Đề 62

Học sinh giỏi toán 9 Hưng Yên năm 2023-2024

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Cho hai biểu thức $A=\frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}, B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{36}{x-9}$ với $x\ge 0, x\ne 9$.
Tìm x để $A=B$.

b) Tìm hai số a và b sao cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3\sqrt{(x+2)(x^2-3x+4)}=2x^2-8x+4$.

b) b) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=mx+m-1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+3)=3(x^2+y^2)+2\\ x^2y+x^2-2x-12=0\end{cases}$ với (x,y $\in R$)

b) Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2+b^2-2)(a+b)^2+(1-ab)^2=-4ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Câu 4: (2,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm bất kì trên cạnh CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

Chứng minh rằng $\cos\widehat{AKE}=\sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}+\sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF}$.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho ΔABC không là tam giác cân, ngoại tiếp đường tròn (I;R). Gọi H, K, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I;R) với các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng AH cắt đường tròn (I;R) tại P (P không trùng với H), Gọi Q là trung điểm của KN. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho $\Im>R$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MD, MJ với đường tròn (I;R). Qua điểm I, vẽ đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng IM cắt các tia MD, MJ theo thứ tự tại hai điểm E và F.

a) Chứng minh rằng tứ giác PQIH nội tiếp.

b) Tìm vị trí của điểm M sao cho diện tích ΔMEF nhỏ nhất.

Câu 6: (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn abc =1000 . Tìm gái trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b^4+c^4+1000a}+\frac{b}{c^4+a^4+1000b}+\frac{c}{a^4+b^4+1000c}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH**

HƯNG YÊN **NĂM HỌC 2021-2022**

MÔN THI: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 5 trang)

Câu 1 (4,0đ)

a) B = $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ - $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ - $\frac{36}{x-9}$ = $\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

= $\frac{12\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$ = $\frac{12}{\sqrt{x}+3}$

A = B $\Leftrightarrow$ $\frac{12}{\sqrt{x}+3}$ = $\frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ $\Leftrightarrow$ 12($\sqrt{x}$ + 1) = ($\sqrt{x}$ + 3)(7$\sqrt{x}$- 2)
$\Leftrightarrow$ 7x - 5$\sqrt{x}$ -18 = 0
$\Leftrightarrow$ ($\sqrt{x}$- 2)(7$\sqrt{x}$+ 9) = 0 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}$- 2 = 0 (vì 7$\sqrt{x}$+ 9 ≠ 0)
$\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}$ = 2 $\Leftrightarrow$ x = 4 (TMĐK)
b) Ta có g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)
Vì đa thức f(x) = ax^3 + b^2 + 10x - 4 chia hết cho đa thức g(x) = x^2 + x - 2
Nên tồn tại đa thức q(x) sao cho f(x) = g(x).q(x)
⇒ ax^3 + b^2 + 10x - 4 = (x - 1).(x + 2). q(x) (*)
Với x = 1 thay vào (*) ta được a + b + 6 = 0 $\Leftrightarrow$ a + b = -6 (1)
Với x = -2 thay vào (*) ta được -8a + 4b - 20 - 4 = 0 $\Leftrightarrow$ 2a - b = -6 (2)
Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được a = -4; b = -2
Vậy với a = -4; b = -2 thì đa thức f(x) = ax^3 + b^2 + 10x - 4 chia hết cho đa thức g(x) = x^2 + x - 2
Câu 2 (4,0đ)
a) Giải hệ phương trình: 3$\sqrt{(x+2)(x^2-3x+4)}$ = $2x^2$ - 8x + 4
Điều kiện: x ≥ -2
Đặt $\sqrt{(x+2)}$ = a và b = $\sqrt{x^2-3x+4}$ ⇒ a ≥ 0, b > 0

Suy ra 2b^2 - 2a^2 = 2(x^2-3x+4) - 2(x + 2) = 2x^2 - 8x + 4

Phương trình đã cho trở thành 3ab = 2(b^2 - a^2) $\Leftrightarrow$ 2b^2 - 2a^2 - 3ab = 0

