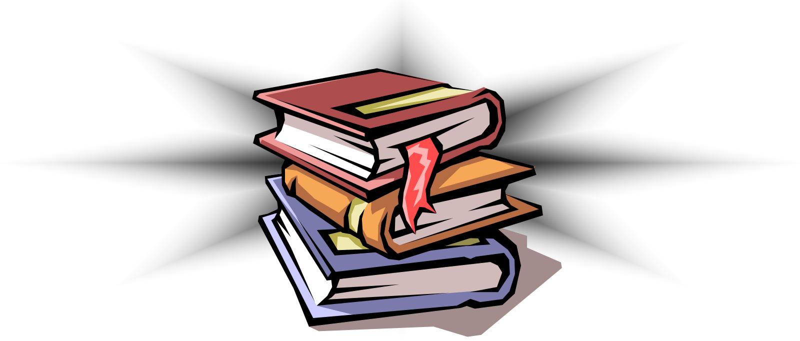
Tailieumontoan.com

Sưu tầm và tổng hợp



CHUYÊN ĐỀ
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

Thanh Hóa, ngày 23 tháng 5 năm 2020

Chuyên đề 1

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG ĐA THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Bất đẳng thức và toán cực trị là một nội dung quan trọng và hấp dẫn. Các bài toán trong chuyên đề này bao gồm:

- Bất đẳng thức dạng đa thức, các cách chứng minh một bất đẳng thức, các bất đẳng thức thông dụng, trong đó có bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức B-nhi-a-cốp-xki.
- Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các biểu thức có dạng đa thức với một biến hoặc nhiều biến.

Vài nét lịch sử

CÔ – SI VÀ BU-NHI-A-CỐP-XKI

Cô – si *(Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)* là nhà toán học Pháp, Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pa-ri.

Ông có trên 800 công trình về nhiều lĩnh vực như Số học, Đại số, Giải tích, Cơ học, Quang học, Thiên Văn học. Ông đã xây dựng nhiều vấn đề lí thuyết một cách chặt chẽ, khoa học, giúp cho Toán học có những bước tiến đnags kể.

Bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân của n số không ân là

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}.$$

Bất đẳng thức trên cũng được gọi là *bất đẳng thức Cô – si* đã đưa ra một cách chứng minh độc đáo, mặc dù ông không phải là người đầu tiên đề xuất bất đẳng thức này.

Bu – nhi – a – cốp – xki (*Viktor Bunyakovsky*, 1804 – 1889) là nhà toán học Nga, Phó Chủ tịch Viện Hàn lâm khoa học Pê – tec – bua. Ông học Toán tại Pari và là học trò của Cô – si. Ông có 128 công trình về Lí thuyết số, Lí thuyết xác suất, Giải tích, Hình học và Đại số. Ông có nhiều đóng góp nâng cao trình độ khoa học trong giảng dạy toán học ở các trường đại học và trung học. Để ghi nhớ công lao của ông với nền giáo dục Nga, năm 1875 một giải thưởng mang tên ông đã được lập ra để trao cho những sáng chế về Toán học.

Bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki với hai bộ n số $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ là

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2.$$

Bất đẳng thức trên còn được gọi là bất đẳng thức Cô – si – Bu – nhi – a – cốp – xki – Svac, vì Cô – si đã đề xuất bất đẳng thức đó, Bu – nhi – a – cốp – xki đã mở rộng kết quả cho tích phân, còn Svac (*Schwarz,* nhà toán học Đức, 1843 – 1921) mở rộng kết quả trên cho không gian vecto

Bài toán thực tế

Khu đất nhốt gia súc

Bác Tâm có một cuốn lưới sắt dài $60m$, bác muốn dùng lưới căng thành ba đoạn thẳng AB, BC, CD cùng với bức tường có sẵn làm thành một hình chữ nhật $ABCD$ để nhốt gia súc.

Hãy tính độ dài AB để khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

Giải

Đặt $AB = CD = x$ (mét) thì $BC = 60 - 2x$.

Diện tích S của hình chữ nhật $ABCD$ bằng

$$S = x(60-2x) = -2x^2 + 60x = -2\left(x^2 - 30x\right) = -2\left(x^2 - 30x + 225\right) + 450 = -2(x-15)^2 + 450 \le 450.$$

$\max S = 450 \Leftrightarrow x = 15$

Độ dài $AB = 15m$, khi đó khu đất có diện tích lớn nhất là $450\,m^2$

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG ĐA THỨC

1. Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hoặc $a < b, a \ge b, a \le b$) là một bất đẳng thức

2. Để chứng minh bất đẳng thức, ta thường dùng các cách sau:

- Dùng định nghĩa: Để chứng minh $a > b$ ta chứng minh $a - b > 0$.
- Dùng phép biến đổi tương đương: Chứng tỏ bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đúng.
- Dùng phương pháp phản chứng: Để chứng minh $a \ge b$ ta chứng tỏ $a < b$ là sai.

3. Cần nhớ một số bất đẳng thức thông dụng sau:

a) Liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cô – si)

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \text{ với } a,b \ge 0 \qquad (1)$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

b) Liên hệ giữa tổng các bình phương và bình phương của tổng

$$2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2 \quad (2)$$

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2 \quad (3)$$

Ta còn có $\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2(ab+bc+ca)$

Tổng quát của các bất đẳng thức (2) và (3), ta có bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \ge (ax+by)^2 \qquad (4)$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (ax+by+cz)^2 \qquad (5)$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ $(xyz \ne 0)$.

Bất đẳng thức (2) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (4) với $x = y = 1$.

Bất đẳng thức (3) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (5) với $x = y = z = 1$.

Khi a, b, c, x, y, z không âm thì các bất đẳng thức (4) và (5) còn được viết dưới dạng

$$(a+b)(x+y) \ge \left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)^2$$

$$(a+b+c)(x+y+z) \ge \left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}\right)^2$$

Ví dụ 84. Chứng minh đẳng thức $\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-d^2\right)\le\left(ac-bd\right)^2$ (1)

Giải

$(1)\Leftrightarrow a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2\le a^2c^2-2abcd+b^2d^2$

$\Leftrightarrow 0\le a^2d^2+b^2c^2-2abcd\Leftrightarrow 0\le\left(ad-bc\right)^2$ (3)

Bất đẳng thức (3) đúng. Vậy bất đẳng thức (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$

Ví dụ 85. Chứng minh bất đẳng thức sau với x,y không âm $\left(x+y\right)\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x^2+y^2\right)^2$

Giải

Cách 1. Xét hiệu hai vế

$\left(x+y\right)\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)^2 \quad = x^4+xy^3+x^3y+y^4-x^4-2x^2y^2-y^4$

$=xy\left(y^2+x^2-2xy\right)=xy\left(x-y\right)^2\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0,$ hoặc $y=0,$ hoặc $x=y$

Cách 2. Với $a,b,x,y\ge 0,$ theo bất đẳng thức $\text{Bu}-\text{nhi}-\text{a}-\text{cốp}-\text{xki}$

$\left(a+b\right)\left(x+y\right)\ge\left(\sqrt{ax}+\sqrt{by}\right)^2$

Với $a=x^3,b=y^3$ ta có $\left(x^3+y^3\right)\left(x+y\right)\ge\left(\sqrt{x^3.x}+\sqrt{y^3.y}\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2$

Ví dụ 86. Chứng minh bất đẳng thức $x+y\le xy+1$ với $x\ge 1,y\ge 1.$

Giải

Do $x\ge 1$ và $y\ge 1$ nên $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\ge 0\Rightarrow xy-x-y+1\ge 0\Rightarrow x+y\le xy+1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$ và $y=1$

Ví dụ 87. Cho $a+b\ge 2.$ Chứng minh đẳng thức $a^3+b^3\ge a^2+b^2$ (1)

Giải

Cách 1. $(1)\Leftrightarrow a^3-a^2+b^3-b^2\ge 0\Leftrightarrow a^2\left(a-1\right)+b^2\left(b-1\right)\ge 0$ (2)

Đặt $a=1+x$ và $b=1+y.$ Do $a+b\ge 2$ nên $x+y\ge 0.$ Ta có

$(2)\Leftrightarrow\left(1+x\right)^2x+\left(1+y\right)^2y\ge 0$

$\Leftrightarrow x+y+2\left(x^2+y^2\right)+\left(x^3+y^3\right)\ge 0$ (3)

Ta có $x^2+y^2\ge 0$ do $x+y\ge 0$ nên $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge 0$

Suy ra (3) đúng. Vậy (1) đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$ và $b=1$

Cách 2. Do $a+b\ge 2$ nên $a+b-2\ge 0.$ Để chứng minh $a^3+b^3-a^2-b^2\ge 0.$ ta sẽ chứng minh $a^3+b^3-a^2-b^2\ge a+b-2$ (3)

$(3)\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2-b^2-a-b+2\ge 0\Leftrightarrow a^3-a^2-a+1+b^3-b^2-b+1\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+\left(b-1\right)^2\left(b^2+b+1\right)\ge 0$ (4)

Do (4) đúng nên (3) đúng. Vậy (1) đúng

Ví dụ 88. Cho các số a và b không âm thỏa mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $a^3+b^3\le 1$

b) $a^3+b^3\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải

a) Do $a^2+b^2=1$ nên $a\le 1$ và $b\le 1$. Suy ra $a^3\le a^2$ và $b^3\le b^2$.

Do đó $a^3+b^3\le a^2+b^3=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$ và $b=1$

b) Ta chứng minh được $(a+b)\left(a^3+b^3\right)\ge \left(a^2+b^2\right)^2$ (xem Ví dụ 85)

$$\Rightarrow a^3+b^3\ge \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a+b}=\frac{1}{a+b} \qquad (1)$$

Ta lại có $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)=2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2}$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a^3+b^3\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II. CỰC TRỊ DẠNG ĐA THỨC

Ví dụ 89. Tìm giá trị nhỏ nhất (min) của biểu thức $A=x^2-3x+3$ với

a) x bất kì

b) $x\ge 2$

Giải

a) $A=x^2-3x+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{4}$

$\min A=\dfrac{3}{4}$ tại $x=\dfrac{3}{2}$.

b) *Cách 1.*

Do $x\ge 2$ ta đặt $x=2+y$ với $y\ge 0$. Ta có $A=(2+y)^2-3(3+y)+3=y^2+y+1\ge 1$ (do $y\ge 0$)

$\min A=1\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow x=2$.

Cách 2. Ta có $A(2)=2^2-3.2+3=1$. Ta sẽ chứng minh với $x\ge 2$ thì $A\ge 1$.

Ta có $A-1=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Với $x\ge 2$ thì $x-1>0, x-2\ge 0$ nên $A-1\ge 0$, do đó $A\ge 1$.

$\min A=1$ tại $x=2$.

Lưu ý. Khi biến x nhận giá trị tùy ý thì tam thức bậc hai $ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$ đạt cực đại tại $x=-\dfrac{b}{2a}$

Khi biến x nhận giá trị hạn chế không chứa $-\frac{b}{2a}$ thì tam thức bậc hai đạt cực trị tại giá trị biên của biến.

Ví dụ 90. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = x^3 - 48x$ với $x \ge 0$

b) $B = x^4 - 32x$

Giải

a) $A = x^3 - 48x = x^3 + 8x^2 - 8x^2 - 64x + 16x + 128 - 128$

$= (x^2 - 8x + 16)(x+8) - 128 = (x-4)^2(x+8) - 128 \ge -128.$

Vậy $\min A = -128$ tại $x = 4.$

b) $B = x^4 - 32x = x^4 + 16 - 8x^2 + 8x^2 + 32 - 32x - 48 = (x^2 - 4)^2 + 8(x-2)^2 - 48 \ge -48$

Vậy $\min B = -48$ tại $x = 2.$

Ví dụ 91. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2(x+4)$ với $x \ge 2$

Giải

Do $x \ge 2$ ta đặt $x = 2 + y$ với $y \ge 0.$

Ta có $A = (2+y)^2(6+y) = y^3 + 10y^2 + 28y + 24$

$= y(y^2 + 10y + 25) + 3y + 24 = y(y+5)^2 + 3y + 24 \ge 24$

Vậy $\min A = 24$ tại $y = 0$ tức là $x = 2.$

Ví dụ 92. Cho các số x, y không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 = 2.$ Tìm giá trị lớn nhất (max) của

a) $A = x + y$

b) $B = x^2 + y^2$

Giải

a) Ta có $2 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x^2 - xy + y^2)A \quad (1)$

$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = A^2 - 3xy \quad (2)$

$4xy \le (x+y)^2 = A^2 \Rightarrow -3xy \ge -\frac{3}{4}A^2 \quad (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $x^2 - xy + y^2 \ge A^2 - \frac{3}{4}A^2 = \frac{A^2}{4} \quad (4)$

Từ (1) và (4) suy ra $2 \ge \frac{A^2}{4}.A \Rightarrow A^3 \le 8 \Rightarrow A \le 2$

$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

b) Với x, y không âm ta có $(x+y)(x^3 + y^3) \ge (x^2 + y^2)^2$ (theo bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki hoặc theo Ví dụ 85) nên $A.2 \ge B^2 \Rightarrow B^2 \le 2A \le 2.2 = 4$

Vậy $\max B = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

Ví dụ 93. Cho $x \ge 4$ và $x + y \ge 6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$

Giải

Chọn x nhỏ nhất là 4. Khi $x=4$ thì $y\geq 2$. Xét biểu thức $4x+2y$

Theo bất đẳng thức Bu – nhi – a – cốp – xki $\left(4^2+2^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(4x+2y\right)^2$ (1)

Do $2x>8$ và $2x+2y\geq 12$ nên $4x+2y\geq 20$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $20A\geq 20^2\Rightarrow A\geq 20$

$$\min A=20\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2}\\ x=4\\ x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$$

Ví dụ 94. Cho các số dương a,b thỏa mãn $a+b=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A=ab\left(a^2+b^2\right)$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{2A}=\sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)}\leq\frac{2ab+\left(a^2+b^2\right)}{2}=\frac{\left(a+b\right)^2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A\leq\frac{1}{4}\Rightarrow A\leq\frac{1}{8}$$

$$maxA=\frac{1}{8}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 95. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\left(a+b\right)\left(a+c\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A=abc\left(a+b+c\right)$.

