

TOÁN 10	BẤT ĐẲNG THỨC
0D4-1	

Contents

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
DẠNG 1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC.....	1
DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC COSI và ỨNG DỤNG.....	2
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	7
DẠNG 1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC.....	7
DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC COSI và ỨNG DỤNG.....	9

PHẦN A. CÂU HỎI

DẠNG 1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1. Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $c > d$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

- A.** $a - c > b - d$ **B.** $a + c > b + d$ **C.** $ac > bd$ **D.** $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng.

- A.** $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ **B.** $a < b \Leftrightarrow ac > bc$
C. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ **D.** $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Leftrightarrow ac < bd$

Câu 3. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- A.** $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ **B.** $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$
C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$ **D.** $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$

Câu 4. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $-3a > -3b$ **B.** $a^2 > b^2$ **C.** $2a > 2b$ **D.** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Câu 5. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $x + |x| \geq x \Leftrightarrow |x| \geq 0$ **B.** $x^2 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq 3$ **C.** $\frac{x+1}{x^2} \geq 0$ **D.** $\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Câu 6. Suy luận nào sau đây đúng?

- A.** $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ **B.** $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$
C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ **D.** $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

Câu 7. Cho a là số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ B. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$
 C. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ D. $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$

Câu 8. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a ?

- A. $6a > 3a$ B. $3a > 6a$ C. $6 - 3a > 3 - 6a$ D. $6 + a > 3 + a$

Câu 9. (Độ Cần Vinh Phúc-lần 1-2018-2019) Cho 4 số a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $a < b$ và $c < d$. Kết quả nào sau đây đúng nhất?

- A. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ B. $ac < bd$ C. $a - d < b - c$ D. $a - c < b - d$

Câu 10. Cho a, b là các số thực bất kì. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ B. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$ D. $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$ B. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$
 C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Câu 12. Cho $a > b$ khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $2a < 2b$ B. $a > b - c, \forall c \in \mathbb{R}$ C. $-a < -b$ D. $ac > cb, \forall c \in \mathbb{R}$

Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $|a + b| \leq |a| + |b|$ B. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, (a > 0)$
 C. $a > b \Leftrightarrow ac > bc, (\forall c \in \mathbb{R})$ D. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0)$

Câu 14. Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$ B. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$ C. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$ D. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 1$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$ B. $x + y > 0$ thì $x > 0$ hoặc $y > 0$
 C. $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$ D. $x + y > 0$ thì $x \cdot y > 0$

Câu 16. Cho $a > b > 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1}$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $\frac{a^2 - 1}{a} > \frac{b^2 - 1}{b}$ D. $a^2 > b^2$

DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC COSI và ỨNG DỤNG

Câu 17. Bất đẳng thức Côsi cho hai số a, b không âm có dạng nào trong các dạng được cho dưới đây?

A. $\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{a+b}$ B. $\frac{a-b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$ C. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ D. $\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$

Câu 18. Cho ba số không âm a, b, c . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ B. $abc \geq 3\sqrt[3]{a+b+c}$ C. $a+b+c \geq 3\sqrt{abc}$ D. $a+b+c \geq 4\sqrt[3]{abc}$

Câu 19. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a+b=4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tích $a.b$ có giá trị nhỏ nhất là 2. B. Tích $a.b$ không có giá trị lớn nhất.
C. Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất là 4. D. Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất là 2.

Câu 20. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\begin{cases} a \geq x \\ b \geq y \end{cases} \Rightarrow a+b \geq x+y$ B. $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a > 0$
C. $a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \forall a, b \geq 0$ D. $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \forall a, b \neq 0$

Câu 21. Cho các mệnh đề sau

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ (II) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (III)

Với mọi giá trị của a, b, c dương ta có

A. (I) đúng và (II), (III) sai. B. (II) đúng và (I), (III) sai.
C. (III) đúng và (I), (II) sai. D. (I), (II), (III) đúng.

Câu 22. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \frac{16}{x}, x > 0$ bằng

A. 4. B. 24. C. 8. D. 12.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là

A. $4\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $2 - \sqrt{2}$. D. 0.

Câu 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2}; x \neq 0$ là

A. 9. B. -3. C. 12. D. 10.

Câu 26. Hàm số $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x}$ với $0 < x < 1$, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{a}{b}$ (a, b nguyên dương, phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 4. B. 139. C. 141. D. 7.