$\Leftrightarrow$ 2b^2 + ab - 2a^2 - 4ab = 0 $\Leftrightarrow$ b(2b + a) - 2a(2b + a) = 0 $\Leftrightarrow$ x^2- 7x - 4 = 0

Giải phương trình trên ta được 2 nghiệm $x_1 = \frac{7+\sqrt{65}}{2}$; $x_2 = \frac{7-\sqrt{65}}{2}$

Đối chiếu với ĐKXĐ ta được phương trình có 2 nghiệm

$x_1 = \frac{7+\sqrt{65}}{2}$; $x_2 = \frac{7-\sqrt{65}}{2}$

b)

+) Nếu m = 0 thì (d) trở thành y = -1 không cắt cả hai trục tọa độ (loại)

+) Nếu m ≠ 0 xét đường thẳng (d): y = mx + m - 1

Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy ta có A(0; m-1)

⇒ OA = $|m-1|$

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Ox nên B$\left(\frac{-m-1}{m};0\right)$

⇒ OB = $\left|\frac{m-1}{m}\right|$

$S_{AOB} = 2$ ⇔ $\frac{OA.OB}{2} = 2$ ⇔ OA.OB = 4 ⇔ $\frac{(m-1)^2}{|m|} = 4$

⇔ ¿¿ ⇔ ¿¿

Giải phương trình (1) ta được m = 3 + 2$\sqrt{2}$ (TMĐK)
Giải phương trình (2) ta được m = -1 (TMĐK)
Vậy với m ∈ {3 + 2$\sqrt{2}$; 3 - 2$\sqrt{2}$; -1}

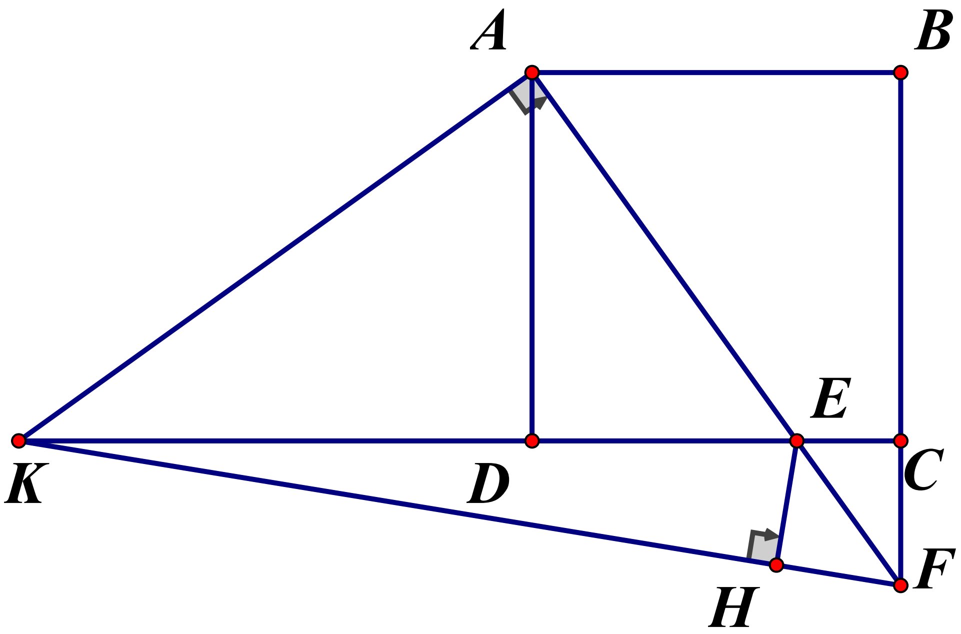
Câu 3 (4,0đ)
a) Giải hệ phương trình ¿$^{(x-y)(x^2+xy-y^2+3)=3(x^2+y^2)+2(1)}_{x^2y+x^2-2x-12=0(2)}$¿
Xét PT (1) (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2
⇔ x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3x^2 + 3y^2 + 2
⇔ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1
⇔ $(x-1)^3 = (y+1)^3$
⇔ x - 1 = y + 1 ⇔ y = x - 2 (3)
Thay (3) vào phương trình (2) ta được phương trình:
x^2(x - 2) + x^2 - 2x - 12 = 0 ⇔ x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0
⇔ (x - 3)(x^2 + 2x + 4) = 0
⇔ ¿¿
Giải phương trình (*) có Δ' = -3 < 0 ⇒ Phương trình vô nghiệm
Thay x = 3 vào phương trình (3) ta được y = 1
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;1)
b) Ta có: (a^2 + b^2 - 2)$(a+b)^2$ + $(1-ab)^2$ = -4ab
⇔ $\left[(a+b)^2-2(ab+1)\right](a+b)^2$ + $(1+ab)^2$ = 0
⇔ $(a+b)^4$ - 2$(a+b)^2$(1 + ab) + $(1+ab)^2$ = 0

