

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. KHẢO SÁT HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

Khảo sát hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	+		+	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	-		-	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	+		+																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	-		-																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

b) Nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

c) Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Câu 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x+2}{2x+3}$.

Câu 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$.

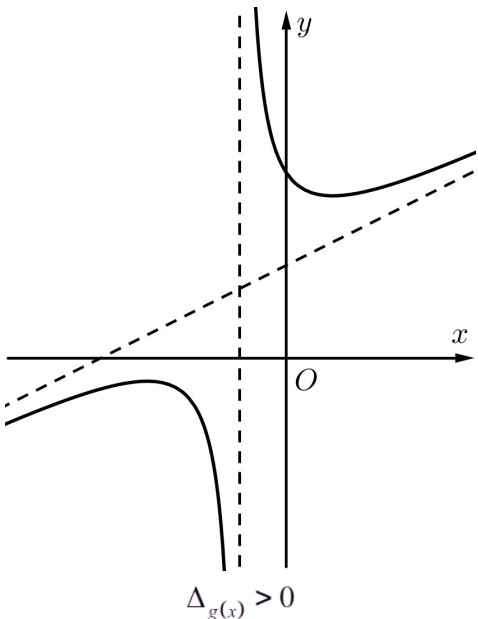
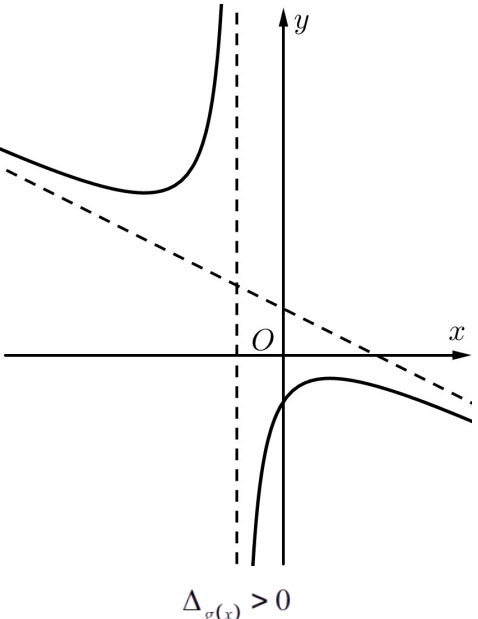
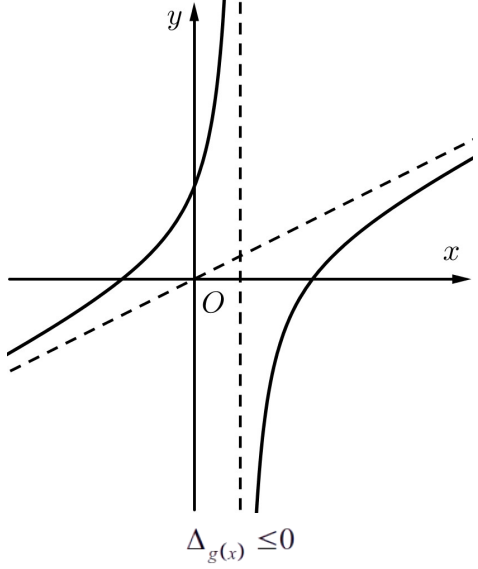
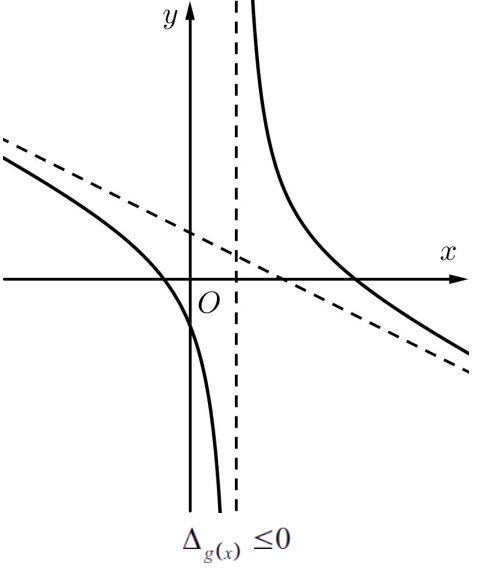
Khảo sát hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không

chia hết cho đa thức mẫu, tức là $-\frac{n}{m}$ không là nghiệm của tử)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$. Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{g(x)} > 0$	 $\Delta_{g(x)} > 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$