Câu 27. Cho a là số thực bất kì, $P = \frac{2a}{a^2+1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a .

A. $P > -1$. B. $P > 1$. C. $P < -1$. D. $P \leq 1$.

- Câu 28.** Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1}$ với $x > 1$.
- A. $\frac{7}{4}$. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{5}{4}$.
- Câu 29.** (Độ Cần Vĩnh Phúc-lần 1-2018-2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$ là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 30.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là
- A. 2. B. $\frac{5}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.
- Câu 31.** Cho $x \geq 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng
- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Câu 32.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2017}{\sqrt{x-2018}}$ là
- A. 2. B. $\frac{2017}{2018}$. C. $\frac{2018}{2017}$. D. 2019.
- Câu 33.** Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{6-2x} + \sqrt{3+2x}$.
- A. M không tồn tại; $m = 3$. B. $M = 3$; $m = 0$.
C. $M = 3\sqrt{2}$; $m = 3$. D. $M = 3\sqrt{2}$; $m = 0$.
- Câu 34.** (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định) Cho biểu thức $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, với $x > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 35.** Cho các số thực a, b thỏa mãn $ab > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1$.
- A. 3. B. -1. C. 1. D. -3.
- Câu 36.** (Chuyên Lam Sơn-KSCL-lần 2-2018-2019) Cho x, y là các số thực thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(x+2y)^3 + 8xy^3 \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8x^4 + \frac{1}{2}(y^4 - 2xy)$ bằng
- A. $-\frac{1}{16}$. B. -4. C. 0. D. -2.
- Câu 37.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y$.

A. $\max P = 9 - 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

B. $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 - 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 - 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

C. $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

D. $\max P = 3 + \sqrt{15}$ đạt được khi $\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}$.

Câu 38. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x + y$ bằng

A. $9 + 3\sqrt{5}$ B. $9 + 3\sqrt{3}$ C. $9 - 3\sqrt{5}$ D. $9 + 3\sqrt{15}$

Câu 39. (THUẬN THÀNH SỐ 2 LẦN 1_2018-2019) Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là

A. 9. B. 16. C. 18. D. 1.

Câu 40. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(3 - xy - xz) + y + 6z \leq 5xz(y + z)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + y + 6z$ là

A. $3\sqrt{6}$ B. 9 C. $\sqrt{30}$ D. $6\sqrt{2}$

Câu 41. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$ là

A. 2. B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3.

Câu 42. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}$?

A. 63. B. 36. C. 35. D. 34.

Câu 43. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > \frac{1}{2}, c > \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{2b+1} + \frac{3}{3c+2} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-1)(2b-1)(3c-1)$

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 44. Cho a, b, c, d là các số thực thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$ và $c^2 + d^2 + 25 = 6c + 8d$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3c + 4d - (ac + bd)$.

A. $25 + 4\sqrt{2}$. B. $25 + 5\sqrt{2}$. C. $25 - 5\sqrt{2}$. D. $25 + \sqrt{10}$.

Câu 45. Cho $0 < x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

A. 3. B. 4. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 46. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Biểu thức

$P = \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}}$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 47. Cho 4 số nguyên không âm a, b, c, d thỏa $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36$ và $2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

A. $\min Q = 30$. B. $\min Q = 32$. C. $\min Q = 42$. D. $\min Q = 14$.

Câu 48. (THI HK1 LỚP 11 THPT VIỆT TRÌ 2018 - 2019) Cho ba số thực dương x, y, z . Biểu thức

$P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\frac{5}{2}$. B. 9. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 49. (TH&TT LẦN 1 – THÁNG 12) Cho $a, b, c > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$E = \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2\sqrt{2})$. B. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$. C. $(1; 3)$. D. $\left(\frac{17}{5}; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 50. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$F = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$ là:

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 51. Cho các số thực dương a, b, c, m, n, p thỏa mãn các điều kiện $2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \leq 7$ và

$S = \frac{2(2a)^{2018}}{m} + \frac{2(2b)^{2018}}{n} + \frac{3c^{2018}}{p}$ thì khẳng định đúng là:

