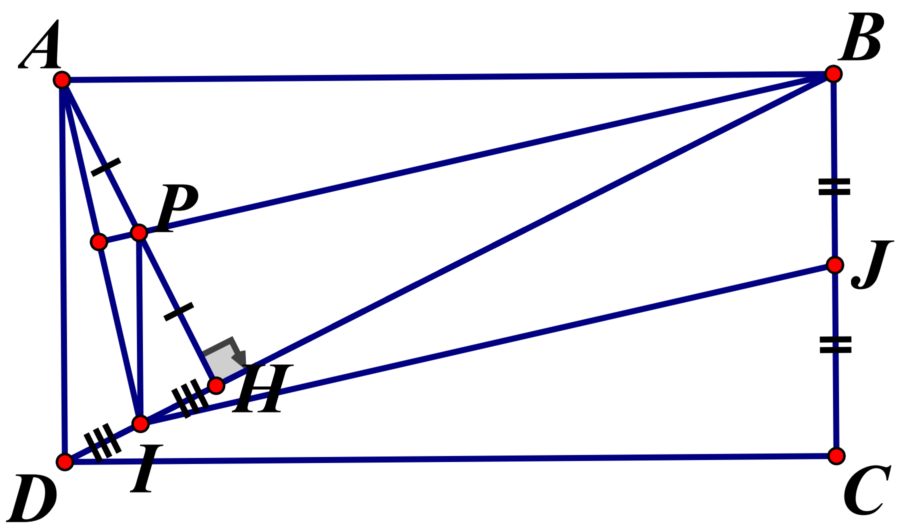
Cho $x=1$ thì từ (1) ta có: $a+b+c=R$

Cho $x=-1$ thì từ (2) ta có: $a-b+c=R$

Do đó : $a+b+c=a-b+c\Leftrightarrow 2b=0\Rightarrow b=0$

Câu 4

4a)



Gọi P là trung điểm của AH $\Rightarrow$ PI là đường trung bình của tam giác AHD

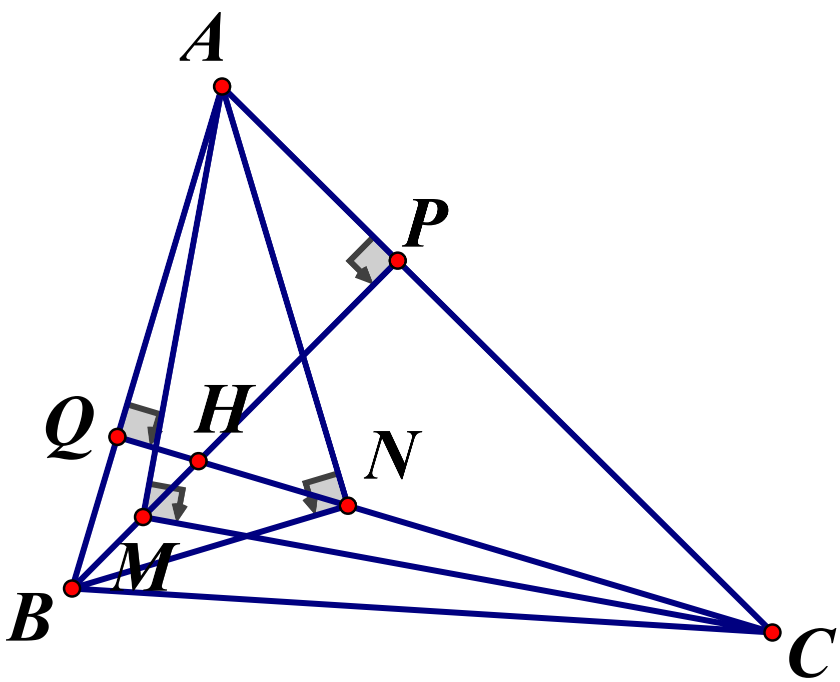
$\Rightarrow PI // AD$

Mà $AD \perp AB$ nên $IP \perp AB$ và P là trực tâm ΔABI

Từ đó ta có tứ giác $BPIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow BP // IJ$

Mà $BP \perp AI$ nên $JI \perp AI$

Câu 4b



Gọi P,Q lần lượt là chân các dường cao kẻ từ B và C.

Tam giác vuông AMC có đường cao $MP \Rightarrow AM^2 = AP.AC$

Tam giác vuông ANB có đường cao $NQ \Rightarrow AN^2 = AQ.AB$

Xét tam giác vuông APB và AQC có:

$\widehat{A}$ chung; $\widehat{APB} = \widehat{AQC} = 90^0 \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta AQC(g.g)$

$\Rightarrow AP.AC = AQ.AB \Rightarrow AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$

Câu 5

5a)

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} = \frac{18a}{2(a^2+b^2)+a^2+c^2} \le \frac{18a}{2.2\sqrt{(ab)^2}+2\sqrt{(ac)^2}} = \frac{18a}{4ab+2ac}$$

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{18a}{4ab+2ac} = \frac{18a}{2a.(2b+c)} = \frac{9}{2b+c}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Ta có: $\frac{(2+1)^2}{2b+c}\le\frac{2^2}{2b}+\frac{1^2}{c}=\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$

Suy ra : $\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}\le\frac{9}{(2b+c)}=\frac{(2+1)^2}{2b+c}\le\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$

Tương tự:

$$\frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2}\le\frac{9}{(2c+a)}=\frac{(2+1)^2}{2c+a}\le\frac{2}{c}+\frac{1}{a}$$

$$\frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{9}{2a+b}=\frac{(2+1)^2}{2a+b}\le\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{2}{c}+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right):18=\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow DPCM$$

5b)

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng một màu – màu đỏ (Theo nguyên lý Dirichle)

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ. Giả sử đỉnh đó là A.

Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A,P,Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q.

Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác ABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