$\Leftrightarrow \left[(a+b)^2-(1+ab)\right]^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2$ - (1 + ab) = 0 $\Leftrightarrow (a+b)^2 = 1 + ab$

$\Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{1+ab}$

Vì a,b ∈ Q ⇒ $|a+b|$ ∈ Q nên $\sqrt{1+ab}$ ∈ Q (ĐPCM)

Câu 4 (2,0đ)



Kẻ đường cao EH của ΔKEF

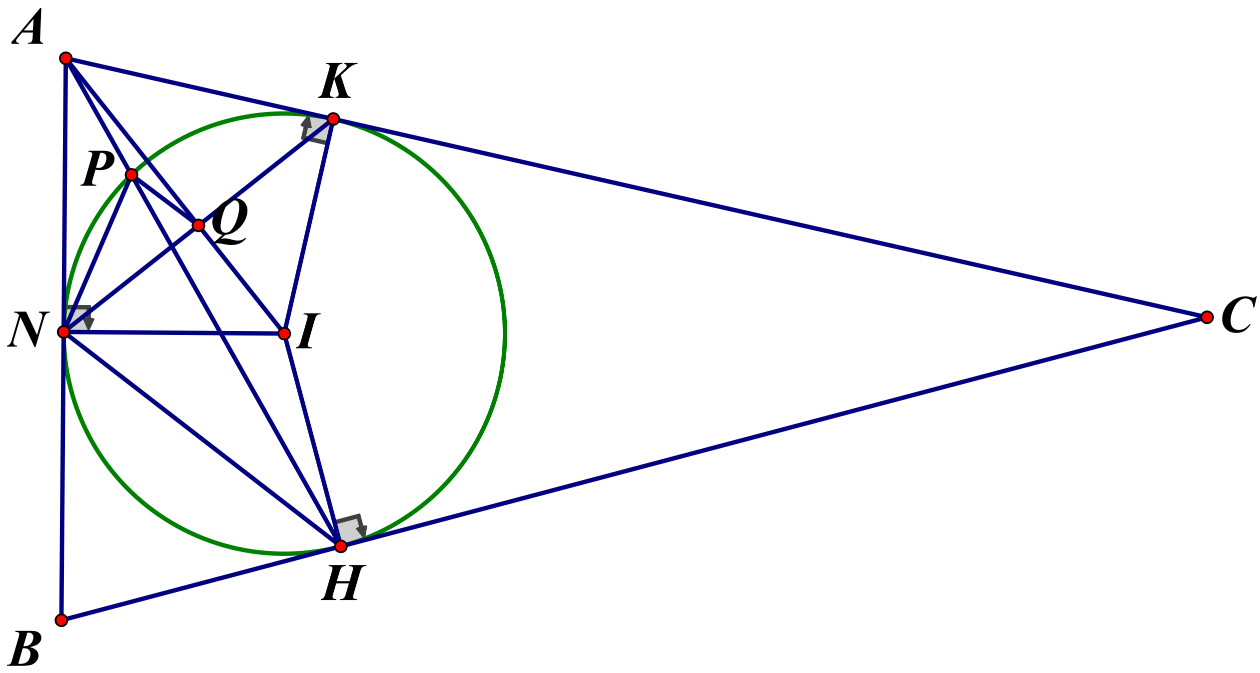
Ta có $S_{KEF} = \frac{1}{2}$ KE.FC $= \frac{1}{2}$ KE.EF.cos$\widehat{AKE}$ (vì $\widehat{EFC} = \widehat{AKE}$)