A. $42 < S \leq 7 \cdot 6^{2018}$. B. $S > 6^{2018}$. C. $7 \leq S \leq 7 \cdot 6^{2018}$. D. $4 \leq S \leq 42$.

- Câu 52.** Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $0 < P \leq \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2} < P$. **C.** $\frac{4}{3} \leq P$. **D.** $\frac{3}{2} \leq P$.
- Câu 53.** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$ là
A. $3\sqrt[3]{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 54.** (ĐỀ THI THỬ CHUYÊN NGUYỄN DU-ĐẮK LẮK lần 2) Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Giá trị nhỏ nhất $P = a^2 + b^2 + c^2$ bằng
A. $\frac{4}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{8}{3}$.
- Câu 55.** Người ta dùng 100m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào được?
A. 1350m^2 . **B.** 1250m^2 . **C.** 625m^2 . **D.** 1150m^2 .
- Câu 56.** Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 300 m, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng
A. 22500m^2 . **B.** 900m^2 . **C.** 5625m^2 . **D.** 1200m^2 .
- Câu 57.** (NGÔ GIA TỰ_VĨNH PHÚC_LẦN 1_1819) Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48m^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là
A. $16\sqrt{3}$. **B.** $20\sqrt{3}$. **C.** 16. **D.** 20.
- Câu 58.** (ĐỀ THI HỌC KÌ I LỚP 12 - QUANG TRUNG - ĐÔNG ĐA - HÀ NỘI) Một miếng bìa hình tam giác đều ABC , cạnh bằng 16. Học sinh Minh cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC ; P, Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?
A. $16\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $32\sqrt{3}$. **D.** $34\sqrt{3}$.
- Câu 59.** Một miếng giấy hình tam giác vuông ABC (vuông tại A) có diện tích S , có M là trung điểm BC . Cắt miếng giấy theo hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng qua M cắt cạnh AB tại E , đường thẳng qua M cắt cạnh AC tại F . Khi đó miếng giấy tam giác MEF có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu?
A. $\frac{S}{3}$. **B.** $\frac{3S}{5}$. **C.** $\frac{3S}{8}$. **D.** $\frac{S}{4}$.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

DẠNG 1. TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

- Câu 1.** Chọn **B.**

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$$

Theo tính chất bất đẳng thức,

- Câu 2.** Chọn **C.**

Ta có: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Câu 3. Chọn B.

Không có tính chất hiệu hai vế bất đẳng thức.

Ví dụ $\begin{cases} 1 < 2 \\ -5 < 1 \Rightarrow 1 - (-5) < 2 - 1 \end{cases}$, Sai.

Câu 4. Chọn C.

$a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b$.

Câu 5. Chọn A.

Câu 6. Chọn A.

$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

đúng theo tính chất nhân hai bất đẳng thức dương cùng chiều.

Câu 7. Chọn D.

Câu 8. Chọn D.

Ta có $6 + a > 3 + a \Leftrightarrow 6 + a - 3 - a > 0 \Leftrightarrow 3 > 0$ với mọi số thực a nên Chọn **D**.

Câu 9. Chọn C

Từ $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d \Rightarrow a - d < b - c$

Câu 10. Chọn D

Các mệnh đề A, B, C đúng.

Mệnh đề D sai. Ta có phản ví dụ: $-2 > -5$ nhưng $(-2)^2 = 4 < 25 = (-5)^2$.

Câu 11. Chọn D.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Câu 12. Chọn C

Câu A sai ví dụ $2 > 0$ nhưng $2.2 > 2.0$

Câu B sai với $a = 3, b = 2, c = -2$

Câu B sai với

Câu C đúng vì $-a < -b \Leftrightarrow a > b$

$c \neq 0$.

Câu D sai khi

Câu 13. Chọn C

Các mệnh đề A, B đều đúng theo tính chất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Mệnh đề D đúng theo bất đẳng thức Cô- Si cho 2 số không âm a và b .

Mệnh đề C sai khi $c < 0$ (vì khi nhân 2 vế của một bất đẳng thức với một số âm thì ta được bất đẳng thức mới đổi chiều bất đẳng thức đã cho).

Câu 14. Chọn A.

Với $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < x < 1 \Rightarrow$ A đúng.