Giải:

Ta có

$\left(a+b\right)\left(a+c\right)=8\Rightarrow a\left(a+c\right)+ab+bc=8$

$\Rightarrow a\left(a+b+c\right)+bc=8.(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{A}=\sqrt{a\left(a+b+c\right).bc}\leq\frac{a\left(a+b+c\right)+bc}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$\Rightarrow A\leq 16$

$A=16\Leftrightarrow a\left(a+b+c\right)=bc=4$

$maxA=16$ khi, chẳng hạn $\begin{cases}b=c=2\\ a+2=\sqrt{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=c=2\\ a=2\sqrt{2}-2\end{cases}$

Ví dụ 96. Tìm giá trị lớn nhất của $A=a^2+b^2+c^2$ biết $-1\leq a,b,c\leq 3$ và:

a) $a+b+c=5$

b) $a+b+c=4$

Giải:

a) Do $-1\leq a\leq 3$ nên $\left(a+1\right)\left(a-3\right)\leq 0\Rightarrow a^2\leq 2a+3$.

Tương tự, $b^2\leq 2b+3, c^2\leq 2c+3$ nên $A\leq 2\left(a+b+c\right)+9=2.5+9=19$

$maxA = 19$ khi trong ba số a,b,c có hai số bằng 3, một số bằng -1.

b) Do $-1 \le a,b,c \le 3$ nên

$$(a+1)(b+1)(c+1)+(3-a)(3-b)(3-c) \ge 0$$
$$\Rightarrow (a+1)(bc+b+c+1)+(3-a)(9-3b-3c+bc) \ge 0$$
$$\Rightarrow 4(ab+bc+ac)-8(a+b+c)+28 \ge 0$$
$$\Rightarrow 4(ab+bc+ac)-8.4+28 \ge 0$$
$$\Rightarrow 2(ab+bc+ac) \ge 2 \qquad (1)$$

Ta có $A = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 16 - 2(ab+bc+ca)$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le 14$

$maxA = 14$ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 3, một số bằng 2, một số bằng -1.

Lưu ý: Cách giải ở câu $a)$ gọn vì ta gặp thuận lợi: cực trị xảy ra khi a,b,c chỉ nhận các giá trị là 3 và -1, tức là nhận các giá trị ở biên của các biến.

Cách giải ở câu $a)$ không vận dụng được cho câu $b)$ vì ở câu $b)$ cực trị xảy ra khi có một số bằng 2, không phải là giá trị ở biên của biến a,b,c. Như vậy cách giải ở câu $b)$ tổng quát hơn.

Ví dụ 97. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của d, biết rằng các số a,b,c,d thỏa mãn

$$\begin{cases} a+b+c+d=5 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=7 \end{cases}$$

Giải:

Ta có $a+b+c=5-d; a^2+b^2+c^2=7-d^2$

Áp dụng bất đẳng thức $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$ được

$$3(7-d^2) \ge (5-d)^2 \Leftrightarrow 2d^2-5d+2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (d-2)(2d-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le d \le 2$$

Vậy $\min d = \frac{1}{2}$ tại $a=b=c=\frac{3}{2}$; $\max d = 2$ tại $a=b=c=1$.

Ví dụ 98. Cho các số a,b,c,d không âm có tổng bằng 2. Tìm giá trị lớn nhất của $A = ab+bc+cd$

Giải:

$$A = ab+bc+cd \le ab+bc+cd+ad = (a+c)(b+d) \qquad (1)$$

Ta lại có $4(a+c)(b+d) \le (a+c+b+d)^2 = 2^2 = 4$

Nên $(a+c)(b+d) \le 1 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A \le 1$

Vậy $\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=b+d=1 \\ ad=0 \end{cases}$ khi chẳng hạn $a=0, b=d=\frac{1}{2}, c=1$.

Chuyên đề 2

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Chuyên đề này bao gồm hai nội dung:

– Bất đẳng thức dạng phân thức, trong đó có bất đẳng thức về cộng mẫu số.

– Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các biểu thức có dạng phân thức, trong đó có bài toán tìm cực trị mà biến nằm trong một khoảng nhất định, khi đó cần dự đoán giá trị của biến để xảy ra cực trị.

Tính nhẩm vào đời sống

CHIA NHANH

Bạn Vinh cần làm phép chia $1:1,03$ và làm tròn đến hàng phần trăm. Vinh đang loay hoay tính toán vì không có máy tính bỏ túi trong tay . Hà nói với Vinh:

Bạn chỉ cần lấy 1 trừ đi $0,03$ là được! ($0,03$ là *phần hơn* của số chia so với 1)

Vinh rất ngạc nhiên sau đó kiể tra lại bằng máy tính:

$$1:1,03=0,9708...\approx 0,97\left(=1-0,03\right).$$

Vinh thử một vài trường hợp khác cũng thấy đúng.

$$1:1,04=0,9615...\approx 0,96$$

$$1:1,07=0,9345...\approx 0,93$$

a) Bạn hãy giải thích điều đó.

b) Có phải kết quả tính theo cách trên luôn nhỏ hơn kết quả đúng hay không?

Giải:

a) Giả sử cần tính $\dfrac{1}{1+a}$ trong đó a là số rất nhỏ so với 1.

Khi đó $1\approx 1-a^2$ nên $\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1-a^2}{1+a}=1-a$.

b) Do $1>1-a^2$ nên $\dfrac{1}{1+a}>\dfrac{1-a^2}{1+a}=1-a$

Vậy kết quả tính được theo cách trên luôn nhỏ hơn kết quả đúng.

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG PHÂN THỨC

Ngoài các bất đẳng thức về liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cô-si), liên hệ giữa tổng các bình phương và bình phương của tổng (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki) được nêu ở Chuyên đề 7, cần nhớ các bất đẳng thức về liên hệ giữa tổng các số và tổng các nghịch đảo của chúng:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y} \text{ với } x,y>0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z} \text{ với } x,y,z>0 \qquad (2)$$

Bạn đọc cũng nên biết các bất đẳng thức tổng quát của các bất đẳng thức trên và cách chứng minh chúng để khi cần, có thể sử dụng chúng như những bổ đề:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y} \text{ với } x,y>0 \qquad (3)$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \text{ với } x,y,z>0 \qquad (4)$$

Bất đẳng thức (1) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (3) khi $a=b=1$.
Bất đẳng thức (2) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức (4) khi $a=b=c=1$.
Ta gọi các bất đẳng thức trên là các bất đẳng thức về cộng mẫu số.

Ví dụ 99. Chứng minh các bất đẳng thức (3) và (4) nói trên.

Giải:

Chứng minh bất đẳng thức (3) như sau:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\Leftrightarrow\frac{a^2y+b^2x}{xy}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\ge xy\left(a^2+2ab+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2\ge 2abxy\Leftrightarrow(ay-bx)^2\ge 0 \text{ luôn đúng.}$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Chứng minh đẳng thức (4) như sau:

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức (3) hai lần ta có:

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\Leftrightarrow\frac{a^2y+b^2x}{xy}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(a+b+c)^2$$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

Ví dụ 100. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{8}{(x+y)^2} \text{ với } x \text{ và } y \text{ dương}$$

Giải:

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$(x+y)^2 \ge 4xy > 0$ (1)

$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} \ge 2\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y} > 0$ (2)

Nhân (1) với (2) theo từng vế được

$(x+y)^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right) \ge 8 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} \ge \dfrac{8}{(x+y)^2}$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y$.

Ví dụ 101. Cho $A=\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}$ và $B=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

Chứng minh rằng:

a) $A \ge 2$.

b) $A \ge B$

Giải:

a) Đặt $\dfrac{a}{b}=x$; $\dfrac{b}{a}=y$ thì $xy=1$.

$A=x^2+y^2 \ge 2|xy|=2$ nên $A \ge 2$ (1).

b) Ta có $x^2+1 \ge 2x$; $y^2+1 \ge 2y$ nên $x^2+y^2+2 \ge 2(x+y) \Rightarrow A+2 \ge 2B$ (2)

Từ (1) suy ra $A+A \ge A+2$.

Kết hợp với (2) có $2A \ge 2B$ nên $A \ge B$.

Ví dụ 102. Cho $A=\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}$ và $B=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$.

Chứng minh rằng:

a) $A \ge 2$.

b) $A \ge B$.

Giải:

a) Đặt $\dfrac{a}{b}=x$; $\dfrac{b}{c}=y$; $\dfrac{c}{a}=z$ thì $xyz=1$.

Xét $A+1=(x^2+y^2)+(z^2+1) \ge 2|xy|+2|z| \ge 4\sqrt{|xyz|}=4$ nên

$A \ge 3$ (1).

b) Ta có $x^2+1\ge 2x$; $y^2+1\ge 2y$; $z^2+1\ge 2z$ nên

$x^2+y^2+z^2+3\ge 2(x+y+z)\Rightarrow A+3\ge 2B$ (2)

Từ (1) suy ra $A+A\ge A+3$ nên $2A\ge A+3$.

Kết hợp với (2) có $2A\ge 2B$ nên $A\ge B$.

Ví dụ 103. Cho $x=\dfrac{a+b}{a-b}$; $y=\dfrac{b+c}{b-c}$; $z=\dfrac{c+a}{c-a}$.

Chứng minh rằng:

a) $xy+yz+zx=-1$.

b) $x^2+y^2+z^2\ge 2$.

Giải:

a) Ta có $x+1=\dfrac{a+b}{a-b}+1=\dfrac{2a}{a-b}$. Từ đó

$(x+1)(y+1)(z+1)=\dfrac{2a}{a-b}.\dfrac{2b}{b-c}.\dfrac{2c}{c-a}$ (1).

Từ đó $x-1=\dfrac{a+b}{a-b}-1=\dfrac{2b}{a-b}$. Từ đó

$(x-1)(y-1)(z-1)=\dfrac{2b}{a-b}.\dfrac{2c}{b-c}.\dfrac{2a}{c-a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

Nhân và rút gọn được $xy+yz+zx=-1$

b) Ta có $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2+2$.

Vậy $x^2+y^2+z^2\ge 2$.

Ví dụ 104. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{3}{2} \text{ với } a\ge b\ge c>0.$$

Giải:

Gọi vế trái là A, ta có:

$$A-\frac{3}{2}=\left(\frac{a}{a+b}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{c+a}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{b-c}{2(b+c)}+\frac{c-a}{2(c+a)}$$
$$=\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{(b-a)+(a-c)}{2(b+c)}+\frac{c-a}{2(c+a)}$$
$$=\frac{a-b}{2}.\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)+\frac{a-c}{2}.\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{a-b}{2}.\frac{c-a}{(a+b)(b+c)}+\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)}\left(-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$$
$$=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

Vậy $A\ge\frac{3}{2}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi trong a,b,c có ít nhất hai số bằng nhau.

Ví dụ 105. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c \text{ với } a,\ b,\ c \text{ dương.}$$

Giải:

Do $a,\ b,\ c>0$ nên $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge(a+b)ab$.

$\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{2ab}\ge\frac{a+b}{2}$. Từ đó

$$\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 106. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le 3 \text{ với } a,\ b,\ c \text{ dương và } a+b+c=ab+bc+ca.$$

Giải:

Ta có $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$.

Do a và b dương nên $\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{2}{a+b}$.

Từ đó

$$A=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\qquad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le\dfrac{9}{x+y+z}$ với $x,y,z>0$ ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{9}{2(a+b+c)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A\le\dfrac{9}{a+b+c}$.

Cần chứng minh $\dfrac{9}{a+b+c}\le 3$ hay $\dfrac{9}{a+b+c}\le\dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ $\quad(3)$

(Vì $a+b+c=ab+bc+ca$)

$(3)\Leftrightarrow(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Dễ dàng thấy bất đẳng thức cuối là đúng.

Vậy bất đẳng thứcc đã được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 107. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a\le b, a\le c$ và $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a+b^2+c^2\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Giải:

Ta có $a\le b, a\le c$ nên $a^3\le abc=1$, do đó $a\le 1$.