Lại có $S_{KEF} = \frac{1}{2}$ EH.KF $= \frac{1}{2}$ EH.(KH + HF)

Suy ra KE.EF.cos$\widehat{AKE}$ = EH.(KH + HF) $\Leftrightarrow \cos\widehat{AKE} = \frac{EH.KH+EH.HF}{KE.EF}$

$\Rightarrow \cos\widehat{AKE} = \frac{EH}{EF}.\frac{KH}{EK} + \frac{EH}{KE}.\frac{HF}{EF} = \sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF} + \sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}$

Câu 5 (4,0đ)



a) Nối P với N,H với N

Xét ΔAPN và ΔANH có:

$\widehat{ANP} = \widehat{AHN}$ (vì AN là tiếp tuyến)

$\widehat{NAH}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta APN \sim \Delta ANH$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AN} = \dfrac{AN}{AH} \Leftrightarrow$ AP.AH = AN^2 (1)

Theo giả thiết AN⊥ NI nên ΔANI vuông tại N. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có A,I,Q thẳng hàng và NQ⊥ AI. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ΔANI ta có AN^2= AQ.AI (2)

Từ (1) và (2) ta có AP.AH = AQ.AI $\Leftrightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AI}{AH}$

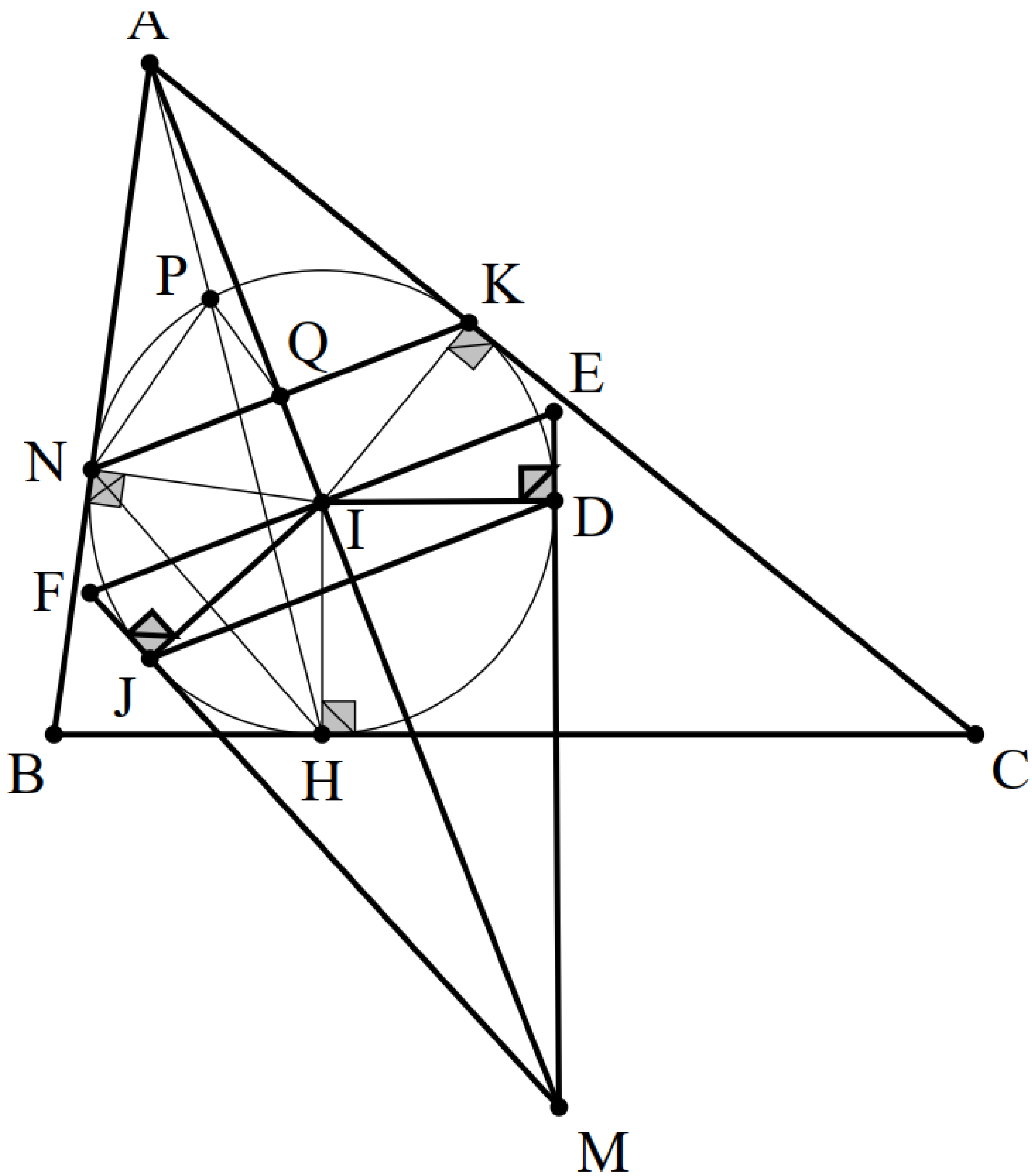
Xét ΔAPQ và ΔAHI có:

