PHÒNG GD&ĐT THANH OAI	**ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 8**
TRƯỜNG THCS LIÊN CHÂU	**Năm học: 2013-2014**

Câu 1. (6 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$a.(2x^2+x-2013)^2+4.(x^2-5x-2012)^2=4.(2x^2+x-2013).(x^2-5x-2012)$

b) $|x-1|+|x+3|=4$

2) Chứng minh bất đẳng thức sau:

$x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$ với mọi x,y,z

Câu 2. (5 điểm)

1. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 24, $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư.
2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2-xy=6x-5y-8$

Câu 3. (2 điểm) Cho $a,b>0$ và $a+b=1.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\left(1+\frac{1}{a}\right)^2+\left(1+\frac{1}{b}\right)^2$$

Câu 4. (7 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC>AB)$, đường cao AH $(H\in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD=HA.$ Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng $\Delta BEC\sim\Delta ADC.$ Tính độ dài đoạn BE theo $m=AB$
2) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE. Chứng minh $\Delta BHM\sim\Delta BEC.$ Tính số đo của góc AHM
3) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh $\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{HD}{AH+HC}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1)

a) Đặt: $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

Khi đó, ta có:

$2x^2 + x - 2013 = 2(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$

$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2011}{11}$

$S = \left\{\dfrac{-2011}{11}\right\}$

b) Lập bảng xét dấu các nhị thức : $x - 1$ và $x + 3$

Xét $x < -3$ (1)

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - x - 3 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3$ (không thỏa (1))

Xét $-3 \le x \le 1$ (2)

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - x + x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ (Thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 1$

Xét $x \ge 1$ (3)

Phương trình $\Leftrightarrow x - 1 + x + 3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn (3))

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm $-3 \le x \le 1$

2) Có $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \ge 0$ với mọi x, y, z

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + xz)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + xz \quad (dfcm)$

Câu 2.

1) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$.

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4).(-5x) + ax + b$

Xét các giá trị riêng của x sao cho $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Với $x=2 \Rightarrow f(2)=2a+b$

Với $x=-2 \Rightarrow f(-2)=-2a+b$

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$

Do đó: $f(x)=(x^2-4)(-5x)+\dfrac{7}{2}x+17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x)=-5x^3+\dfrac{47}{2}x+17$

2) $x^2-xy=6x-5y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+8=y(x-5)$ (2)

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-6x+8}{x-5}$ (vì $x=5$ không là nghiệm của phương trình (2))

$\Leftrightarrow y=x-1+\dfrac{3}{x-5}$. Vì x,y nguyên nên $x-5$ là ước của 3

Hay $x-5\in\{-1;3;1;-3\}$ hay $x\in\{4;6;8;2\}$

Khi $x=2 \Rightarrow y=0$ Khi $x=4 \Rightarrow y=0$

Khi $x=6 \Rightarrow y=8$ Khi $x=8 \Rightarrow y=8$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x,y)\in\{(2,0);(4,0);(6,8);(8,8)\}$

Câu 3.

$$M=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)^2+\left(1+\frac{a+b}{b}\right)^2 \quad (Vi \quad a+b=1)$$

$$M=\left(2+\frac{b}{a}\right)^2+\left(2+\frac{a}{b}\right)^2$$

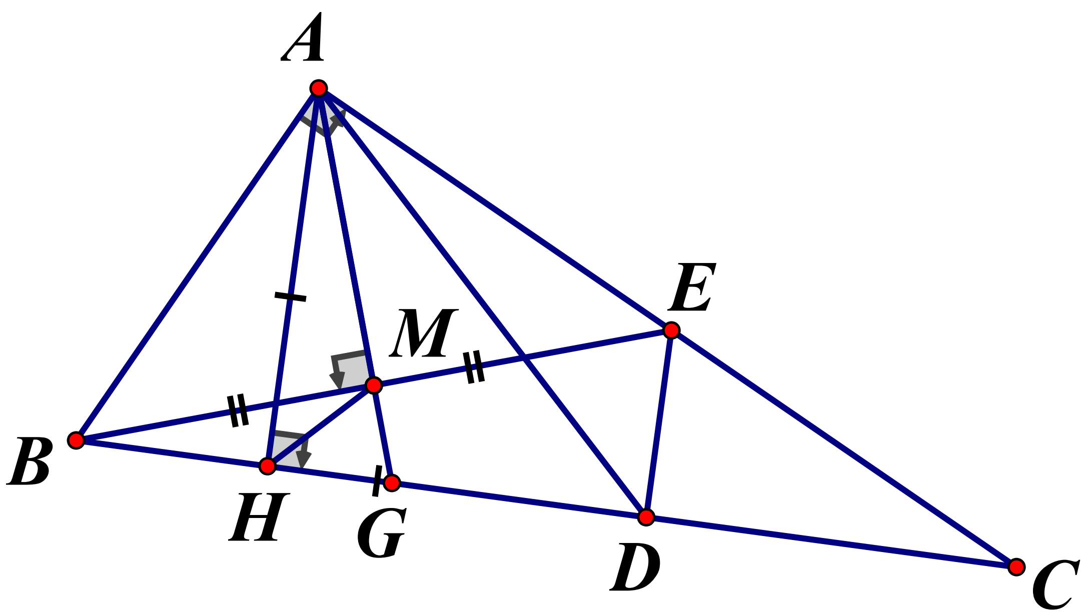
$$M=4+\frac{4b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+4+\frac{4a}{b}+\frac{a^2}{b^2}$$

$$M=8+\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 8+2+4.2=18(Co-si)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a=b \,\&\, a+b=1 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy $MinM = 18 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Câu 4.



a) Chứng minh $\Delta CDE \sim \Delta CAB(g.g) \Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB}$

Hai tam giác ADC và BEC có:

$\widehat{C}$ chung; $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB}(cmt) \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta BEC(c.g.c)$

Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135^0$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo gt)

Nên $\widehat{AEB} = 45^0$. Do đó tam giác ABE vuông cân tại A. suy ra

$BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

b) Ta có: $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC}$ ....$(do\ \Delta BEC \sim \Delta ADC)$

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

Nên $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AH\sqrt{2}}{AC} = \dfrac{AH}{\sqrt{2}AC}$

Mà $\Delta ABH \sim \Delta CBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{BH}{AB}$

Nên $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{BH}{BE}\left(BE = \sqrt{2}AB\right)$

Do đó $\Delta BHM \sim \Delta BEC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135^0 \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^0$

c) Tam giác ABE vuông cân tại A, nên tia AM còn là phân giác $\widehat{BAC}$

Suy ra AG là phân giác $\widehat{BAC}$ suy ra : $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$

Mà $\frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC}(\Delta ABC \sim \Delta DEC) = \frac{AH}{HC}(ED // AH) = \frac{HD}{HC}$

Do đó: $\frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB + GC} = \frac{HD}{HD + HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$