TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG- QUẢNG NAM	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DH& ĐBBB NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ ĐỀ NGHỊ	**MÔN THI: TOÁN LỚP 11**
	*(Thời gian làm bài **180** phút không kể thời gian giao đề)*

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1 (4 điểm).

Nhận xét được $x_n > 0, \forall n \geq 1.$

Theo BĐT Cô si, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} \geq 2\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, suy ra $x_n \geq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}} > 2, \forall n \geq 2.$ (1 điểm)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} = f(x_n)$$

Ta có: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2(n+1)}{n}.\frac{1}{x}$

0< $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2(n+1)}{n}.\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2}$ (do (*)) (1 điểm)

Với mọi x,y $\in$[2,+∞) , theo định lí Lagrang- có c$\in$(x,y) hay c$\in$(y,x) sao cho:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = |f'(c)||x-y|$$
$$\Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$
(1 điểm)

Do vậy f là ánh xạ co suy ra dãy (x_n) có giới hạn L

Trong phương trình xác định dãy cho *n* dần tới vô cùng ta được $L = \frac{1}{2}L + \frac{2}{L} \Leftrightarrow L = 2$.

Do đó kết luận $Lim x_n = 2$ (1 điểm)

Câu 2 (4 điểm).

Trường hợp 1 : $\text{Deg}\, P = 0, \deg Q = 0$ không thỏa

Trường hợp 2 : $DegP = p \geq 1, DegQ = q \geq 1$

Nhận xét : Đa thức $DegP\left(Q\right) = 15$ và có hệ số cao nhất là 1

Nên hệ số cao nhất của $P(x), Q(x)$ đều bằng 1

Đa thức $Q(x)$ có hế số tự do bằng 0 (vì $Q(0) = 0$)

Đa thức $P\left(Q(x)\right)$ có tập nghiệm là $S = \{1, 2, 3, ..., 15\}$

Mặt khác $Deg\left(P(Q)\right) = p.q$ (0,5 điểm)

Cân bằng bậc ta có $p.q = 15 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 15 \end{cases}, \begin{cases} q = 15 \\ p = 1 \end{cases}, \begin{cases} q = 3 \\ p = 5 \end{cases}, \begin{cases} q = 5 \\ p = 3 \end{cases}$ 0,5 điểm)

+Khi $\begin{cases} q = 1 \\ p = 15 \end{cases}$ Thì ta có $\begin{cases} Q(x) = x \\ P(x) = \left(x - 1\right)\left(x - 2\right)...\left(x - 15\right) \end{cases}$ là nghiệm

+Khi $\begin{cases} q = 15 \\ p = 1 \end{cases}$ Thì

$P(x) = x + C \Rightarrow P\left(Q(x)\right) = Q(x) + C = \left(x - 1\right).\left(x - 2\right)...\left(x - 15\right) + C$

Do $Q(0) = 0 \Rightarrow C = -15!$

Vậy ta có cặp nghiệm là $\begin{cases} P(x) = x + 15! \\ Q(x) = \prod_{i=1}^{15}(x - i) - 15! \end{cases}$ (1 điểm)

+Khi $\begin{cases} q = 3 \\ p = 5 \end{cases}$

Thì $P(x) = \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right)\left(x - x_4\right)\left(x - x_5\right)$

$Q(x) = x^3 - ax^2 + bx$ (Do $Q(0) = 0$)

T a có $P\left(Q(x)\right) = \left(Q(x) - x_1\right)\left(Q(x) - x_2\right)\left(Q(x) - x_3\right)\left(Q(x) - x_4\right)\left(Q(x) - x_5\right)$

Suy ra $Q(x)=x_i \quad i=\overline{1,5}$

Mỗi phương trình $Q(x)=x_i \ ,i=\overline{1,5}$ có ba nghiệm $a_i \ ,b_i\,,c_i$

Theo Định lý Viet ta có $a_i+b_i+c_i=-a \ \forall i\in\{1,2,3,4,5\},a_ib_i+b_ic_i+c_ia_i=b$

Cũng theo Viets ta có $\sum_{i=1}^{5}\left(a_i+b_i+c_i\right)=\left(1+2+...+15\right)\Rightarrow a=24$

Ta lại có $\left(a_i+b_i+c_i\right)^2=a_i^2+b_i^2+c_i^2+2\left(a_ib_i+b_ic_i+c_ia_i\right)\Rightarrow a_i^2+b_i^2+c_i^2=a^2-2b$

Suy ra $\sum_{i=1}^{5}\left(a_i^2+b_i^2+c_i{}^2\right)=\left(1^2+2^2+...+15^2\right)\Rightarrow a^2-2b^2=248$

Do $P\left(Q(x)\right)$ có nghiệm là 1 nên trong 5 phương trình $Q(x)=x_i$ có bộ nghiệm là $\left(1,b_j,c_j\right)\Rightarrow b_j{}^2+c_j{}^2=247\equiv 3\bmod 4$

Mà $n^2\equiv 0,1\bmod 4$ nên vô lý (1 điểm)

+ Khi $\begin{cases} p=3 \\ q=5 \end{cases}\Rightarrow P(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_2\right),Q(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx$

Ta có $P(Q(x)=0\Leftrightarrow Q(x)=x_i\,,i=\overline{1,3}$

Mỗi phương trình $Q(x)=x_i$ có 5 nghiệm $a_i\,,b_i\,,c_i\,,d_i\,,e_i$

Ta đặt $A_i=\left\{a_1,b_1,d_1,e_1,,,\mathrm{a}_3,b_3,c_3,d_3,e_3\right\}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{3}A_i=S$

Ta có $a_i{}^2+b_i^2+c_i^2+d_i^2+e_i^2=\frac{1}{3}(1^2+2^2+...+15^2)=\frac{1240}{3}$ Vô lý (1 điểm)

Thử lại và kết luận

Câu 3 (4 điểm).