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$M=\left(a-\frac{1}{a}\right)+b^2+c^2-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 0.$$

Ta có $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}=(a^2-1)bc$ (vì $\dfrac{1}{a}=bc$)

Và $b^2+c^2-\dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}=(b^2+c^2)\left(1-\dfrac{1}{b^2c^2}\right)$

$=(b^2+c^2)(1-a^2)$.

nên

$M=(a^2-1)bc+(b^2+c^2)(1-a^2)$

$=(1-a^2)(b^2+c^2-bc)=(1+a)(1-a)(b^2+c^2-bc)$

Do $a,b,c>0$ và $a\le 1$ nên $1-a^2\ge 0$ $b^2+c^2-bc>0$ suy ra $M\ge 0$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 108. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}\ge\dfrac{2}{xy+1}$ với $xy\ge 1$.

Giải:

Cách 1. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2+1+y^2+1}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} \ge \frac{2}{xy+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+2\right)\left(xy+1\right) \ge 2\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+x^2+y^2+2xy+2-2x^2y^2-2x^2-2y^2-2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2-xy\right)-\left(x^2+y^2-xy\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left(xy-1\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $xy \ge 1$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Cách 2. Vế trái đã cho tương đương với

$$A = \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1} = \frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}$$

$$= \frac{\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)+\left(1-x^2y^2\right)}{x^2y^2+x^2+y^2+1} = 1+\frac{1-x^2y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1} \quad (1)$$

Ta có $x^2y^2+x^2+y^2+1 \ge x^2y^2+2xy+1 = \left(xy+1\right)^2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2y^2+x^2+y^2+1} \le \frac{1}{\left(xy+1\right)^2}.$$

Nhân hai vế với $1-x^2y^2$ (do $xy \ge 1 \Rightarrow 1-x^2y^2 \le 0$) ta được

$$\frac{1-x^2y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1} \ge \frac{1-x^2y^2}{\left(xy+1\right)^2} = \frac{1-xy}{xy+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge 1+\frac{1-xy}{1+xy} = \frac{2}{xy+1}$.

II. CỰC TRỊ DẠNG PHÂN THỨC.

Ví dụ 109. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2+1}{x}$ với:

a) $0 < x \le \frac{1}{2}$.

b) $x \ge 2$

Giải:

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = \frac{1}{2}$ tức là $x^2 = \frac{1}{4}$, ta biến đổi như sau:

$$A = \frac{x^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{x} = \frac{x^2+\frac{1}{4}}{x}+\frac{3}{4x} \quad (1)$$

Do $x > 0$ nên $\frac{x^2+\frac{1}{4}}{x} \ge \frac{2x.\frac{1}{2}}{x} = 1$ (1)

$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} \ge 2 \Rightarrow \frac{3}{4x} \ge \frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

b) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = 2$, tức là $x^2 = 4$ ta biến đổi như sau:

$A = \frac{x^2 + 4 - 3}{x} = \frac{x^2 + 4}{x} - \frac{3}{x}$ (3)

Do $x > 0$ nên $\frac{x^2 + 4}{x} \geq \frac{2\sqrt{x^2.4}}{x} = 4$ (4)

$x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3}{x} \geq \frac{-3}{2}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $A \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$; $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 110. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2 + 1}{x}$ với:

a) $0 < x \leq \frac{1}{4}$;

b) $x \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = \frac{1}{4}$, tức là $x^2 = \frac{1}{16}$, ta biến đổi như sau:

$$A = \frac{x^2 + \frac{1}{16} + \frac{15}{16}}{x} = \frac{x^2 + \frac{1}{16}}{x} + \frac{15}{16x} \quad (1)$$

Do $x > 0$ nên $\frac{x^2 + \frac{1}{16}}{x} \geq \frac{1}{2}$ (2)

$0 < x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 4 \Rightarrow \frac{15}{16x} \geq \frac{15}{4}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{16} = \frac{17}{4}$. $\min A = \frac{17}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

b) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = 3$, tức là $x^2 = 9$, ta biến đổi như sau:

$A = \frac{x^2 + 9 - 8}{x} = \frac{x^2 + 9}{x} - \frac{8}{x}$ (1)

Do $x > 0$ nên $\frac{x^2 + 9}{x} \geq 6$ (2)

$3 \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-8}{x} \geq -\frac{8}{3}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \geq 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$. $\min A = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = 3$

<u>Lưu ý</u>: Xét biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

- $x \ge 2 \Rightarrow \min A = 2\frac{1}{2}$ (ví dụ 109b).

$x \ge 3 \Rightarrow \min A = 3\frac{1}{3}$ (ví dụ 110b).

Tổng quát, $x \ge n \Rightarrow \min A = n\frac{1}{n}$ (hỗn số).

- $0 < x \le \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = 2\frac{1}{2}$ (ví dụ 109a).

$0 < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow \min A = 4\frac{1}{4}$ (ví dụ 110a).

Tổng quát, $0 < x \le \frac{1}{n} \Rightarrow \min A = n\frac{1}{n}$ (hỗn số).

Ví dụ 111. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2+y^2}{xy}$ với $x \ge 2y > 0$

Lời giải

Với dự đoán xảy ra cực trị tại $x = 2y$, tức là $x^2 = 4y^2$, ta biến đổi như sau:

$$A = \frac{x^2+4y^2-3y^2}{xy} = \frac{x^2+4y^2}{xy} - \frac{3y}{y} \qquad (1)$$

Do $x, y > 0$ nên $\frac{x^2+4y^2}{xy} \ge 4$ (2)

$$x \ge 2y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3y}{x} \ge -\frac{3}{2} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \ge 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2y$

Ví dụ 112. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2+b^2}$, với $a, b > 0$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $x = a^2+b^2; y = ab$ ta có $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

Do $a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow x \ge 2y$.

Bài toán quay về **ví dụ 111**. Suy ra $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$

Cách 2. Đặt $x = \frac{a^2+b^2}{ab}$. Do $a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow x \ge 2$. Quy về bài toán ở **ví dụ 109b.** Vậy $\min A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$

Ví dụ 113. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{y^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

.

Tìm hướng giải

Với $x, y > 0$ ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, nhưng dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$ trái với giả thiết $x^2+\frac{1}{y^2}=1$. Ta tìm hướng giải khác bằng cách khai thác giả thiết $x^2+\frac{1}{y^2} \geq 2\frac{x}{y}$.

Lời giải

Từ $1 = x^2+\frac{1}{y^2} \geq 2\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$, với dự đoán xảy ra cực trị khi $\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 4x^2$, ta biến đổi như sau:

$$A=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{4x^2+y^2-3x^2}{xy}=\frac{4x^2+y^2}{xy}-\frac{3x}{y} \quad (1)$$

Do $x>0, y>0$ nên $\frac{4x^2+y^2}{xy} \geq \frac{1.2x.y}{xy}=4 \quad (2)$

$$0<\frac{x}{y} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3x}{y} \geq -\frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A \geq 4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

$$\min A=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+\frac{1}{y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 114. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x+\frac{1}{x}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Lời giải

Do $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ nên $(1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x+x^2 \leq 0$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x \Rightarrow x+\frac{1}{2x} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2x} \leq 1 \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta có $x+\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$. Vậy $\max A=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 115. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A=\frac{x^2}{x^2-x+1}$ với

a) x bất kỳ.

b) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Lời giải

a) Do $x^2 \geq 0$ và $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên $A \geq 0$. $\min A=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $x=0$ thì $A=0$. Với $x\neq 0$ thì A lớn nhất khi $\frac{1}{A}$ nhỏ nhất.

$$\frac{1}{A}=\frac{x^2-x+1}{x^2}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

Đặt $y=\frac{1}{x}$ thì $\frac{1}{A}=1-y+y^2=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow A\leq\frac{4}{3}$

$\max A=\frac{4}{3}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2$

b) Với $\frac{1}{3}=x$ thì $A=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{7}$

Với $x=1$ thì $A=1$

Ta chứng minh $\frac{1}{7}\leq A\leq 1$.

- Ta có $A\geq\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-x+1}\geq\frac{1}{7}\Leftrightarrow 6x^2+x-1\geq 0\Leftrightarrow(2x+1)(3x-1)\geq 0$ (1)

Do $x\geq\frac{1}{3}$ nên (1) đúng.

- Ta có $A\leq 1\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-x+1}\leq 1\Leftrightarrow x^2\leq x^2-x+1\Leftrightarrow x\leq 1$ (2)

Do giả thiết $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ nên (2) đúng, hay $A\leq 1$.

Vậy $\max A=1\Leftrightarrow x=1$

Ví dụ 116. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}$ với $x>0,\ y>0$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2\geq 2$ và x,y dương nên $\frac{1}{y}\geq\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{x}{y}\geq\frac{2x^2}{x^2+y^2}$

$$A=\frac{x}{y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\geq\frac{2x^2}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=2$$

$\min A=2\Leftrightarrow x=y$

Ví dụ 117. Cho các số dương x,y thỏa $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)$.

b) $B=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$.

Lời giải

a) $A = xy + \dfrac{1}{xy} + 2$.

Ta có $0 < \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{1}{2}$ nên $0 < xy < \dfrac{1}{4}$.

Đặt $a = xy$ đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $a + \dfrac{1}{a}$ với $0 < a \le \dfrac{1}{4}$ theo **ví dụ 110a** ta tìm được

$\min\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{17}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Do đó, $\min A = \dfrac{17}{4} + 2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$

b) $B = \left(\dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{2}{xy}\right) + \dfrac{1}{xy}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ với a, b dương ta có

$\dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{x^2+y^2+2xy} = \dfrac{4}{(x+y)^2} \ge 4$ (2)

$0 < \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < xy \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{xy} \ge 4 \Rightarrow \dfrac{1}{2xy} \ge 2$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B \ge 2 + 4 = 6$. Vậy $\min B = 6 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 118. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y}$ với $x, y > 0; xy = 4$.

Lời giải

$$A = \frac{x+y+2}{(1+x)(1+y)} = \frac{x+y+2}{x+y+xy+1} = \frac{x+y+2}{x+y+5} = 1 - \frac{3}{x+y+5}$$

Ta có: $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow x + y + 5 \ge 9$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+y+5} \le \dfrac{1}{9} \Rightarrow \dfrac{-3}{x+y+5} \ge \dfrac{-1}{3}$

Vậy $A \ge 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$\min A = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = y = 2$

Ví dụ 119. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = \dfrac{x+y}{xy}$ b) $B = \dfrac{x^3+y^3}{xy}$

Giải

a) Do $x > 0, y > 0$ nên $A = \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{2\sqrt{xy}}{xy} = \dfrac{2}{\sqrt{xy}}$ (1)

Ta lại có: $2xy \le x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{xy} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \ge \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{xy}} \ge 2\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge 2\sqrt{2}$ (3)

$\min A = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $B = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy} = A(1+xy)$ (4)

Ta lại có $2xy \le x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - xy \ge \frac{1}{2}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $B \ge 2\sqrt{2}.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$

$\min B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 120. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2}{y-2} + \frac{y^2}{x-2}$ với $x > 2$ và $y > 2$

Giải

Đặt $x - 2 = a > 0, y - 2 = b > 0$

$A = \frac{(a+2)^2}{a} + \frac{(b+2)^2}{b} \ge \frac{4.a.2}{b} + \frac{4.b.2}{a} = 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge 16$

$\min A = 16 \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 4$

Ví dụ 121. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ với $1 \le x \le 2$ và $1 \le y \le 2$

Giải

Do $1 \le x \le 2$ nên $(x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \Rightarrow x + \frac{2}{x} \le 3$

Tương tự, $y + \frac{2}{y} \le 3$. Suy ra $(x+y) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \le 6$ (1)

Ta lại có $(x+y) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \ge 2\sqrt{(x+y)\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)} = 2\sqrt{2A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2\sqrt{2A} \le 6 \Rightarrow \sqrt{2A} \le 3 \Rightarrow 2A \le 9 \Rightarrow A \le \frac{9}{2}$

$\max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \end{array}\right.$

Ví dụ 122. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = 4a + \frac{1}{a}$ với $0 < a \le \frac{1}{4}$

b) $B = \frac{4xy}{(x+y)^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ với x, y là số dương

Giải

a) Với dự đoán xảy ra cực trị tại $a=\frac{1}{4}$, tức là $4a^2=\frac{1}{4}$ ta biến đổi như sau:

$$A=4a+\frac{1}{a}=\frac{4a^2+1}{a}=\frac{4a^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{a}=\frac{4a^2+\frac{1}{4}}{a}+\frac{3}{4a} \qquad (1)$$

Do $a>0$ nên $\frac{4a^2+\frac{1}{4}}{a}\ge\frac{2.2a.\frac{1}{2}}{a}=2$ (2)

$$0<a\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{a}\ge 4\Rightarrow\frac{3}{4a}\ge 3 \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $A\ge 2+3=5$

$\min A=5\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

b) $B=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$$\Rightarrow B+2=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)=\frac{4xy}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

Đặt $\frac{xy}{(x+y)^2}=a>0$ thì $B+2=4a+\frac{1}{a}$, trong đó $a\le\frac{1}{4}$ vì $\frac{xy}{(x+y)^2}\le\frac{1}{4}$

Theo câu a ta có $B+2\ge 5\Rightarrow B\ge 3$

$\min B=3\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{xy}{(x+y)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=y$

Ví dụ 123. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}$ với a, b, c dương và $a+b+c=1$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với x,y dương và $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{4}{c+1}=\frac{4}{c+a+b+c}=\frac{4}{(c+a)+(c+b)}\le\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}$$

Nhân hai vế với số dương ab ta có

$\frac{4ab}{c+1}\le\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}$. Do đó:

$$4A=\frac{4ab}{c+1}+\frac{4bc}{a+1}+\frac{4ac}{b+1}\le\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow 4A\le\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{c+b}+\frac{bc+ca}{a+b}=b+a+c=1$$

$\max A=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Ví dụ 124. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ với x,y dương và $x+y=1$;

b) $B=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{4}{z}$ với x,y,z dương và $x+y+z=3+\sqrt{2}$.