Chọn $\begin{cases} x = -3 < 1 \\ y = -1 < 1 \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{x}{y} = 3 > 1 \Rightarrow$ B, C sai.

Chọn $\begin{cases} x = -1 < 1 \\ y = -3 < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y = 2 > 1 \Rightarrow$ D sai.

Câu 15. Chọn B.

Nếu $x + y > 0$ thì ít nhất một trong hai số x, y phải dương.

Thật vậy nếu $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x + y \leq 0$ mâu thuẫn.

Câu 16. Chọn A.

$$a > b > 0 \Leftrightarrow a + 1 > b + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} > \frac{b}{b+1}.$$

DẠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC COSI và ỨNG DỤNG

Câu 17. Chọn C

Câu 18. Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

Câu 19. Chọn C

Với mọi số thực a và b ta luôn có: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow ab \leq 4$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2$.

Vậy tích ab lớn nhất bằng 4.

Câu 20. Chọn D.

Theo tính chất của bất đẳng thức và bất đẳng thức Côsi thì A, B, C luôn đúng.

Ta có nếu $b < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ là sai.

Câu 21. Chọn D.

Với mọi a, b, c dương ta luôn có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b. \text{ Vậy } (I) \text{ đúng.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = c. \text{ Vậy } (II) \text{ đúng.}$$

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = c. \text{ Vậy } (III) \text{ đúng.}$$

Câu 22. Chọn D.

Ta có: $P = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \stackrel{\text{Cosi}}{\geq} 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 12$. Vậy $P_{\min} = 12$.

Câu 23. Chọn C.

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $2x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{6}$ suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 24. Chọn B.

$A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2; 4]$.

Ta có: $A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \geq 2 \Rightarrow A \geq \sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ hoặc $x = 4$.

Câu 25. Chọn A.

Xét hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2} = 4x^2 + \frac{9}{x^2} - 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $4x^2 + \frac{9}{x^2} \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot \frac{9}{x^2}} = 12 \Rightarrow y \geq 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4x^4 - 3x^2 + 9}{x^2}$ là 9 khi $4x^2 = \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 26. Chọn D.

Theo BĐT CAUCHY – SCHAWARS: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$, trong đó các số $b_i > 0$

Vì $0 < x < 1$ nên $x > 0$ và $1 - x > 0$

Từ đó $y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} = \frac{2^2}{x} + \frac{3^2}{1-x} \geq \frac{(2+3)^2}{x+1-x} = 25$

Suy ra $y_{\min} = 25$ khi $x = \frac{2}{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow a + b = 7$.

Câu 27. Chọn D.

Với a là số thực bất kì, ta có: $(a - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2a}{a^2 + 1}$

Hay $P \leq 1$.

Câu 28. Chọn D

Với $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$

$P = \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1} = \left(\frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{4}$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương $\frac{x-1}{4}, \frac{1}{x-1}$ có

$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{4} + \frac{1}{x-1} \geq 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x-1}{4} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3$ (vì $x > 1$)

Do đó $P \geq \frac{5}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{4}$ (khi $x = 3$).

Câu 29. Chọn B

Hàm số xác định khi: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})} = \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} - 1)^2}$

$= |\sqrt{x^3 + 1} + 1| + |1 - \sqrt{x^3 + 1}| \geq 2 \quad \forall x \geq -1$

$$(\sqrt{x^3+1}+1)(1-\sqrt{x^3+1})\geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi:

$$\text{Do } \sqrt{x^3+1}+1 > 0 \quad \forall x \geq -1 \text{ nên } -\sqrt{x^3+1}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Với $x=0$ ta có: $y(0)=2 \Rightarrow \min y=2$ tại $x=0$.

Câu 30.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x=3. \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Vậy hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{5}{2}$.

Câu 31.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) \geq 0 \text{ và } [f(x)]^2 = \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{8} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$ đạt được khi $x=4$.

Câu 32. Chọn A

Tập xác định của hàm số $D=(2018; +\infty)$

$$\text{Ta có } y = \frac{x-2017}{\sqrt{x-2018}} = \frac{x-2018+1}{\sqrt{x-2018}} = \sqrt{x-2018} + \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$$

$$\sqrt{x-2018} + \frac{1}{\sqrt{x-2018}} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{x-2018} = \frac{1}{\sqrt{x-2018}} \Leftrightarrow x-2018=1 \Leftrightarrow x=2019$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi và chỉ khi $x=2019$.