Giả sử n là số tự nhiên thỏa yêu cầu của đề bài

Cứ mỗi n tồn tại N sao cho $n=p_1.p_2.p_3...p_N$

Trong đó p_i là số nguyên tố với mọi $i=\overline{1,N}$ và $p_1 \le p_2 \le ... \le p_N$)

Từ giả thiết ta có : $p_1.p_2p_3...p_N + p_2p_3...p_N + ... + p_{N-1}.p_N + p_N = 2022$ (*) (1điểm)

Suy ra $p_N \mid 2022 \Rightarrow p_N \in \{2,3,337\}$

Nếu $p_N = 337$ đem thay vào (*) thu gọn ta có :

$p_1.p_2p_3...p_{N-1} + p_2p_3...p_{N-1} + ... + p_{N-1}. = 5 \Rightarrow p_{N-1} = 5 \Rightarrow n = 5.337 = 1685$ (1 điểm)

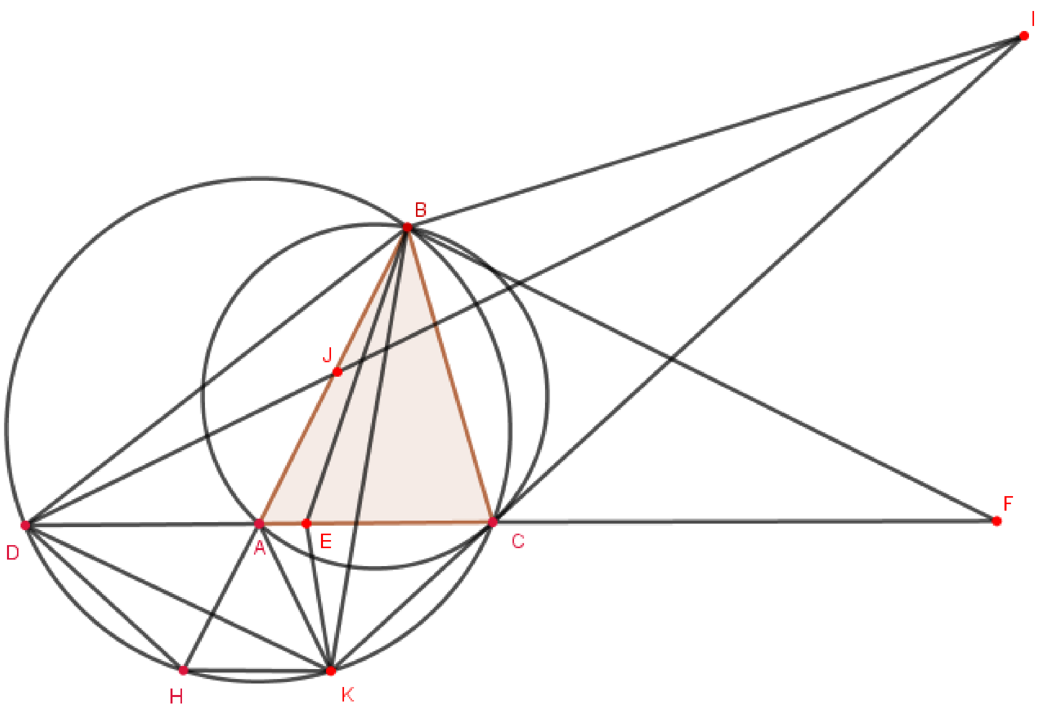
Khi $p_N = 2$ Thì (*) thành $2^N + 2^{N-1} + ... + 2 + 1 = 2^{N+1} - 1 = 2022$ (vô lý) (1 điểm)

Khi $p_N = 3$ Thì (*) thành $p_1.p_2p_3...3 + p_2p_3...3 + ... + p_{N-1}.3 + 3 = 2022$

$p_1.p_2p_3...\mathrm{p}_{n-1} + p_2p_3...\mathrm{p}_{n-1} + ... + p_{N-1} = 673 \Rightarrow p_{N-1} \mid 673$ (vô lý vì $p_{N-1} = 2$)

Thử lại và kết luận $n = 1685$ (1 điểm)

Câu 4 (4 điểm).



a/ Ta có: ∠DCK = ∠ACK = ∠ABC = ∠HBC = ∠HDC.