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức về cộng mẫu số $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}$ với $x,y>0$ (xem ví dụ 99)

$$A=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{y}\ge\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{x+y}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$$

$$\min A=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\sqrt{2}\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}-1\\y=2-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$B=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2}^2}{y}+\frac{2^2}{z}\ge\frac{\left(1+\sqrt{2}+2\right)^2}{x+y+z}=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}{3+\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$$

$$\min B=3+\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{y}=\frac{2}{z}\\x+y+z=3+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{2}\\z=2\end{cases}$$

Ví dụ 125. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{c+2a}$ với a, b, c dương và $a+b+c=3$.

Giải

Cách 1. Xét $\frac{a^2}{a+2b}+\frac{a+2b}{9}\ge2\sqrt{\frac{a^2}{a+2b}.\frac{a+2b}{9}}=\frac{2a}{3}$

$\Rightarrow\frac{a^2}{a+2b}\ge\frac{2a}{3}-\frac{a+2b}{9}=\frac{5a-2b}{9}$. Do đó

$$A=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{c+2a}\ge\frac{5a-2b}{9}+\frac{5b-2c}{9}+\frac{5c-2a}{9}=\frac{a+b+c}{3}=1$$

$\min A=1\Leftrightarrow a=b=c=1$

b) Cách 2. về cộng mẫu số :

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $x,y,z>0$ (xem ví dụ 99)

$$A=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b+2c}+\frac{c^2}{c+2a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3a+3b+3c}=\frac{a+b+c}{3}=1$$

$\min A=1\Leftrightarrow a=b=c=1$

Lưu ý. Giải thích việc xét $\frac{a^2}{a+2b}+\frac{a+2b}{9}$ ở cách 1 như sau:

Với dự đoán cực trị xả ra tại $a=b=c=1$, ta cần chọn số k như sao cho

$\frac{a^2}{a+2b}+\frac{a+2b}{k}$ tức là $\frac{1}{1+2}=\frac{1+2}{k}\Rightarrow k=9$

Các cách xét $\frac{a^2}{a+2b}=a+2b$ hoặc $\frac{a^2}{a+2b}+\frac{a+2b}{4}$ đều không hiệu quả.

Ví dụ 126. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c\le 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ với x,y,z dương, ta có:

$$A=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{3+a+b+c}\ge\frac{9}{4}$$

$$\min A=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

b) $B=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}$

$$B=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)+\left(1-\frac{1}{b+1}\right)+\left(1-\frac{1}{c+1}\right)=3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)=3-A\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\max B=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

Lưu ý: Câu b có cách giải ngắn gọn hơn trong trường hợp $a,b,c>0$ và $a+b+c\le 3$ như sau:

Từ bất đẳng thức $4a\le(a+1)^2$, với $a>0$ ta có:

$\frac{a}{a+1}\le\frac{a+1}{4}$. Do đó $B\le\frac{a+1}{4}+\frac{b+1}{4}+\frac{c+1}{4}=\frac{a+b+c+3}{4}\le\frac{3}{2}$

$$\max B=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

Ví dụ 127. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}$ với a,b,c là số dương và $a+b+c=3$

Giải

Ta có $\frac{a}{b^2+1}=\frac{a+ab^2-ab^2}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$

Do đó:

$$A=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\left(a-\frac{ab}{2}\right)+\left(b-\frac{bc}{2}\right)+\left(c-\frac{ca}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2} \qquad (1)$$

Ta lại có $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3\Rightarrow -\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{-3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; $\min A=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 128. Cho biểu thức

$$A=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \text{ với } 1\le a\le b\le c\le 2.$$

a) Chứng minh rằng $A\le\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Giải

a) Ta có $A=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$. Do $1\le a\le b\le c$ nên $(a-b)(b^2-c^2)\ge 0$

$\Rightarrow ab^2-ac^2-b^3+bc^2\ge 0\Rightarrow b^3\le ab^2+bc^2-ac^2$.

Chia hai vế cho số dương abc được $\frac{b^2}{ac}\le\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$. (1)

Do $1\le a\le b$ nên $\frac{a^2}{bc}\le\frac{a^2}{ac}=\frac{a}{c}$. (2)

Do $1\le a\le c$ nên $\frac{c^2}{ab}\le\frac{2c}{ab}=\frac{2c}{b}$. (3)

Xảy ra đẳng thức khi a = b = 1 và c = 2.

b) Ta có $1\le b\le c\le 2$. nên $\frac{b}{c}\ge\frac{1}{2}$.

Đặt $\frac{b}{c}=x$ thì $\frac{1}{2}\le x\le 1$.

Theo Ví dụ 114, với $\frac{1}{2}\le x\le 1$ thì $max\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{2}$ tại $x=\frac{1}{2}$.

Do đó $max\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b=1, c=2$.

Tương tự $max\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1, c=2$.

Suy ra maxA = 5 $\Leftrightarrow a=b=1$ và c = 2.

Chuyên đề 3

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DẠNG CĂN THỨC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ.

Chuyên đề này bao gồm hai nội dung:

- Bất đẳng thức dạng căn thức
- Cực trị dạng căn thức

Các bài toán về cực trị dạng căn thức thường khó, do đó ngoài dạng đơn giản, trong chuyên đề đã phân loại các dạng sau

- Dạng $\sqrt{f^2(x)}+\sqrt{g^2(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$
- Dạng $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ trong đó $f(x)-g(x)=m>0$
- Dạng $a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$
- Dạng $f(x)+\sqrt{g(x)}$
- Dạng $f(x)+x\sqrt{g(x)}$
- Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}+\sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x)+h(x)$ và .. đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}-\sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x)-h(x)$ và $f(x)-k(x)$ đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f+h$ và $g+k$ đều là hằng số
- Dạng $\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f-h$ và $g-k$ đều là hằng số
- Dạng chứa phân thức

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG HÌNH HỌC

Xuân đố Mai chứng minh bất đẳng thức sau bằng hình học

$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\le\sqrt{ab}$

Mai chưa tìm ra cách làm. Bạn hãy giúp Mai

Giải

Kẻ đường vuông góc $CH = 1$ và các đường xiên $CA = \sqrt{a}$

$CB = \sqrt{b}$ (H nằm giữa A và B, h.4)

Khi đó $HA = \sqrt{a-1},\ HB = \sqrt{b-1}$

Ta có $AB.CH = 2S_{ABC} \le CA.CB$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}\right).1 \le \sqrt{a}.\sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \le \sqrt{ab}$

I. BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG CĂN THỨC

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \le \sqrt{ab} \quad (1)$$

Giải

Cách 1 . (đặt ẩn phụ và biến đổi tương đương)

Đặt $a - 1 = x,\ \ b - 1 = y$. Ta có

$(1) \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{(x+1)(y+1)}$

$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \le xy + x + y + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le xy + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 1\right)^2 \ge 0$, đúng. Vậy (1) đúng

Xảy ra bất đẳng thức khi và chỉ khi $xy = 1 \Leftrightarrow a + b = ab$

Cách 2. (dung bất đẳng thức cÔ-si)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a-1}{ab}} + \sqrt{\dfrac{b-1}{ab}} \le 1$. Gọi vế trái là A ta có

$$2A = 2\sqrt{\frac{a-1}{a}.\frac{1}{b}} + 2\sqrt{\frac{b-1}{b}.\frac{1}{a}} \le \left(\frac{a-1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{b-1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 2$$

nên $A \le 1$. Vậy (1) đúng

Cách **3** (dung bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

$$\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\right)^2=\left(\sqrt{a-1}.1+1.\sqrt{b-1}\right)^2\le(a-1+1)(1+b-1)=ab$$

$$\Rightarrow\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}\le\sqrt{ab}$$

Cách 4. (dung hình học)

Xem cách giải ở phần *Tổng quan về chuyên đề*

Ví dụ 130. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh bất đẳng thứ

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le 2(a+b+c)$$

Giải

Ta có .. nên

$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\le\dfrac{a+b+a+c}{2}=a+\dfrac{b+c}{2}$. Từ đó

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\le\left(a+\frac{b+c}{2}\right)+\left(b+\frac{c+a}{2}\right)+\left(c+\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=2(a+b+c)$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 131. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{x+y}{4}\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$$

Giải

Ta có $\dfrac{(x+y)^2}{2}+\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+y}{2}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)\ge\sqrt{xy}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)$ (1)

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{xy}\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$ (2)

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{xy}\left(x+y+\frac{1}{2}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\left[\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2\right]\ge 0 \text{, đúng}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=0$ hoặc $x=y=\frac{1}{4}$

Ví dụ 132. . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge 2 \text{ với } a,b,c>0$$

Giải

Gọi vế trái là A. Ta có:

$$\sqrt{\frac{2c}{a+b}}=\frac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}}\ge\frac{2c}{\frac{2c+a+b}{2}}=\frac{4c}{2c+a+b} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với $x,y>0$ ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{4(a+b+c)}{2c+a+b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A+2\ge\frac{4(a+b+c)+4c}{2c+a+b}=4\Rightarrow A\ge 2$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$

II. CỰC TRI DẠNG CĂN THỨC

1. Dạng $\sqrt{f^2(x)}+\sqrt{g^2(x)}$ trong đó $f(x)+g(x)=m$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của dạng trên, có hai cách:

- Đưa về bất đẳng thức $|f(x)|+|g(x)|\ge f(x)+g(x)=m$
- Xét bình phương của biểu thức

Ví dụ 133. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

Giải

ĐKXĐ: $x\ge\frac{1}{2}$

Cách 1. Đặt $2x-1=y$. Ta có:

$$A\sqrt{2}=\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}$$
$$=\sqrt{y+1+2\sqrt{y}}+\sqrt{y+1-2\sqrt{y}}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{y}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}=\sqrt{y}+1+\left|1-\sqrt{y}\right|\ge\sqrt{y}+1+1-\sqrt{y}=2$$
$$\Rightarrow A\ge\sqrt{2}$$
$$\min A=\sqrt{2}\Leftrightarrow y=1\Leftrightarrow x=1$$

Cách 2. Ta có: $A^2=x+\sqrt{2x-1}+x-\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2-(2x-1)}$

$$=2x+2|1-x|\ge 2x+2(1-x)=2$$

$$\min A=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$$

2. Dạng $\sqrt{f^2(x)}-\sqrt{g^2(x)}$ **trong đó** $f(x)-g(x)=m>0$

Để tìm giá trị lớn nhất của dang trên, ta dung bất đẳng thức

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $g(x)=0$ hoặc $f(x)=g(x)$

Ví dụ 134. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{x^2-x-6}$

Giải

ĐKXĐ: $x\le -2$ hoặc $x\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a}-\sqrt{b}\le\sqrt{a-b}$ ta có

$$A\le\sqrt{\left(x^2-x+3\right)-\left(x^2-x-6\right)}=\sqrt{9}=3$$

$$\max\text{A}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-6=0\\x^2-x+3=x^2-x-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\end{array}\right.$$

3. Dạng $a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{g(x)}$ **trong đó** $f(x)+g(x)=m$

Để tìm giá trị lớn nhất của dạng trên, ta dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

$\left(a\sqrt{f}+b\sqrt{g}\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)+\left(f+g\right)=a^2+b^2+m$

Trong một số trường hợp, có thể xét $\left(a\sqrt{f}+b\sqrt{g}\right)^2$ rồi dung bất đẳng thức Cô-si

Trong một số trường hợp, có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của dạng tr6n bằng cách xét bình phương của biểu thức

Với dạng $\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)}$ trong đó $f\left(x\right)+g\left(x\right)=m$, ta có thể tìm được giá rị nhỏ nhất bằng cách xét bình phương của biểu thức hoặc dung bất đẳng thức

$\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)} \ge \sqrt{f\left(x\right)+g\left(x\right)}=\sqrt{m}$

Ví dụ 135. Cho biểu thức $A=3\sqrt{x}+\sqrt{10-x}$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

b) Tìm giá trị lớn nhất của A

Giải

ĐKXĐ: $0 \le x \le 10$

a) $A^2=9x+\left(10-x\right)+6\sqrt{x\left(10-x\right)}$

$=8x+10+6\sqrt{x\left(10-x\right)} \ge 10$ (do $x \ge 0$)

$\min A=\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\left(10-x\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

b) Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$A^2=\left(3\sqrt{x}+1.\sqrt{10-x}\right)^2 \le \left(3^2+1^2\right)\left(x+10-x\right)=100$

$\max A=10 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{3}=\sqrt{10-x} \Leftrightarrow =9$

Lưu ý. Có thể giải câu a) bằng cách dung bất đẳng thức Cô-si

$2A=2\sqrt{9x}+2.\sqrt{1.\left(10-x\right)} \le \left(9+x\right)+\left(1+10-x\right)=20$

$\max A=10 \Leftrightarrow \begin{cases} 9=x & (1) \\ 1=10-x & (2) \end{cases} \Leftrightarrow x=9$

(Ta gặp may mắn vì $x=9$ ở (1) thỏa mãn (2))

$2A = 6\sqrt{x} - 4\sqrt{1-4x} = 3\sqrt{4x} + 4\sqrt{1-4x}$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$(2A)^2 = \left(3\sqrt{4x} + 4\sqrt{1-4x}\right)^2 \le \left(3^2 + 4^2\right)\left(4x + 1 - 4x\right) = 25$$

$$\Rightarrow 2A \le 5 \Rightarrow A \le \frac{5}{2}$$

$$\max A = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x}}{3} = \frac{\sqrt{1-4x}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{100}$$

Lưu ý: Cũng có thể viết dưới dạng $A = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{1}{4} - x}$ rồi dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki được: $A^2 \le \left(3^2 + 4^2\right)\left(x + \frac{1}{4} - x\right) = \frac{25}{4}$

$$\Rightarrow A \le \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 137. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A = \sqrt{2-a} + \sqrt{2-b} + \sqrt{2-c}$;

b) $B = \sqrt{5-a} + \sqrt{5-b} + \sqrt{5-c}$.

