|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIÁO DỤC**  TRƯỜNG THPT KHOA HỌC GIÁO DỤC | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2022 - 2023**  **Môn thi:** **Toán 10**  **Mã đề thi: ……**  Đề thi có: 01 trang  *Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)* |

**ĐỀ THI ĐỀ XUẤT**

1. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương sao cho chia hết cho 
2. Giải phương trình



1. Cho tam giác nhọn không cân nội tiếp đường tròn tâm , có đường cao và  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác . Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Gọi  là điểm đối xứng với qua . Đường thẳng cắt các đường thẳng  theo thứ tự tại  và .

a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh rằng nếu  thì là trọng tâm của tam giác .

1. Với  là các số thực dương thỏa mãn .

Chứng minh rằng .

Có  người xếp thành hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra  người sao cho không có hai người liên tiếp trên hàng dọc đó được chọn?

**--- HẾT---**

*(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)*

Người ra đề: Nguyễn Anh Tuấn

Số điện thoại: 0336171443

Mail: tuannguyenqbu@gmail.com

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN**

**KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**

**LẦN THỨ XIV, NĂM HỌC 2022 – 2023**

**HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: Toán 10**

*(Hướng dẫn chấm gồm 5 trang)*

**Câu 1:** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương  sao cho chia hết cho 

**Lời giải:**

Đặt *S* là tập hợp tất cả các số nguyên dương *n* sao cho chia hết cho . Hiển nhiên  Giả sử phản chứng rằng  là một tập hữu hạn. Gọi  là số nguyên dương lớn nhất trong . Vì  chia hết cho nên tồn tại số nguyên dương  sao cho  Dễ thấy  do đó tồn tại một ước nguyên tố  của . Đặt ta sẽ chứng minh  Thật vậy, ta thấy (mod ), nói riêng ta suy ra (mod ). Điều này dẫn đến:

 (mod ).

Nói cách khác  chia hết cho. Mặt khác



Kết hợp các điều trên, với chú ý  chia hết cho , ta nhận được chia hết cho  . Nghĩa là, Mà hiển nhiêndo đó ta nhận được mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ rằng phải là một tập vô hạn và do đó bài toán được chứng minh.

**Câu 2:** Giải phương trình



Điều kiện: 



Đặt ta được hệ phương trình



Trừ (1) cho (2)



Thay (3) vào (2) ta được



Vậy phương trình có 1 nghiệm 

**Câu 3:** Cho tam giác nhọn không cân nội tiếp đường tròn tâm , có đường cao và  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác . Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Gọi  là điểm đối xứng với qua . Đường thẳng cắt các đường thẳng  theo thứ tự tại  và .

a) Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh rằng nếu  thì là trọng tâm của tam giác .

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Ta có: .  Gọi  . Nên tứ giác  nội tiếp  Mà:  (Do  và đồng dạng)  Do là tâm đường tròn nội tiếp  nên  Nên: .  Vậy tứ giác nội tiếp. |  |

b) Vì tứ giác nội tiếp nên .

Suy ra tứ giác  nội tiếp . Gọi  là trung điểm của . (1)

Ta có: 3 điểm  thẳng hàng.

Lại có: .

Mà . (2)

Xét tam giác  với cát tuyến , theo định lý Menelaus ta có:  (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: . Hay  là trung điểm của .

Vậy là trọng tâm của tam giác .

**Câu 4:** Với  là các số thực dương thỏa mãn .

Chứng minh rằng .

**Lời giải**. Gọi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là .

Ta có .

Tương tự  ; .

Từ đó, suy ra



hay . (1)

Mặt khác, từ bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có



.

Kết hợp với bất đẳng thức  hay .

Từ đó ; do đó từ (1), suy ra 

hay  và ta có điều cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi .

**Câu 5:** Có  người xếp thành hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 1011 người sao cho không có hai người liên tiếp trên hàng dọc đó được chọn?

**Lời giải**. Ta đánh số 2023 người bằng các số thứ tự  Một cách chọn thích hợp chính là bộ số  thỏa mãn điều kiện  Vậy ta cần tìm số phần tử của:



Xét ánh xạ

 với 

Thì rõ ràng ta có

1. 
2. 
3. 

Suy ra là phần tử của tập hợp



Dễ thấy ánh xạ là song ánh. Vậy



------HẾT------