Xét tứ giác nội tiếp CDHK có

∠C = ∠D và ∠D + ∠K = 180^0 nên ∠C + ∠K = 180^0 suy ra CD // HK

suy ra tứ giác CDHK là hình thang cân. (1 điểm) nên DH = CK ⇒ ∠DBH = ∠KBC

⇒ BK là đường đối trung của góc B ⇒ tứ giác BDKC là tứ giác điều hòa

⇒ $\frac{BD}{BC} = \frac{KD}{KC}$ ⇒ $BD.KC = BC.KD$

Kết hợp với CDHK là hình thang cân suy ra $DB.DH = CH.CB$ (1 điểm)

b/ Vì tứ giác BDKC là tứ giác điều hòa nên $\frac{BD}{BC} = \frac{KD}{KC}$

⇒ 2 đường phân giác trong của ∠DBC và ∠DKC cắt nhau tại điểm E thuộc CD ; 2 đường phân giác ngoài của ∠DBC và ∠DKC cắt nhau tại điểm F thuộc CD

⇒ B và K thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBC và DKC dựng trên đoạn CD có đường kính EF.

+ Ta lại có:

$$BEK = 360^0 - BCK - (EBC + EKC) = 360^0 - (90^0 + BIC) - \frac{1}{2}(DBC + DKC) = 180^0 - BIC \,.$$

Suy ra tứ giác BEKI nội tiếp. (1 điểm)

+ Từ trên suy ra I cũng thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD nên IE là phân giác của góc DIC

suy ra $\frac{ID}{IC} = \frac{ED}{EC} = \frac{KD}{KC}$ hay $\frac{ID}{KD} = \frac{IC}{KC}$ nên DC là phân giác của góc IDK

Lại có ∠CAK = ∠DAH = ∠CAB

Do đó phép đối xứng trục CD biến DI thành DK, biến AB thành AK nên biến điểm J thành điểm K. Phép đối xứng trục CD biến đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD thành chính nó, mà K thuộc đường tròn Apollonius nên J cũng nằm trên đường tròn đó.

Vậy bốn điểm B, I, K, J nằm trên đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD có tâm là trung điểm EF thuộc đường thẳng CD. (1 điểm)

Câu 5 (4 điểm).

a/ (2 điểm) Tính xác suất để An và Bình lấy ra được bốn viên cùng màu

Ta gọi A_t, A_d lần lượt là biến cố An lấy ra được hai bi trắng , 2 bi đen

Gọi B_t, B_d lần lượt là biến cố Bình lấy ra được hai bi trắng , hai bi đen

Trường hợp cả hai đều lấy ra hai bi đen

$$P(A_d B_d) = P(\mathrm{A}_d).P\left(B_d\right) = \frac{1}{C_{10}^2}.\frac{C_{10}^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$ (1 điểm)

Trường hợp cả hai đều lấy ra được hai bi trắng

$$P\left(A_t B_t\right) = P\left(A_t\right).P\left(B_t\right) = \frac{C_{10}^2}{C_{12}^2}.\frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{15}{572}$$

Qui tắc cộng ta có $P\left(C\right) = \frac{15}{572} + \frac{1}{78} = \frac{67}{1726}$ (1điểm)

b/ (2 điểm)

Ta ký hiệu $2D,\ 2T\ ,1T1D$ lần lượt là các biến cố lấy được 2 bi trắng , 2 bi đen , 1 bi trắng và 1 bi đen và các biến cố ấy là xung khắc

Gọi n_A, n_B lần lượt là số bi trong hộp của An và Bình . Ta có $n_A < n_B$ và $n_A + n_B = 25$

Và gọi d_A, d_B lần lượt là số bi đen trong hộp của An và Bình . Ta có $d_A < d_B$

Từ $\begin{cases} n_A < n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = n_A + n_B < 2n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_B \geq 13 \\ n_A + n_B = 25 \end{cases}$ (1 điểm)

Đề cho $P(2\mathrm{D}) = \frac{k_A}{n_A}.\frac{k_B}{n_B} = 0,42 = \frac{21}{50} \Leftrightarrow 50.k_A.k_B = 21.n_A.n_B \Rightarrow n_A.n_B \vdots 5$ và $n_A + n_B = 25$

Nên có hai trường hợp xảy ra

Trường hợp 1 : $n_A = 5 \Rightarrow n_B = 20 \Rightarrow d_{A.}.d_B = 42 \Rightarrow d_A = 3, d_B = 14$

Và do đó số bi trắng trong hộp của An và Bình lần lượt là 2 và 6

Vậy $P(2T) = \frac{2}{5}.\frac{6}{20} = 0,12 \Rightarrow P(1T1D) = 1 - 0,42 - 0,2 = 0,46$

Trường hợp 2 : $n_A = 10 \Rightarrow n_B = 15 \Rightarrow d_{A.}.d_B = 63 \Rightarrow d_A = 5, d_B = 9$

Do đó số bi trắng trong hộp của An và Bình lần lượt là 3 và 6

Vậy $P(2T) = \frac{3}{10}.\frac{6}{15} = 0,12 \Rightarrow P(1T1D) = 1 - 0,42 - 0,2 = 0,46$ (1 điểm)

Kết luận : 0,46