Giải: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$\sqrt{2-a} = \sqrt{1.(2-a)}\ \frac{1+(2-a)}{2} = \frac{3-a}{2}$. Từ đó

$$2A \le (3-a) + (3-b) + (3-c) = 9 - (a+b+c) = 9 - 3 = 6 \Rightarrow A \le 3$$

$$\max A = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2-a \\ 1 = 2-b \\ 1 = 2-c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

b) Áp dụngbất đẳng thức Cô-Si:

$2\sqrt{5-a} = \sqrt{4(5-a)} \le \frac{4+5-a}{2} = \frac{9-a}{2}$.Từ đó

$$4B = (9-a) + (9-b) + (9-c) = 27 - (a+b+c) = 27 - 3 = 24 \Rightarrow B \le 6$$

$$\text{Max } B = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 5-a \\ 4 = 5-b \\ 4 = 5-c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Lưu ý: ở câu a) ta viết $\sqrt{2-a} = \sqrt{1.(2-a)}$, biểu thức trong dấu căn nhân với k_1=1.

Ở câu b) ta viết $2\sqrt{5-a} = \sqrt{4(5-a)}$, biểu tượng trong đấu căn nhân với k_2=4

Có sự khác nhau nói trên vì ở bất đẳng thức $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, đẳng thức xảy ra tại $x = y$, nên ta phải trọn k_1 và k_2 sao cho $k_1 = 2-a$ và $k_2 = 5-a$.

Ở hai câu a và b do vai trò bình đẳng của a, b, c ta dự đoán cực trị xảy ra a = b = c = 1, do đó $k_1 = 2-a = 2-1 = 1$ và $k_2 = 5-a = 5-1 = 4$

4. Dạng $f(x)+\sqrt{g(x)}$

Để tìm giá tri lớn nhất của dạng trên, từng trường hợp mà ta sử dụng bất đẳng thức Cô-si hay Bu-nhi-a-cốp-xki.Cần chú ý những dạng cơ bản sau:

a) Dạng A$= mx+\sqrt{ax+b}$ trong đó $m+\frac{a}{2}=0$.Dùng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{1.(ax+b)} \le \frac{1+b+ax}{2} \quad \Rightarrow A \le mx+\frac{1+b}{2}+\frac{ax}{2}=\frac{1+b}{2}$$

b) Dạng B$==mx+n\sqrt{a-x^2}$ .Dùng bất đẳng thức Bu-nhi-cốp-xki ta có

$$B^2 = (mx+n\sqrt{a-x^2})^2 \le (m^2+n^2)(x^2+a-x^2) = a(m^2+n^2)$$

Ví dụ 138. Tìm giá trị lớn nhất của $\mathrm{A} = x+\sqrt{1-2x}$.

ĐKXĐ : $x \le \frac{1}{2}$

Cách 1.Áp dụng bất đẳng thức cô-si:

$$\mathrm{A} = x+\sqrt{1.(1-2x)} \le x+\frac{1+(1-2x)}{2} = 1.$$

$$max\mathrm{A} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1-2x \Leftrightarrow x = 0.$$

Cách 2.Đặt $\sqrt{1-2x} = y$ thì $x = \frac{1-y^2}{2}$. Ta có

$$\mathrm{A} = \frac{1-y^2}{2}+y \Rightarrow 2\mathrm{A} = 1-y^2+2y = 2-(y-1)^2 \le 2.$$

$$max\mathrm{A} = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ví dụ 139. Tìm giá trị lớn nhất của $\mathrm{A} = x = \sqrt{-x^2-2x+3}$.

Giải:

ĐKXĐ : $-3 \le x \le 1$.

Cách 1. $\mathrm{A} = x+\sqrt{4-(x+1)^2}$. Đặt $x+1 = y$ ta có

$$\mathrm{A} = -1+y+\sqrt{4-y^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có

$$\left(1.y+1.\sqrt{4-y^2}\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(y^2+4-y^2\right) = 8$$

$\Rightarrow y+\sqrt{4-y^2}\le\sqrt{8}\Rightarrow A\le -1+\sqrt{8}=2\sqrt{2}-1.$

$max A=2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow y=\sqrt{4-y^2}\Leftrightarrow y=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$

Cách 2. Gọi a là giá trị của biểu thức A. Ta có

$a=x+\sqrt{-x^2-2x+3}$

$\Leftrightarrow a-x=\sqrt{-x^2-2x+3}.(1)$ Với $a\ge x$ thì

$(1)\Leftrightarrow a^2+x^2-2ax=-x^2-2x+3$

$\Leftrightarrow 2x^2-2(a-1)x+(a^2-3)=0$

Để tồn tại x, phải có $\Delta'\ge 0\Rightarrow a^2+2a-7\le 0$

$\Rightarrow (a+1)^2\le 8\Rightarrow a\le 2\sqrt{2}-1$

$max\ A=2\sqrt{2}-1\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1,$ khi đó $a=2\sqrt{2}-1,$ thỏa mãn $x\le a$

Ví dụ 140. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A=x+\sqrt{1-2x-2x^2}$$

Giải:

ĐKXĐ $:1-2x-2x^2\ge 0$

Có thể giải hai cách như ở Ví dụ 139.Cách giải dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki như sau:

$$A=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1}{2}-x-x^2}=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Đặt $x+\frac{1}{2}=y,$ ta có $A=-\frac{1}{2}+y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}.$

Xét $\left(1.y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\right)^2\le\left[1^2+(\sqrt{2})^2\right]\left(y^2+\frac{3}{4}-y^2\right)=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\le\frac{3}{2}\Rightarrow A\le -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

Ví dụ 140. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$A=x+\sqrt{1-2x-2x^2}$$

Giải:

Có thể giải hai cách như ở ví dụ 139. Cách giải dùng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki như sau:

$$A=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1}{2}-x-x^2}=x+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Đặt $x+\frac{1}{2}=y$, ta có $A=-\frac{1}{2}+y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}$

Xét $\left(1.y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}\right)^2 \le \left[1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(y^2+\frac{3}{4}-y^2\right)=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow y+\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{4}-y^2} \le \frac{3}{2} \Rightarrow A \le -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1.$

Max $A=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn $1-2x-2x^2 \ge 0$

Lưu ý: Có thể giải bài trên bằng cách dùng bất đẳng thức Cô-si:

$$A=x+\sqrt{1.\left(1-2x-2x^2\right)} \le x+\frac{1+\left(1-2x-2x^2\right)}{2}=1-x^2 \le 1$$

$$\max A=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1=1-2x-2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

(Ta gặp may mắn khi x = 0 thỏa mãn $1=1-2x-2x^2$)

5. Dạng $f(x)+x\sqrt{g(x)}$

Dùng bất đẳng thức Cô-si hoặc Bu-nhi-a-cốp-xki. Cần chú ý những dạng cơ bản sau:

a) Dạng $A=x\sqrt{a-x^2}$

Dùng bất đẳng thức Cô-si: $|A|=|x|\sqrt{a-x^2} \le \dfrac{x^2+\left(a-x^2\right)}{2}=\dfrac{a}{2}$

b) Dạng $B=mx+x\sqrt{a-x^2}$

Trước hết xét:

$$m+\sqrt{a-x^2}=\sqrt{m}.\sqrt{m}+1.\sqrt{a-x^2} \le \sqrt{(m+1)\left(m+a-x^2\right)}.$$

Sau đó đưa về dạng trên

Ví dụ 141. Tìm giá trị nhỏ nhất,giá trị lớn nhất của:

$$A=3x+x\sqrt{5-x^2}.$$

Giải:

ĐKXĐ: $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

$$A=x\left(3+\sqrt{5-x^2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki:

$$\left(3+1.\sqrt{5-x^2}\right)^2=\left(\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.\sqrt{5-x^2}\right)^2 \le (3+1)\left(3+5-x^2\right)$$

$$=4\left(8-x^2\right)$$

$$\Rightarrow 3+\sqrt{5-x^2} \le 2\sqrt{8-x^2}$$

$$\Rightarrow |A| \le 2|x|\sqrt{8-x^2} \le x^2+\left(8-x^2\right)=8$$

$|A|=8 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{5-x^2} \\ x^2=8-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 2$

min $A=-8 \Leftrightarrow x=-2$; max $A=8 \Leftrightarrow x=2$

6. Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}+\sqrt{h(x)k(x)}$ trong đó $f(x)+h(x)$ và $g(x)+k(x)$ đều là hằng số

Ví dụ 142. Cho $A=\sqrt{5x-x^2}+\sqrt{18+3x-x^2}$

a) Tìm giá trị lớn nhất của A

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

Giải:

$A=\sqrt{x(5-x)}+\sqrt{(6-x)(x+3)}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 0\le x\le 5 \\ -3\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 5$

a) Do $0\le x\le 5$ nên có thể viết

$A=\sqrt{x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{6-x}.\sqrt{x+3}$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ki ta có:

$A^2+\left(\sqrt{x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{6-x}.\sqrt{x+3}\right)^2\le (x+6-x)(5-x+x+3)=48$

$\Rightarrow A\le 4\sqrt{3}$

max $A=4\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{5-x}=\dfrac{6-x}{x+3} \Leftrightarrow x=\dfrac{15}{7}$

b) $A=\sqrt{5x-x^2}+\sqrt{\left(5x-x^2\right)+(18-2x)}$ (1)

Do $0\le x\le 5$ nên $8\le 18-2x\le 18$ (2)

Do $5x-x^2\ge 0$ nên từ (1) và (2) suy ra

$A\ge\sqrt{18-2x}\ge\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

$\min A=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=5.$

Lưu ý. Mặc dù $A^2\le 48$ nhưng không thể kết luận rằng $\min A=-\sqrt{48}$ vì ta luôn có $A\ge 0$.

7. Dạng $\sqrt{f(x).g(x)}-\sqrt{h(x).k(x)}$ trong đó $f(x)-h(x)$ và $g(x)-k(x)$ đều là hằng số

Ví dụ 143. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A=\sqrt{(7-x)(x+1)}-\sqrt{x(4-x)}$

Giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} -1\le x\le 7 \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 4.$

Do $0\le x\le 4$ nên ta có thể viết

$A=\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.\sqrt{4-x}.$

Xét $(7-x)(x+1)-x(4-x)=2x+7>0$ (do $x\ge 0$) nên $A>0.$

Áp dụng bất đẳng thức $(ab-cd)^2\ge\left(a^2-c^2\right)\left(b^2-d^2\right)$ (xảy ra đẳng thức tại $ad=bc$) và viết lại A dưới dạng

$A=\sqrt{7-x}.\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.\sqrt{4-x}$, ta có

$A^2\ge\left[(7-x)-(4-x)\right].\left[(x+1)-x\right]=3.$

Do $A>0$ nên $A\ge\sqrt{3}$.

$\min A=\sqrt{3}\Leftrightarrow(7-x)x=(x+1)(4-x)\Leftrightarrow x=1.$

8. Dạng $\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó $f+h$ và $k+g$ đều là hằng số

Ví dụ 144.

a) Chứng minh bất đẳng thức

$\sqrt{f^2+g^2}+\sqrt{h^2+k^2}\ge\sqrt{(f+h)^2+(g+k)^2}.$ (1)

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$A=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+8x+17}.$

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow f^2+g^2+h^2+k^2+2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)}\ge f^2+h^2+2fh+g^2+k^2+2gk$

$\Leftrightarrow\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)}\ge fh+gk$

$\Leftrightarrow f^2h^2+f^2k^2+g^2h^2+g^2k^2\ge f^2h^2+g^2k^2+2fhgk$

$\Leftrightarrow(fk-gh)^2\ge 0$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi fk = gh.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$A=\sqrt{x^2+2^2}+\sqrt{(4-x)^2+1}\ge\sqrt{(x+4-x)^2+(2+1)^2}=5$

minA = 5 $\Leftrightarrow x.1=2(4-x)\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}.$

9. Dạng $\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}$ trong đó f – g và g – k đều là hằng số

Ví dụ 145

a) Chứng minh bất đẳng thức

$\left|\sqrt{f^2+g^2}-\sqrt{h^2+k^2}\right|\le\sqrt{(f-h)^2+(g-k)^2}.$ (1)

b) Tìm giá trị lớn nhất của

$A=\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2+2x+5}.$

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow f^2+g^2+h^2+k^2-2\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)}\ge f^2+h^2-2fh+g^2+k^2-2gk$

$\Leftrightarrow fh+gk\le\sqrt{(f^2+g^2)(h^2+k^2)}$ (2)

Nếu fh + gk < 0 thì (2) đúng.