Câu 33. Chọn C

$$\text{Tập xác định của hàm số } D = \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$$

$$\text{Ta thấy } y > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$$

$$\text{Có } y^2 = 9 + 2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \geq 9 \quad \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]. \text{ Suy ra } y \geq 3; \quad \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy $\begin{matrix} \text{Min } y = 3 \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \end{matrix}$.

Theo BĐT Cô Si ta có $2\sqrt{(6-2x)(3+2x)} \leq (6-2x) + (3+2x) = 9$ với $\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Suy ra $y^2 \leq 18, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \Rightarrow y \leq 3\sqrt{2}, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

Dấu bằng xảy ra khi $6-2x=3+2x \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$. Vậy $\begin{matrix} \text{Max } y = 3\sqrt{2} \\ x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right] \end{matrix}$.

Câu 34. Chọn A.

Với $x > 1$, ta có $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = 2$.

Vậy $\text{Min } f(x) = 2$ khi $\sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 35. Chọn D

Ta có $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1 = \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1\right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a} + 1\right) - 3 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1\right)^2 - 3 \geq -3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b \neq 0$.

Vậy $\min P = -3$ khi $a = b \neq 0$.

Câu 36. Chọn A

Ta có $P = 8x^4 + \frac{1}{2}y^4 - xy \geq 4(xy)^2 - xy = \left(2xy - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 16x^4 = y^4 \\ 8xy = 1 \\ (x+2y)^3 + 8xy \geq 2 \end{cases} \quad (*)$.

Dễ thấy $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ là một nghiệm của (*) nên $\min P = -\frac{1}{16}$.

Câu 37. Chọn C

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -2$.

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$.

$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 9(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2})^2 \leq 9 \cdot 2 \cdot (x+y+3)$ (theo bất đẳng thức Bunhia – Côpxki)

$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 18(x+y) - 54 \leq 0$

$$\Rightarrow x + y \leq 9 + 3\sqrt{15} \Rightarrow P \leq 9 + 3\sqrt{15}.$$

$$\begin{cases} x + y = 9 + 3\sqrt{15} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases} (t/m).$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi

Câu 38. Chọn D

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -2$.

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 9(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2})^2 \leq 9 \cdot 2 \cdot (x+y+3) \quad (\text{theo bất đẳng thức Bunhia – Côpxki})$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 18(x+y) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow x + y \leq 9 + 3\sqrt{15} \Rightarrow P \leq 9 + 3\sqrt{15}.$$

$$\begin{cases} x + y = 9 + 3\sqrt{15} \\ \sqrt{x+1} = \sqrt{y+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases} (t/m).$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \frac{10 + 3\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{8 + 3\sqrt{15}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$ đạt được khi

Câu 39. Chọn B

$$xy(x+y) = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow \frac{xy(x+y)}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2y^2}$$

Ta có

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 - \frac{3}{xy}.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, b = \frac{1}{xy} \quad (a^2 \geq 4b) \Rightarrow a = a^2 - 3b \Rightarrow b = \frac{a^2 - a}{3}.$$

Đặt

$$M = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^3 - \frac{3}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a^3 - 3ab = a^3 - 3a \cdot \frac{a^2 - a}{3} = a^2.$$

Biến đổi

$$\text{Ta có } \frac{a^2 - a}{3} = b \leq \frac{a^2}{4} \Rightarrow 3a^2 \geq 4a^2 - 4a \Leftrightarrow a^2 - 4a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4 \Rightarrow M = a^2 \leq 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2} \Rightarrow M_{\max}=16$.