$\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AI}{AH}$

$\widehat{HAI}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta APQ \sim \Delta AIH$ (c - g - c)

$\Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{AHI}$. Suy ra tứ giác PQIH nội tiếp



b) Vì ΔIME vuông tại I đường cao ID nên DM.DE = $ID^2 = R^2$ (không đổi)

Lại có ME = MD + DE ≥ $2\sqrt{MD.DE} = 2\sqrt{R^2}$ = 2R (BĐT Cauchy) (1)

Dấu "=" xảy ra khi DM = DE $\Leftrightarrow$ ΔIME là tam giác vuông cân

$\Leftrightarrow$ IM = ID$\sqrt{2}$ = R$\sqrt{2}$

Mặt khác $S_{MEF} = 2.S_{MIE} = 2.\frac{1}{2}$ID.ME = ID.ME = R.ME ≥ $2R^2$ (theo (1))

Vậy nếu IM = R$\sqrt{2}$ thì diện tích ΔMEF nhỏ nhất

Câu 6 (2,0đ)

Ta chứng minh bất đẳng thức $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ (*)

Thật vậy: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^3 + b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right] \geq 0$ (luôn đúng với mọi a,b > 0)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$a^4 + b^4 + 1000c \geq ab(a^2 + b^2 + c.abc) = ab(a^2 + b^2 + c^2) > 0 \ \forall a,b,c > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^4+b^4+1000c} \leq \frac{1}{ab(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4+b^4+1000c} \leq \frac{c}{ab(a^2+b^2+c^2)} = \frac{c^2}{abc(a^2+b^2+c^2)}$$

Tương tự: $\frac{b}{a^4+c^4+1000b} \leq \frac{b}{ac(a^2+b^2+c^2)} = \frac{b^2}{abc(a^2+b^2+c^2)}$ (2)

Và $\frac{a}{b^4+c^4+1000a} \leq \frac{a}{bc(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a^2}{abc(a^2+b^2+c^2)}$ (3)

Cộng theo vế các BĐT (1),(2),(3) ta được

$$\frac{a}{b^4+c^4+1000a} + \frac{b}{c^4+a^4+1000b} + \frac{c}{a^4+b^4+1000c} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{abc(a^2+b^2+c^2)} = \frac{1}{1000}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $¿_{abc=1000}^{a=b=c}¿ \Leftrightarrow$ a = b = c = 10

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{1000}$ khi và chỉ khi a = b = c = 10.