Bảng biến thiên

$am > 0$						$am < 0$						
x	$-\infty$	x_{CD}	$-\frac{n}{m}$	x_{CT}	$+\infty$	x	$-\infty$	x_{CT}	$-\frac{n}{m}$	x_{CD}	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+	-	0	+	+	0	-
y	y_{CD}			y_{CT}		y_{CT}			y_{CD}			
Hàm số có 2 cực trị						Hàm số có 2 cực trị						
x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$	$+\infty$			x	$-\infty$	$-\frac{n}{m}$	$+\infty$			
y'	+		+			y'	-		-			
y	$+\infty$		$+\infty$			y	$+\infty$		$+\infty$			
Hàm số không có cực trị						Hàm số không có cực trị						

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a \neq 0, m \neq 0)$$

Chú ý: Đồ thị hàm số (, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

$$x = -\frac{n}{m}$$

$$y = \frac{a}{m}x - \frac{an - bm}{m^2}$$

- a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng , tiệm cận xiên là đường thẳng .
- b) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng là tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, tâm đối xứng này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).
- c) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Câu 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Câu 7. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.

Câu 8. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

Câu 9. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

Câu 10. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.

Câu 11. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

DẠNG 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$, trong đó m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = 1$
2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
2. Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số:

$$y = \frac{2|x|}{|x|-1} \quad (C_1)$$

2. Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1; 2]$ của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0$

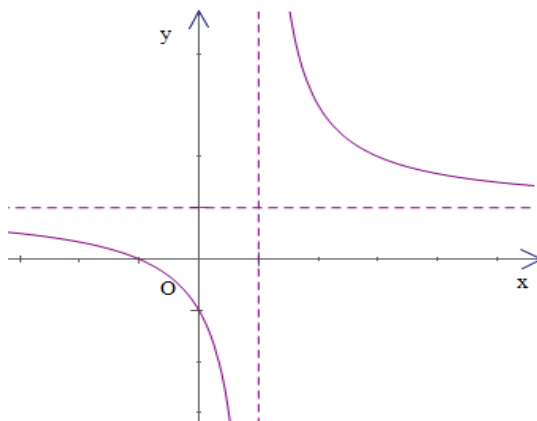
Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0; \frac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;
2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x|+1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 2|x| - 1}{|x|+1} = a$ theo các giá trị của tham số a .

Câu 18. (Sở Cần Thơ - 2021) Cho hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau:



Xác định dấu của a, b, c

Câu 19. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax - 6}{bx - c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

BỔ SUNG ngày 7-6-2024

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$
Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

Câu 21. Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
- (C) cắt trục Oy tại M . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M
- Chứng minh rằng không thể có hai tiếp tuyến của (C) vuông góc với nhau
- Tìm k để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$
- Tìm những điểm thuộc trục Oy để từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm ở về hai phía của trục Oy .

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x - 1}$

- Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu
- Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$

c) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C))

Câu 23. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$
b) Tìm những điểm trên trục tung sao cho qua đó kẻ được 2 tiếp tuyến của (C) tiếp xúc (C) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh khác nhau.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{-mx^2 + (4m-2)x + 1 - 4m}{x-1}$
a) Xác định tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x > 0$
b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $m = 1$
c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x - y = 0$
d) Dựa vào đồ thị (C) , biện luận theo a số nghiệm của phương trình: $-2x + 1 - \frac{2}{x-1} = a$

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C)
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$
c) Dựa vào đồ thị (C) , tìm m để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m|x+2|$ có 4 nghiệm phân biệt

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + m}{x-2}$ có đồ thị là đường cong (C_m)
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 3$
b) Tìm k để phương trình $x^2 - 3x + 3 = k|x-2|$ có đúng 3 nghiệm
c) Tìm m để (C_m) có hai điểm phân biệt A, B đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C_m)
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số khi $m = 1$
b) Tìm k để phương trình $x^2 + (1-k)x + k - 1 = 0$ không có nghiệm âm
c) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ có đồ thị là đường cong (C)
a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

- b)** Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 4 = 0$ và tiếp điểm có hoành độ âm.
- c)** Chứng minh rằng trên (C) không thể tồn tại hai điểm M, N để hai tiếp tuyến của (C) tại hai điểm này vuông góc với nhau.
- d)** Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) đều không đi qua gốc tọa độ O .

$$y = \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$$

Câu 29. Cho hàm số

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$

b) Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

$$y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$$

Câu 30. Cho hàm số có đồ thị (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_{-1}) của hàm số khi $m = -1$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C_{-1}) , biết tiếp tuyến này song song với đường thẳng $3x + 4y - 5 = 0$

c) Tìm m để (C_m) có cực đại và cực tiểu với hoành độ dương

d) Tìm m để (C_m) cắt Ox tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$

e) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4 + (m-1)x^2 + (1-m) = 0$