Câu 40. Chọn A

Ta có: $x(3-xy-xz)+y+6z \leq 5xz(y+z)$

$$\Leftrightarrow 3x+y+6z \leq x^2y+x^2z+5xz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 3x+y+6z \leq x(y+z)(x+5z)$$

$$\Rightarrow 2P \leq 2x(y+z)(x+5z) \leq \left(\frac{3x+y+5z}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2P \leq \frac{P^3}{27} \Leftrightarrow P^2 \geq 54 \Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 2x=y+z=x+5z \\ 3x+y+6z=3\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}, y=\frac{9\sqrt{6}}{10}, z=\frac{\sqrt{6}}{10}$

Câu 41. Chọn B

Áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$\begin{aligned} T &= \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \right) + \frac{8}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \cdot \frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}} + \frac{8}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 42.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số thực dương ta có:

$$\frac{1}{a} + 36a \geq 12 \quad (1)$$

$$\frac{4}{b} + 36b \geq 24 \quad (2)$$

$$\frac{9}{c} + 36c \geq 36 \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) ta có $P+36(a+b+c) \geq 72 \Rightarrow P \geq 36$. Dấu bằng xảy ra khi

và chỉ khi $\frac{1}{a}=36a; \frac{4}{b}=36b; \frac{9}{c}=36c$ và $a+b+c=1$ hay $a=\frac{1}{6}; b=\frac{1}{3}; c=\frac{1}{2}$.

Câu 43. Chọn A

Đặt $x=a-1, y=2b-1, z=3c-1$. Khi đó bài toán trở thành “Cho $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} \geq 2$, với x, y, z dương. Tìm giá trị lớn nhất của $P=xyz$ ”.

Ta có

$$\frac{1}{x+1} \geq 1 - \frac{2}{y+2} + 1 - \frac{3}{z+3} = \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+3} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(y+2)(z+3)}} \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{2}{y+2} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(x+1)(z+3)}} \quad (2)$$

$$\frac{3}{z+3} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(x+1)(y+2)}} \quad (3)$$

Nhân cả hai vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{6}{(x+1)(y+2)(z+3)} \geq \frac{8xyz}{(x+1)(y+2)(z+3)} \Leftrightarrow xyz \leq \frac{3}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-1)(2b-1)(3c-1)$ là $\frac{3}{4}$.

Câu 44. Chọn B

$$c^2 + d^2 + 25 = 6c + 8d \Leftrightarrow (c-3)^2 + (d-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ d=4 \end{cases}$$

Theo đề ra ta có:

$$P = 25 - (3a + 4b)$$

Do vậy

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$|3a + 4b| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(a^2 + b^2)} \stackrel{a^2 + b^2 = 2}{=} 5\sqrt{2} \rightarrow -5\sqrt{2} \leq 3a + 4b \leq 5\sqrt{2}$$

$$\text{Hay } 5\sqrt{2} \geq -(3a + 4b) \geq -5\sqrt{2} \rightarrow 25 + 5\sqrt{2} \geq 25 - (3a + 4b) \geq 25 - 5\sqrt{2}$$

$\rightarrow 25 + 5\sqrt{2} \geq P \geq 25 - 5\sqrt{2}$. Vậy $\max P = 25 + 5\sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ \frac{3}{a} = \frac{4}{b} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ b = \frac{4}{3}a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a < 0 \\ a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3\sqrt{2}}{5} \\ b = -\frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Câu 45. Ta có

$$S = 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 2\left(y - x + \frac{2}{3}\right)(y-1) + \left(z - x + \frac{2}{3}\right)(z-1) + \left(x + \frac{1}{3}\right)(3x + 2y + z - 4) + \frac{10}{3} \leq \frac{10}{3}$$

Chọn A

Câu 46.

Chúng minh được: với $a, b, c > 0$ ta có: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ (1).

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Dấu “=” xảy ra khi

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{1+8a^3} = \sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)} \leq \frac{(1+2a)+(1-2a+4a^2)}{2} = 1+2a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} \geq \frac{1}{1+2a^2}$$

Tương tự ta được:

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \geq \frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2b^2} + \frac{1}{1+2c^2} \geq \frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)} \quad (\text{theo (1)}).$$

$$\Rightarrow P \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a^2=1-2a+4a^2 \\ 1+2b^2=1-2b+4b^2 \\ 1+2c^2=1-2c+4c^2 \\ \frac{1}{1+2a^2}=\frac{1}{1+2b^2}=\frac{1}{1+2c^2} \\ a^2+b^2+c^2=3; a, b, c > 0 \Leftrightarrow a=b=c=1. \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\min P = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Vậy

Câu 47. Chọn D

Từ $2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6$ (*) suy ra b là số chẵn. Mặt khác do $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36$ (**), ta được $2b^2 \leq 36$. Do đó $b \in \{0, 2, 4\}$.