Nếu fh + gk ≥ 0 thì

$(2)\Leftrightarrow f^2h^2+g^2k^2+2fhgi\le f^2h^2+f^2k^2+g^2h^2+g^2k^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (fk - gh)^2$, đúng.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $\begin{cases} fk = gh \\ fh + gk \ge 0. \end{cases}$

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có

$$|A| = \left|\sqrt{(x+2)^2 + 3^2} - \sqrt{(x+1)^2 + 2^2}\right| \le \sqrt{(x+2-x-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$max|A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2) = 3(x+1) \\ (x+2)(x+1) + 3.2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Với x = 1 thì $A = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Vậy $\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$.

10. Dạng chứa phân thức

Ví dụ 146. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x+1}{\sqrt{x-4}}.$$

Giải

ĐKXĐ: x > 4.

Đặt $\sqrt{x-4} = y > 0$ thì $x = y^2 + 4$. Ta có

$$A = \frac{y^2+5}{y} = y + \frac{5}{y} \ge 2\sqrt{y.\frac{5}{y}} = 2\sqrt{5}.$$

$$\min A = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow y = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow x = 9.$$

Ví dụ 147. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Giải

ĐKXĐ: -3 < x < 3. Do đó A > 0.

Gọi a là trị của biểu thức A. Ta có

$$a = \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow (a^2+1)x^2 + 10x + (25 - 9a^2) = 0.$$

Để tồn tại x, phải có $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow a^2(9a^2 - 16) \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \frac{4}{3}$.

$$\min A = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}.$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Ái Mộ - Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho hai số $x > 0,\ y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$$

Lời giải

Với hai số $x > 0,\ y > 0$ và $x + y = 1$ ta có:

$$M = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{\left(x^2 - 1\right)}{x^2} \cdot \frac{\left(y^2 - 1\right)}{y^2} = \frac{(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)}{x^2 y^2}$$

$$= \frac{(-y)(x+1)(-x)(y+1)}{x^2 y^2} = \frac{xy + (x+y) + 1}{xy} = 1 + \frac{2}{xy}.$$

Ta có: $x + y \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+y)^2} \le \dfrac{1}{4xy} \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{1}{4xy} \Leftrightarrow 8 \le \dfrac{2}{xy}$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{2}{xy} \ge 9 \Leftrightarrow M \ge 9$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 9 khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 2. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Bồ Đề - Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho bốn số dương a, b, c, d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da + 2004$$

Lời giải:

$$A = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da + 2004$$

Chứng minh được $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{a}{d}\right) \ge 16$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$

Chứng minh được $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da \ge 0$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$

Từ (1) và (2) => $A \ge 2020$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2020 khi $a=b=c=d>0$.

Bài 3. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Cầu Giấy- Quận Cầu Giấy 2019-2020)*

Cho các số thực dương *a, b* thay đổi luôn thỏa mãn $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+3}-3$ với mọi $x>0$.

Thật vậy, $\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+3}-3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}\ge \sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x}-1)^2\ge 0$.

Áp dụng : $\sqrt{a}\le 2\sqrt{a+3}-3; \sqrt{b}\le 2\sqrt{b+3}-3$

$\Rightarrow P\le 2(\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3})-6 \Rightarrow P\le 2.4-6$.

$\Rightarrow P_{\max}=2$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{a}=1\\ \sqrt{b}=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$

Bài 4. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Cự Khôi- Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho *a, b, c* > 0 và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$$

Lời giải

Với $a,b>0$ ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2ab}\ge \frac{1}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Viết lại $c+ab=c.1+ab=c(a+b+c)+ab=ca+cb+c^2+ab=c(c+a)+b(c+a)=(c+b)(c+a)$

Tương tự $a+bc=(a+b)(a+c)$, $\quad b+ca=(b+c)(b+a)$

Xét $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\le \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\le \frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right), \qquad \frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le \frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}\right)$$

Cộng vế với vế ta được $A=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c+a}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow A\le \frac{1}{2}\left(\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}\right)$$

$$A \le \frac{1}{2}(a+b+c) \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow A \le \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 5. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Đa Trí Tuệ - Hà Nội 2019-2020)*

Cho ba số a, b, c dương. Chứng minh $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{2abc}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$$a^2+bc \ge 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2}{a^2+bc} \le \frac{1}{a\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{1}{ab}.\frac{1}{ac}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right) \quad (1).$$

Tương tự có: $\frac{2}{b^2+ac} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{bc}\right) \quad (2).$

$$\frac{2}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right) \quad (3).$$

Cộng vế với vế của (1) (2) (3) ta được:

$$\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ac}+\frac{2}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ba}+\frac{1}{bc}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ca}+\frac{1}{cb}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ac}+\frac{2}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{2abc}$$ (điều phải chứng minh).

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Bài 6. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Dịch Vọng – Hà Nội 2019-2020)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2020}{xy+yz+zx}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$, ta có :

$$\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(xy+yz+zx\right)+\left(xy+yz+zx\right)\right]\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\geq 9$$

.

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\geq 9.$$

Hay $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{2}{xy+yz+zx}\geq 9$.

Ta có : $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\leq \frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Từ đó suy ra:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{xy+yz+zx}+\frac{2018}{xy+yz+zx}\geq 9+6054=6063$$

$\Leftrightarrow P\geq 6063$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của $P=6063 \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 7. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Đức Giang – Long Biên 2019-2020)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+xy}+\dfrac{1}{1+yz}+\dfrac{1}{1+zx}$

Lời giải:

Ta có: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 9 \qquad (a,b,c>0)$

Thật vậy: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3.\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}.}=9 \qquad (a,b,c>0)$

Áp dụng $\left[(1+xy)+(1+yz)+(1+zx)\right]\left(\dfrac{1}{1+xy}+\dfrac{1}{1+yz}+\dfrac{1}{1+zx}\right)\geq 9$

$$\Leftrightarrow P \ge \frac{9}{3+xy+yz+zx} \ge \frac{9}{3+x^2+y^2+z^2}$$

Mà $x^2+y^2+z^2 \le 3$ nên $P \ge \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy $\min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 8. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Thái Thụy – Long Biên 2019-2020)*

Cho các sốthực dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{\left(3a^2+12ab\right)+\left(2ab+8b^2\right)} = \sqrt{3a\left(a+4b\right)+2b\left(a+4b\right)}$

$$= \sqrt{\left(a+4b\right)\left(3a+2b\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+4b$ và $3a+2b$ ta có

$$\sqrt{\left(a+4b\right)\left(3a+2b\right)} \le \frac{a+4b+3a+2b}{2} = \frac{4a+6b}{2} = 2a+3b$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{\left(a+4b\right)\left(3a+2b\right)}} \ge \frac{a^2}{2a+3b} \text{ hay } \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \frac{a^2}{2a+3b}$$

Tương tự ta cũng có :

$$\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \ge \frac{b^2}{2b+3c}$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{c^2}{2c+3a}$$

Khi đó

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{a^2}{2a+3b}$ và $\frac{2a+3b}{25}$ ta có:

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{2a+3b}{25}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{2a+3b}.\frac{2a+3b}{25}}=\frac{2a}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2a+3b}\ge \frac{2a}{5}-\frac{2a+3b}{25}=\frac{8a-3b}{25}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{b^2}{2b+3c}\ge \frac{8b-3c}{25}$$

$$\frac{c^2}{2c+3a}\ge \frac{8c-3a}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge \frac{8a-3b}{25}+\frac{8b-3c}{25}+\frac{8c-3a}{25}=\frac{a+b+c}{5}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge \frac{a+b+c}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Bài 9. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Giang Biên – Long Biên 2019-2020)*

Cho a,b,c là các số dương và $a+b+c\le\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

Lời giải

Vì $a,b,c>0$, ta có :

$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left[2.\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$

$\Rightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow 3\ge (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 1\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+1\ge a^2+ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+1\ge (a+b)(a+c)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+1} \le \frac{1}{(a+b)(a+c)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \le \sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{a}{(a+c)}} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương: $\frac{a}{(a+b)};\frac{a}{(a+c)}$

$$\frac{a}{(a+b)}+\frac{a}{(a+c)} \ge 2\sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{a}{(a+c)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{(a+b)}.\frac{a}{(a+c)}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{a}{(a+b)}+\frac{a}{(a+c)}\right] \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right] \quad (*)$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right] \quad (**)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right] \quad (***)$$

Cộng vế với vế của (*), (**),(***), ta có

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right]$$

$$\Rightarrow P \le \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra: $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 10. *(Đề thi thử vào 10 Sở Giáo Dục Hà Nội 2019-2020)*

Cho $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất $M = 9x^2 - 5x + \frac{1}{9x} + 2021$.

Lời giải

$$M = 9x^2 - 5x + \frac{1}{9x} + 2021 = (9x^2 - 6x + 1) + \left(x + \frac{1}{9x}\right) + 2020$$

$$= (3x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{9x}\right) + 2020$$

Ta có: $(3x-1)^2 \ge 0$.

Vì $x>0$ nên $\frac{1}{9x} \ge 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số x và $\frac{1}{9x}$ ta được

$$x + \frac{1}{9x} \ge 2\sqrt{x.\frac{1}{9x}} = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Do đó $M \geq 0 + \frac{2}{3} + 2020 = \frac{2}{3} + 2020 = \frac{6062}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{9x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $M = \frac{6062}{3}$ khi $x = \frac{1}{3}$.

Bài 11. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Long Biên – Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $xy + yz + xz = 4xyz$.

Chứng minh: $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

Lời giải

Ta có $xy + yz + xz = 4xyz \Rightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$

Áp dụng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Ta có $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z}\right) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\right] \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}\right)$ (1)

Chứng minh tương tự có

$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z}\right)$ (2)

và $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z}\right)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có

$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$.

Chú ý: $P = \sum_{cyc} \frac{1}{(x+y)+(z+x)} \leq \frac{1}{16}\sum_{cyc}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$

Bài 12. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Lương Thế Vinh – Quận Cầu Giấy 2019-2020)*

Cho hai số dương x và y. Chứng minh rằng $\left(x + \frac{2}{y}\right).\left(\frac{y}{x} + 2\right) \geq 8$

Lời giải:

Có $x,y>0$

$$\left(x+\frac{2}{y}\right).\left(\frac{y}{x}+2\right)\ge 8 \Leftrightarrow \left(\frac{xy+2}{y}\right)\left(\frac{y+2x}{x}\right)\ge 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(xy+2)(y+2x)}{xy}\ge 8$$

$$\Leftrightarrow (xy+2)(y+2x)\ge 8xy \quad (\text{ vì } x,y>0\ )$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x\ge 8xy$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x-8xy\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2x^2y+2y+4x-4xy-4xy\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (xy^2-4xy+4x)+(2x^2y-4xy+2y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x(y^2-4y+4)+2y(x^2-2x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-2)^2+2y(x-1)^2\ge 0 \ (\text{ luôn đúng với } x,y>0\ )$$

Vậy $\left(x+\frac{2}{y}\right).\left(\frac{y}{x}+2\right)\ge 8$ với $x,y>0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

Bài 13. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Lý Thái Tổ – Quận Cầu Giấy 2019-2020)*

Cho biểu thức : $B=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Với $x>0$, $y>0$ và $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của B.

Lời giải

$$B=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)=2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$=2+x+y+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$=2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$x+\frac{1}{2x}\ge 2.\sqrt{x.\frac{1}{2x}}=\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$y+\frac{1}{2y}\ge 2.\sqrt{y.\frac{1}{2y}}=\sqrt{2} \qquad (2)$$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2.\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}=2$ (3)

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge \frac{1}{\sqrt{x.y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$xy\le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow \sqrt{xy}\le \sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}}\ge \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge \sqrt{2}\quad (4)$

Từ (1), (2), (3), (4) ta được:

$2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4+3\sqrt{2}$.

Vậy $MinB=4+3\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức đồng thời xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x=y \\ x=\frac{1}{2x} \\ y=\frac{1}{2y} \\ x^2+y^2=1; x>0, y>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 14. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Ngọc Thụy – Quận Long Biên 2019-2020)*

Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x\ge 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải

Ta có : $M=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\left(\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\right)-\frac{3y}{x}$.

Vì $x, y>0$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{x}{y};\frac{4y}{x}$

Ta có: $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{4y}{x}}=4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{4y}{x}\Leftrightarrow x^2=4y^2\Rightarrow x=2y$.

Vì $x \geq 2y \Rightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3y}{x} \geq \frac{-3}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Suy ra, $M \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$ khi $x = 2y$.

Bài 15. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Phúc Đồng – Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho hai số dương a và b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 2 \Rightarrow 2ab = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \begin{cases} ab \geq 1 \\ a + b \geq 2 \end{cases}$

Áp dụng BĐT cô si với 2 số dương ta có

$a^4 + b^2 \geq 2\sqrt{a^4 b^2} \Rightarrow a^4 + b^2 + 2ab^2 \geq 2a^2 b + 2ab^2$

$b^4 + a^2 \geq 2\sqrt{b^4 a^2} \Rightarrow b^4 + a^2 + 2a^2 b \geq 2ab^2 + 2a^2 b$

$\Rightarrow P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2} \leq \frac{1}{2a^2 b + 2ab^2} + \frac{1}{2ab^2 + 2a^2 b} \leq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 15. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Phúc Lợi – Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho a, b là các số không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng:
$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \leq 6$.