Xét $b = 4$. Từ (*) ta có $d^2 - a^2 = 5 \Rightarrow d^2 \geq 5$ và từ (**) ta có $d^2 \leq 9$. Do đó $d = 3 \Rightarrow a = b = c = 0$ (loại vì không thỏa (*)).

Xét $b = 2$. Từ (*) ta có $a^2 - d^2 = 1 \Rightarrow (a - d)(a + d) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a - d = 1 \\ a + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = 0 \end{cases}$. Thay vào (*) ta

giải được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$. Vậy $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 = 14$.

Xét $b = 0$. Từ (*) và $0 \leq a - d \leq a + d$, ta có:

$$a^2 - d^2 = 3 \Rightarrow (a - d)(a + d) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a - d = 1 \\ a + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c^2 = \frac{28}{3} \\ d = 1 \end{cases} \quad (\text{mâu thuẫn vì } c \in \mathbb{N}).$$

Thay vào (*) ta giải được

Kết luận $Q = 14$. Chọn **D**.

Câu 48. Chọn D

Vì x, y, z là các số thực dương suy ra $\frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy}$ là các số dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{yz} \cdot \frac{y}{xz}} = \frac{2}{z} \quad (1)$$

$$\frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{yz} \cdot \frac{z}{xy}} = \frac{2}{y} \quad (2)$$

$$\frac{z}{xy} + \frac{y}{zx} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{z}{xy} \cdot \frac{y}{zx}} = \frac{2}{x} \quad (3)$$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) ta được
Áp dụng BĐT Cô – si ta có:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{2y}} = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z}} = \frac{3}{2} \quad (6)$$

Cộng các vế của (4), (5) và (6) ta được

$$P \geq \frac{9}{2} \quad \text{Suy ra } P \geq \frac{9}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z$$

Câu 49. Chọn B

$$\begin{aligned} E &= \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 + \frac{b}{2c}\right) \left(1 + \frac{c}{2a}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{b}{2c}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2a}\right) \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2b}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2c}} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2a}} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức E bằng $\frac{27}{8}$.

Câu 50. Chọn B

Áp dụng hệ quả của BĐT Côsi ta có:

$$(2x + y + z) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = (x + x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1).$$

$$\frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2); \quad \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right) \quad (3)$$

Tương tự ta có :

Cộng các BĐT (1),(2),(3) về theo vế ta có:

$$F = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1.$$

Vậy $F_{\max} = 1$ đạt được khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Câu 51. Chọn B

+ Theo bài ra 6 số $a, b, c, m, n, p > 0$, áp dụng BĐT Cauchy cho 2018 số dương, gồm 2017 số

$6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m}$ và 1 số là $\frac{(2a)^{2018}}{m}$ ta được:

$$2017 \cdot 6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m} + \frac{(2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot \sqrt[2018]{\left(6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m}\right)^{2017} \cdot \frac{(2a)^{2018}}{m}} = 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 2a$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2017 \cdot 6^{2018} \cdot \sqrt[2017]{m} + \frac{2 \cdot (2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4a$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot (2a)^{2018}}{m} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4a - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 2 \cdot \sqrt[2017]{m} \quad (1)$$

+ Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{2 \cdot (2b)^{2018}}{n} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 4b - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 2 \cdot \sqrt[2017]{n} \quad (2)$$

$$\frac{3 \cdot c^{2018}}{p} \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 3c - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \quad (3)$$

Cộng 3 BĐT (1), (2), (3) theo vế ta có:

$$S \geq 2018 \cdot 6^{2017} (4a + 4b + 3c) - 2017 \cdot 6^{2018} (2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p})$$

Theo bài ra: $2 \cdot \sqrt[2017]{m} + 2 \cdot \sqrt[2017]{n} + 3 \cdot \sqrt[2017]{p} \leq 7$ và $4a + 4b + 3c \geq 42$ nên ta có:
 $S \geq 2018 \cdot 6^{2017} \cdot 42 - 2017 \cdot 6^{2018} \cdot 7 = 7 \cdot 6^{2018} > 6^{2018} \Rightarrow$ Chọn **B**.

Câu 52.

Hướng dẫn giải

Chọn **D**.