Lời giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$. Khi đó $3a = a + 2b$, $3b = b + 2a$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp cho biểu thức trong dấu căn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, dễ thấy

$a\sqrt{3a(a+2b)} \leq a\frac{3a + a + 2b}{2} = 2a^2 + ab$, $b\sqrt{3b(b+2a)} \leq b\frac{3b + b + 2a}{2} = 2b^2 + ab$.

Cộng hai bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$$M=a\sqrt{3a(a+2b)}+b\sqrt{3b(b+2a)}\le 2\left(a^2+b^2\right)+2ab=4+2ab.$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết, ta có:
$4+2ab\le 4+a^2+b^2=6$. Từ đó ta có ngay $M\le 6$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

Bài 16. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Thạch Bàn– Hà Nội 2019-2020)*

Với a, b, c là các số dương thoả mãn có $ab+bc=2ac$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}$.

Lời giải

Với a, b, c là các số dương ta có:

$ab+bc=2ac\Rightarrow b=\dfrac{2ac}{a+c}$, thay vào P ta được

$$P=\frac{a+\dfrac{2ac}{a+c}}{2a-\dfrac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\dfrac{2ac}{a+c}}{2c-\dfrac{2ac}{a+c}}$$

$$=\frac{a(a+c)+2ac}{2a(a+c)-2ac}+\frac{c(a+c)+2ac}{2c(a+c)-2ac}$$

$$=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}$$

$$=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 1+\frac{3}{2}\cdot 2=4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $a=b=c$.

Bài 17. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Thanh Am – Quận Long Biên 2019-2020)*

Cho $x+y=1$. Chứng minh $x^4+y^4\ge\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}$ $\quad(1)$ với mọi x, y.

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow 2x^2+2y^2\ge x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ luôn đúng với mọi giá trị của x, y.

Áp dụng (1) ta có:

$$x^4+y^4=\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2\ge\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}\text{ và } x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}.$$

Theo giả thiết ta có $x+y=1$ nên $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}$.

Suy ra $x^4+y^4\ge\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 18. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Việt Hưng – Long Biên 2019-2020)*

Cho $x>0; y>0$ thỏa mãn $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$M=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

Chứng minh các bất đẳng thức phụ:

Ta có: với $a,b>0$

$(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)-a^2-b^2-2ab\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\ge a^2+b^2+2ab\Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$ (1)

Lại có: với $a,b>0$

$(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\ge 4ab$

$\Leftrightarrow ab+a^2+b^2+ab\ge 4ab\Leftrightarrow a(a+b)+b(a+b)\ge 4ab$ $(*)$.

Vì $a,b>0\Rightarrow ab>0; a+b>0$

Do đó ta được:

$(*)\Rightarrow\frac{a(a+b)}{ab(a+b)}+\frac{b(a+b)}{ab(a+b)}\ge\frac{4ab}{ab(a+b)}$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) cho M ta được:

$\Rightarrow M\ge\frac{1}{2}\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(x+y+\frac{4}{x+y}\right)^2$

$\Rightarrow M\ge\frac{1}{2}\left[\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+\frac{3}{x+y}\right]^2$

$\Rightarrow M\ge\frac{1}{2}\left[2+\frac{3}{x+y}\right]^2$ (Áp dụng bđt thức Cauchy cho cặp số $\left\{(x+y);\frac{1}{x+y}\right\}$

$\Rightarrow M\ge\frac{1}{2}.(2+3)^2=\frac{25}{2}$ (Vì $x+y\le 1$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{25}{2}$

Bài 19. *(Đề thi thử vào 10 Trường THCS Amsterdam 2019-2020)*

Cho a,b,c là các số dương thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2a+3b+3c}+\frac{1}{3a+2b+3c}+\frac{1}{3a+3b+2c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương a,b,c,d ta có :

$$a+b+c+d \ge 4\sqrt[4]{abcd}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge \frac{16}{a+b+c+d}$$

Ta có : $\frac{1}{2a+3b+3c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)+(b+c)+(b+c)}$

Áp dụng bất đẳng thức phía trên ta có :

$$\frac{1}{(a+b)+(a+c)+(b+c)+(b+c)} \le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+3b+3c} \le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}\right)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{3a+2b+3c} \le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{a+c}\right)$$

$$\frac{1}{3a+3b+2c} \le \frac{1}{16}.\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{2}{a+b}\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{16}.4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{4}.2020 = 505$$

Dấu ''= " xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{3}{4040}$.

Bài 20. *(Đề thi thử vào 10 2019-2020)*

Cho $x,\ y$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $x+y=5$. Chứng minh rằng:
$\dfrac{25}{x^2+y^2}+\dfrac{12,5}{xy}\ge 4$.

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được với $a>0,\ b>0$ ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có: $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{2xy}\ge\dfrac{4}{(x+y)^2}=\dfrac{4}{25}\Leftrightarrow\dfrac{25}{x^2+y^2}+\dfrac{12,5}{xy}\ge 4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2,5$ (thỏa mãn).

Bài 21. *(Đề thi thử vào 10 THCS Minh Khai – Hà Nội 2018-2019)*

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác biết: $a+b-c>0;\ \ b+c-a>0;\ \ c+a-b>0$.

Chứng minh $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với $x>0,y>0$ ta có $x+y\ge 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{xy}\ge\dfrac{4}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}(*)$

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}\ge\dfrac{4}{a+b-c+b+c-a}=\dfrac{4}{2b}=\dfrac{2}{b}(1)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, với $x>0,y>0$ ta có $x+y\ge 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{xy}\ge\dfrac{4}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}\ (*)$

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{4}{a+b-c+b+c-a}=\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}\quad(1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{2}{c}(2)\qquad\qquad \frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{a}(3)$$

Cộng $(1),(2),(3)$ vế với vế ta có:

$$\Rightarrow\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 22. *(Đề thi thử vào 10 THCS Giảng Võ– Hà Nội 2017-2018)*

Tìm GTNN của biểu thức sau: $P=x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\ (\text{voi}\, x>0)$

Lời giải

Bình phương hai vế ta được $P^2-2Px+x^2=x^2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2Px^2-xp^2+1=0\ \ (1)$

Vì $P>0$ nên phương trình (1) có nghiệm khi

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow P^4-8P\geq 0\Leftrightarrow P(P^3-8)\geq 0\Leftrightarrow P\geq 2$ (vì $P>0$)

Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$ (các em thay $P=2$ vào (1) để tìm x)

Vậy $\min P=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bài 23. *(Đề thi thử vào 10 THCS Cát Linh– Hà Nội 2017-2018)*

Cho biểu thức $P=xy(x-2)(y+6)+12x^2+3y^2+18y+36-24x$. Chứng minh P luôn dương với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$

Lời giải

$P=xy(x-2)(x+6)+12x^2+3y^2+18y+36-24x$

$=xy(x-2)(x+6)+12(x-2)+3(y+6)+36$

$=x(x-2)\left[y(y+6)+12\right]+3\left[y(y+6)+12\right]$

$=(y^2+6y+12)(x^2-2x+33)$

$=\left[(y+3)^2+3\right]\left[(x-1)^2+32\right]$

Vì $\begin{cases}(y+3)^2+3>0\\(x-1)^2+32>0\end{cases}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Vậy P luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Bài 24. *(Đề thi thử vào 10 Học Mãi – Hà Nội 2018-2019)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3.$ TÌm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{ab+3c}+\sqrt{2a^2+2b^2}}{3+\sqrt{ab}}.$

Lời giải

Ta có:

$$ab+3c=ab+c(a+b+c)=c^2+c(a+b)+ab\ge c^2+2c\sqrt{ab}+ab=\left(c+\sqrt{ab}\right)^2$$

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\ge\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\sqrt{(a+b)^2}=ab\ \left(\text{v×}: a+b>0\right).$$

Do đó $A\ge\dfrac{c+\sqrt{ab}+a+b}{3+\sqrt{ab}}=\dfrac{3+\sqrt{ab}}{3+\sqrt{ab}}=1.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi với $a=b.$

Vậy $A_{\min}=1$ với $a=b.$

Bài 25. *(Đề thi thử vào 10 THCS* ARCHIMEDES*– Hà Nội 2017-2018)*

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2\ge\dfrac{3}{4}$

Lời giải

Ta có: $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2+\dfrac{a}{2(b+c)}+\dfrac{1}{4}\ge 3\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\dfrac{a}{2(b+c)}\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3a}{2(b+c)}$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\ge\frac{a}{b+c}-\frac{1}{4}$$

Tương tự ta có $\left(\dfrac{b}{a+c}\right)^2\ge\dfrac{b}{a+c}-\dfrac{1}{4}$ và $\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2\ge\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{1}{4}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{4}$$

Ta cần chứng minh $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{3}{2}$.

Đây là bất đẳng thức Nesbit quen thuộc. Nhận xét:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)-3$$

BĐT

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\ge \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\ge 9(*)$$

Ta có bất đẳng thức (*) luôn đúng. Vì

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}}$$

Nhân vế với vế của 2 bất đẳng thức trên ta thu được (*)

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 26. *(Đề thi thử vào 10 THCS Quận Long Biên– Hà Nội 2017-2018)*

Cho ba số x, y, z không âm và $x^2+y^2+z^2\le 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$$(x^2+1)+(y^2+4)+(z^2+1)\ge 2x+4y+2z\Leftrightarrow 3y+6\ge 2x+4y+2z \text{ (do } x^2+y^2+z^2\le 3y.)$$
$$\Leftrightarrow 6\ge 2x+y+2z$$

Với a, b là các số dương ta chứng minh được $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{8}{(a+b)^2}$

Dấu " = " xảy ra khi $a=b$.

Áp dung BĐT trên ta có: $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\geq\frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$

$P\geq\frac{64.4}{(2x+y+2z+10)^2}\geq\frac{256}{(6+10)^2}=1$

Vậy $P_{min}=1$ khi $x=1; y=2; z=1$

Bài 27. *(Đề thi thử vào 10 Hà Nội 2018-2019)*

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ac+bc-2018ab.$

Lời giải

*** Tìm GTLN:**

Ta có $P=ac+bc-2018ab=c(a+b)-2018ab\underset{(1)}{\leq}c(a+b)\underset{theo\ BĐT\ cosi\ (2)}{\leq}\frac{(a+b+c)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1), (2) đồng thời xảy ra và thỏa mãn điều kiện bài cho

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a.b=0\\c=a+b\\a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=c=\frac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}b=0\\a=c=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $P_{max}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=c=\frac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}b=0\\a=c=\frac{1}{2}\end{cases}$

*** Tìm GTNN:**

Ta có $a+b\geq2\sqrt{ab}$ (BĐT Cosi) $\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{4}\geq ab$ (3)

$$\Rightarrow P=ac+bc-2018ab\underset{theo\ BĐT\ cosi\ (3)}{\geq}c(a+b)-2018\frac{(a+b)^2}{4}\underset{(4)}{\geq}-2018\frac{(a+b)^2}{4}.$$

$a+b+c=1\Rightarrow a+b\leq1$ (5)

$$\Rightarrow P \geq -2018\frac{(a+b)^2}{4} \geq -\frac{2018}{4} = -\frac{1009}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (3), (4), (5) đồng thời xảy ra và thỏa mãn điều kiện bài cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{min} = -\dfrac{1009}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Bài 28. *(Đề thi thử vào 10 THCS Đặng Ái, Thanh Trì - Hà Nội 2018-2019)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của bieur thức $P = \dfrac{a+b}{abc}$.

Lời giải

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$ (1)

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \Rightarrow P = \frac{a+b}{abc} \geq \frac{4}{(a+b).c}$$

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $(a+b)+c \geq 2\sqrt{(a+b).c} \Leftrightarrow (a+b).c \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{4}$ (2)

$\Rightarrow P \geq \dfrac{16}{(a+b+c)^2} = 16$ (vì theo giả thiết $a+b+c=1$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1) và (2) đồng thời xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = c \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{Min} = 16 \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}; c = \dfrac{1}{2}$.

Bài 29. *(Đề thi thử vào 10 Hà Nội 2018-2019)*

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Lời giải

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)(*)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$x,y>0\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge4$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge2\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0\ \text{(luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Áp dụng ta được: $\dfrac{ab}{a+b+2c}=\dfrac{ab}{a+c+b+c}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}\right)$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc}{b+c+2a}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{bc}{b+a}+\dfrac{bc}{c+a}\right);\dfrac{ca}{c+a+2b}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{ca}{c+b}+\dfrac{ca}{a+b}\right)$

$$\Rightarrow VT(*)\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ac+bc}{a+b}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)\Rightarrow dpcm.$$

Bài 30. *(Đề thi thử vào 10 Hà Nội 2018-2019)*

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge27$$

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3=3$ nên: $0<a^3<3$; $0<b^3<3$; $0<c^3<3$.