Ta có:
$$P + 3 = \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\forall x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ta được $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Do đó $P + 3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$; đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 53. Chọn B.

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3 \geq 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{3z}$.

Tương tự, ta có: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \sqrt{3x}$, $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3y}$.

Suy ra: $P \geq \sqrt{3x} + \sqrt{3y} + \sqrt{3z} \geq 3\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{xyz}} = 3\sqrt{3}$.

Đấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P = 3\sqrt{3}$.

Câu 54. Chọn A

Kiểm tra $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta được

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + ax + b + \frac{c}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -ax - b - \frac{c}{x}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 = \left(ax + \frac{c}{x} + b \right)^2 \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} \stackrel{\text{Cô-si}}{\geq} \frac{4}{3}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Câu 55. Chọn B.

Đặt cạnh của hình chữ nhật lần lượt là x, y ($x, y > 0$; y là cạnh của bức tường).

Ta có: $2x + y = 100$ (1).

$$S = xy = 2x \cdot \frac{y}{2} \stackrel{\text{Casi}}{\leq} 2 \cdot \left(\frac{x + \frac{y}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(2x + y)^2 = \frac{1}{8}(100)^2 = 1250$$

Diện tích hình chữ nhật là

Vậy $S_{\max} = 1250 \text{ m}^2$. Đạt được khi $x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2x \Rightarrow x = 25 \text{ m}$; $y = 50 \text{ m}$.

Câu 56. Chọn C

Giả sử hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là a, b ($0 < a, b < 150$), đơn vị: m .

Từ giả thiết, ta có $a + b = 150$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = a.b$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có

$$\sqrt{a.b} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a.b} \leq 75 \Leftrightarrow ab \leq 5625 \Leftrightarrow S \leq 5625$$

Dấu bằng xảy ra $\begin{cases} a = b \\ a + b = 150 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 75$.

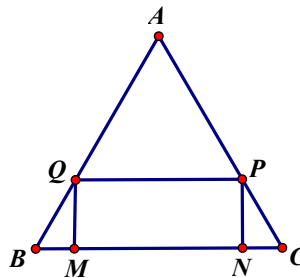
Hay $\max S = 5625 \text{ m}^2$.

Câu 57. Chọn A

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật lần lượt là a, b với $a.b = 48$.

Khi đó chu vi hình chữ nhật $P = 2.(a + b) \geq 2.2\sqrt{ab} = 16\sqrt{3}$.

Câu 58. Chọn C



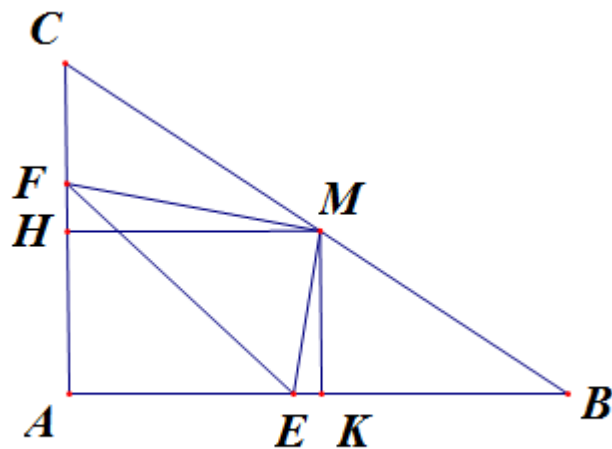
Đặt $BM = x \Rightarrow MN = 16 - 2x$ với $0 < x < 8$.

$\triangle QBM$ vuông tại $M \Rightarrow QM = BM \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = (16 - 2x)x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(8 - x)x \leq 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{8 - x + x}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq 32\sqrt{3}$. Vậy tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng $32\sqrt{3}$ khi $x = 4$.

Câu 59. Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AC, AB .
 Khi đó ta luôn có $ME \geq MK$, $MF \geq MH$.

Vì tam giác MEF vuông tại M nên $S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2} ME \cdot MF \geq \frac{1}{2} MH \cdot MK$.

Do M là trung điểm BC nên $MK = \frac{1}{2} AC$, $MH = \frac{1}{2} AB$.

Vì vậy $S_{\triangle MEF} \geq \frac{1}{2} MH \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{S}{4}$.