Tổng quát:

+ Xét $0<x^3<3\Rightarrow2\sqrt{x^3}<2\sqrt{3}<4$

+ Áp dụng BĐT cosi ta có: $1+\dfrac{4}{x}\ge2\sqrt{1.\dfrac{4}{x}}=\dfrac{4}{\sqrt{x}}\ \Rightarrow1+\dfrac{4}{x}-2x\ge\dfrac{4}{\sqrt{x}}-2x=\dfrac{4-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}>0$

$$\Rightarrow(x-1)^2\left(1+\frac{4}{x}-2x\right)\ge0\ \Leftrightarrow5x^2+\frac{4}{x}\ge2x^3+7$$

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. CHÚ Ý: Dấu "=" xảy ra không phụ thuộc vào việc dấu "=" của BĐT cosi có xảy ra hay không mà chỉ phụ thuộc vào hiệu $(x-1)$ và thỏa mãn giả thiết).

Áp dụng cho bài toán ta có:

$5a^2+\frac{4}{a}\ge 2a^3+7$ (1) ; $5b^2+\frac{4}{b}\ge 2b^3+7$ (2) ; $5c^2+\frac{4}{c}\ge 2c^3+7$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+21$

$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 27$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra và $a^3+b^3+c^3=3$

$\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 30. *(Đề thi thử vào 10 THCS Phan Huy Chú Hà Nội 2018-2019)*

Cho các số thực không âm a,b thỏa mãn: $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}$.

Lời giải

Cách 1:

$P^2=4(a+b)+2+2\sqrt{(4a+1)(4b+1)}=10+2\sqrt{16ab+4(a+b)+1}$

$\ge 10+2\sqrt{4(a+b)+1}=16$

$\Rightarrow P\ge 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a,b) là hoán vị của $(0;2)$.

Cách 2.

Đặt $\sqrt{4a+1}=x,\sqrt{4b+1}=y$ thì:

$1\le x,y\le 3$ (do $0\le a,b\le 2$) và $\frac{x^2-1}{4}+\frac{y^2-1}{4}=2\Leftrightarrow x^2+y^2=10$.

Do $\begin{cases}(x-1)(x-3)\le 0\\(y-1)(y-3)\le 0\end{cases}$.

$\Rightarrow\begin{cases}4x\ge x^2+3\\4y\ge y^2+3\end{cases}\Rightarrow 4(x+y)\ge x^2+y^2+6=16\Rightarrow x+y\ge 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=3$ hoặc $y=1,x=3$ hay (a,b) là hoán vị của bộ số $(0;2)$.

Cách 3:

Chứng minh bổ đề: $\sqrt{x+k^2}+\sqrt{y+k^2}\ge k+\sqrt{x+y+k^2}$ với $x,y,k\ge 0$ (*).

Chứng minh (*):

Bình phương 2 vế ta có:

$$x+y+2k^2+2\sqrt{\left(x+k^2\right)\left(y+k^2\right)}\ge x+y+2k^2+2k\sqrt{x+y+k}$$

Hay

$$\sqrt{\left(x+k^2\right)\left(y+k^2\right)}\ge k\sqrt{x+y+k^2}\Leftrightarrow xy+\left(x+y\right)k^2+k^4\ge\left(x+y\right)k^2+k^4\Leftrightarrow xy\ge 0$$

bất đẳng thức này luôn đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy=0$.

Áp dụng vào bài toán: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\ge 1+\sqrt{1+4\left(a+b\right)}=1+3=4$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a,b là hoán vị của $\left(0;2\right)$.

Bài 31. *(Đề thi thử vào 10 THCS Phương Liệt Hà Nội 2018-2019)*

Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=abc.$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2\qquad a,b,c>0$

$$\frac{1}{1+a}=1-\frac{1}{1+b}+1-\frac{1}{1+c}$$

$$\frac{1}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}\qquad \text{(Theo BĐT Cô Si)}$$

$$\frac{1}{1+a}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{\left(1+b\right)\left(1+c\right)}}$$

Tương tự $\dfrac{1}{1+b}\ge 2\sqrt{\dfrac{ac}{\left(1+a\right)\left(1+c\right)}}$; $\dfrac{1}{1+c}\ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)}}$

Nhân vế với vế ta được

$$\frac{1}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}\ge 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2\left(1+c\right)^2}}=\frac{8abc}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}\Leftrightarrow abc\le\frac{1}{8}$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ khi đó $\frac{3}{1+a}=2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}=1+a \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Vậy $Q_{max}=\frac{1}{8}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Bài 32. *(Đề thi thử vào 10 THCS Lương Thế Vinh Hà Nội 2019-2020)*

Cho a,b là các số dương thỏa mãn $ab=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{\left(a+b-2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a+b}=\left(1-\frac{2}{a+b}\right)\left(a^2+b^2\right)$ với $ab=4$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cosi, ta có:

$a+b\ge 2\sqrt{ab}=4$ (1) $\Leftrightarrow -\frac{2}{a+b}\ge \frac{-1}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{2}{a+b}\ge \frac{1}{2}$

$a^2+b^2\ge 2ab=8$ (2)

Do đó: $P\ge \frac{1}{2}.8=4$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu “=” ở các bất đẳng thức Cosi (1) và (2) đồng thời xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a.b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Vậy $P_{min}=4 \Leftrightarrow a=b=2$.

Bài 33. *(Đề thi thử vào 10 Hà Nội 2019-2020)*

Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

Lời giải

$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\ge 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+2bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+2ca+2a^2}\ge 3\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+\left(a+b\right)^2}+\sqrt{b^2+c^2+\left(b+c\right)^2}+\sqrt{a^2+c^2+\left(a+c\right)^2}\ge 3\sqrt{6}$

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-ki: $x.a+y.b\le \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}$

Chứng minh: $x.a + y.b \le \sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}$

$\Leftrightarrow (x.a + y.b)^2 \le x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2 \Leftrightarrow x^2b^2 + y^2a^2 - 2x.a.y.b \ge 0$

$\Leftrightarrow (xb - ya)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng cho bài toán:

$$a + b \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \quad (1)$$

$$b + c \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(b^2 + c^2)} = \sqrt{2(b^2 + c^2)} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \ge \frac{(b+c)^2}{2} \quad (2)$$

$$a + c \le \sqrt{(1^1 + 1^2).(a^2 + c^2)} = \sqrt{2(a^2 + c^2)} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \ge \frac{(a+c)^2}{2} \quad (3)$$

Do đó:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + (a+b)^2} + \sqrt{b^2 + c^2 + (b+c)^2} + \sqrt{a^2 + c^2 + (a+c)^2}$$

$$\ge \sqrt{\frac{3}{2}(a+b)^2} + \sqrt{\frac{3}{2}(b+c)^2} + \sqrt{\frac{3}{2}(a+c)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(2a + 2b + 2c) = 3\sqrt{6} \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1), (2), (3) đồng thời xảy ra và thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$.

$\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 34. *(Đề thi thử vào 10 THCS Phụng Thượng Hà Nội 2019-2020)*

Cho x, y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

Lời giải

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2$$

Áp dụng B Đ T cosi ta có: $x + y \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$

Do đó: $S \ge \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{4(x^2+y^2)}{(x+y)^2} + 2 \underset{BDT\ Cosi}{\ge} 2\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.\frac{4(x^2+y^2)}{(x+y)^2}} + 2 = 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở các B Đ T cosi xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy $S_{min} = 6 \Leftrightarrow x = y$.

Bài 35. *(Đề thi thử vào 10 THCS Trần Nhân Tông Hà Nội 2019-2020)*

Với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^4 + b^4 + ab$.

Lời giải

$P = a^4 + b^4 + 4ab = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 + 4ab = -2a^2b^2 + 4ab + 16$ (vì $a^2 + b^2 = 4$)

Áp dụng B Đ T cosi, ta có: $a^2 + b^2 = 4 \ge 2ab$

$\Rightarrow 4ab \ge 2a^2b^2$

$\Rightarrow P = -2a^2b^2 + 4ab + 16 \ge -2a^2b^2 + 2a^2b^2 + 16 = 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở B Đ T cosi xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $P_{min} = 16 \Leftrightarrow (a\,;b) \in \left\{(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}),(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}),(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}),(-\sqrt{2}\,;\sqrt{2})\right\}$

Bài 36. *(Đề thi thử vào 10 THCS Nam Từ Liêm Hà Nội 2017-2018)*

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$

Chứng minh rằng : $\frac{xy}{x^2+y^2+xy} + \frac{yz}{y^2+z^2+yz} + \frac{xz}{x^2+z^2+xz} \le 1$

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \ge 3xy \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2+xy} \le \frac{1}{3}(1)$

Tương tự ta chứng minh được :

$\frac{yz}{y^2+z^2+yz} \le \frac{1}{3}(2)$ $\qquad$ $\frac{xz}{x^2+z^2+xz} \le \frac{1}{3}(3)$

Cộng vế- vế của (1),(2),(3) ta có: $\frac{xy}{x^2+y^2+xy} + \frac{yz}{y^2+z^2+yz} + \frac{xz}{x^2+z^2+xz} \le 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}+\dfrac{yz}{y^2+z^2+yz}+\dfrac{xz}{x^2+z^2+xz}\le 1$ (đpcm)

Bài 37. *(Đề thi thử vào 10 THCS Phan Đình Giót Hà Nội 2017-2018)*

Cho $a>0\,;b>0$ và $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+\dfrac{2020}{(a+b)^2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-ki: $x.a+y.b\le\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$

Chứng minh: $x.a+y.b\le\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}$

$\Leftrightarrow (x.a+y.b)^2\le x^2a^2+y^2b^2+x^2b^2+y^2a^2$

$\Leftrightarrow x^2b^2+y^2a^2-2x.a.y.b\ge 0$

$\Leftrightarrow (xb-ya)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

Áp dụng cho bài toán: $a+b\le\sqrt{(1^1+1^2).(a^2+b^2)}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (1)

Bất đẳng thức Cosi: $2\sqrt{ab}\le a+b$ (2)

Mà $a^2+b^2=a+b$, nên: $a+b\le\sqrt{2(a+b)}\Rightarrow a+b\le 2\Rightarrow a.b\le 1$

$$P=a^4+b^4+\frac{2020}{(a+b)^2}=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+\frac{2020}{(a+b)^2}\qquad \text{voi } a^2+b^2=a+b$$

$$=(a+b)^2+\frac{2020}{(a+b)^2}.\frac{4}{505}+\frac{501}{505}.\frac{2020}{(a+b)^2}-2a^2b^2$$

Ta có:

$$\left(a+b\right)^2+\frac{2020}{\left(a+b\right)^2}.\frac{4}{505}\ge 2\sqrt{\left(a+b\right)^2.\frac{2020}{\left(a+b\right)^2}.\frac{4}{505}}=8\ (\text{BĐT cosi})\quad (3)$$

$$a+b\le 2\Rightarrow \frac{501}{505}.\frac{2020}{\left(a+b\right)^2}\ge 501$$

$$a.b\le 1\Rightarrow -2a^2b^2\ge -2$$

$\Rightarrow P\ge 507$

$\Rightarrow P_{min}=507$ $\Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở (1), (2), (3) xảy ra và thỏa mãn giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^2+b^2=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$$

Bài 37. *(Đề thi thử vào 10 THCS Nghĩa Tân – Cầu Giấy 2018-2019)*

Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x+y\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2x^2+y^2+\dfrac{28}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Lời giải

$$P=2x^2+y^2+\frac{28}{x}+\frac{1}{y}$$

$$=2\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(\frac{1}{y}+y\right)+\left(x+y\right)-9$$

$$=2\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(\frac{28}{x}+7x\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(x+y\right)-9$$

Ta có $2\left(x-2\right)^2\ge 0;\ \left(y-1\right)^2\ge 0;\ \left(x+y\right)\ge 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương ta có

$$\frac{28}{x}+7x\ge 2\sqrt{28.7}=28;\ \ \frac{1}{y}+y\ge 2$$

Cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$P\ge 28+2+3-9=24$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x-2=0 \\ \dfrac{28}{x}=7x \\ y-1=0 \\ \dfrac{1}{y}=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài 38. *(Đề thi thử vào 10 THCS Ngô Sĩ Liên Hà Nội 2019-2020)*

Với các số thức không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+1}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+1}}$.

Lời giải

Nhận xét: Điểm rơi có thể là $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Áp dụng BĐT cosi, ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}}=2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{a}{a+1}}\le\frac{1}{4}+\frac{a}{a+1} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{b}{b+1}}=2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{b}{b+1}}\le\frac{1}{4}+\frac{b}{b+1} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c}{c+1}}=2\sqrt{\frac{1}{4}.\frac{c}{c+1}}\le\frac{1}{4}+\frac{c}{c+1} \qquad (3)$$

Do đó $P=\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+1}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+1}}\le\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\right)$

Với $a+b+c=1$, ta có: $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=\dfrac{a}{a+b+a+c}+\dfrac{b}{b+a+b+c}+\dfrac{c}{c+a+b+c}$

$$\frac{1}{a+b+c+a}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)\ (4)\Rightarrow\frac{a}{a+b+c+a}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}\right)$$

$$\frac{1}{a+b+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)\ (5)\Rightarrow\frac{b}{a+b+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$\frac{1}{c+a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right) \ (6) \Rightarrow \frac{c}{c+a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}\right)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu “=” ở (1), (2), (3), (4), (5), (6) đồng thời xảy ra và thỏa mãn giả thiết.

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy *P* đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$, khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

☙ HẾT ❧