**CHƯƠNG**

**III**

**PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

**BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**LÝ THUYẾT.**

**I ===I**

**I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng**

|  |
| --- |
| Vectơ  là 1 *vectơ chỉ phương* của đường thẳng nếu giá của  vectơ  song song hoặc trùng với đường thẳng . |

**2. Phương trình tham số - Phương trình chính tắc của đường thẳng**

|  |
| --- |
| Đường thẳng đi qua  và có 1 vectơ chỉ phương  + *Phương trình tham số* của đường thẳng là:  (1)  + *Phương trình chính tắc* của đường thẳng là:  (2) |

**II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

Cho hai đường thẳng  và 

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương .

**1. Xét vị trí tương đối của và theo chương trình cơ bản:**



|  |
| --- |
| **Bước 1**: Kiểm tra tính cùng phương của  và .  **Bước 2:** Nhận xét:  + Nếu  và  *cùng phương* thì:  + Nếu  và  *không cùng phương* thì **hoặc**  cắt **hoặc**  và  chéo nhau.   * **TH1**:  **cắt**   *Điều kiện 1*: và không cùng phương .  *Điều kiện 2*: Giải hệ phương trình:  (\*) có nghiệm duy nhất .  **Kết luận:**  cắt  tại điểm .  *Lưu ý:* Giải hệ (\*) bằng cách: Từ (1) và (2) giải ra  và thay vào (3) (Nếu (3) thoả thì , ngược lại thì không).   * **TH2:**  và  **chéo nhau**   *Điều kiện 1*:  và  không cùng phương .  *Điều kiện 2*: Giải hệ phương trình: (\*) vô nghiệm.     * **TH3:**  **song song** với   *Điều kiện 1*:  và  cùng phương .  *Điều kiện 2*: Chọn điểm . Cần chỉ rõ .   * **TH4**:  và  **trùng nhau**     *Điều kiện 1:*  và  trùng nhau.  *Điều kiện 2:* Chọn điểm . *Cần* chỉ rõ .  **Đặc biệt:** |

**2.Xét vị trí tương đối của và theo chương trình nâng cao bằng sơ đồ sau:**



* Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương 
* Đường thẳng d’ có 1 vectơ chỉ phương 

Tính



Cắt nhau

Trùng nhau

Chéo nhau

Song song

**III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

|  |
| --- |
| Cho đường thẳng: và mp  Xé hệ phương trình:   * (\*) có nghiệm duy nhất ⇔ cắt  * (\*) có vô nghiệm ⇔ //  * (\*) vô số nghiệm ⇔ ⊂ |

**IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

|  |
| --- |
| * Khoảng cách từ điểm *M* đến một đường thẳng *d* qua điểm *Mo*có vectơ chỉ phương :  * Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia. * Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:   *d*  đi qua điểm *M* và có vectơ chỉ phương và *d’*  đi qua điểm *M’* và có vectơ chỉ phương là:   * Khoảng cách từ giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng hoặc khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng đến đường thẳng. |

**V. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

|  |
| --- |
| * Góc giữa hai đường thẳng (*d*) và (*d’*) có vectơ chỉ phương và là :     Đặc biệt:   * Góc giữa đường thẳng *d* có vectơ chỉ phương và mpcó vectơ pháp tuyến là: |

**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**II ===I**

**I. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| * Vectơ  là 1 *vectơ chỉ phương* của đường thẳng  nếu giá của vectơ  song song hoặc trùng với đường thẳng . * Nếu là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng thì  cũng là 1 vectơ chỉ phương của . * Gọi  là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng . Nếu có 2 vectơ  không cùng phương và  thì chọn 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng là  hoặc |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm ; các đường thẳng , ; các mặt phẳng , . Tìm một vectơ chỉ phương của các đường thẳng sau:  1) Đường thẳng .  2) Đường thẳng  đi qua  và song song với .  3) Đường thẳng .  4) Đường thẳng qua B và song song với.  5) Đường thẳng qua  và vuông góc với .  6) Đường thẳng qua, vuông góc với  và .  7) Đường thẳng qua  và vuông góc với .  8) Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng .  9) Đường thẳng  qua  vuông góc với và song song với mặt phẳng .  10)Đường thẳng  qua, cắt và vuông góc với trục . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng  và . Tìm  để giao tuyến của  1) vuông góc với mặt phẳng .  2) song song với mặt phẳng . |

**II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| ***Bước 1:*** Xác định  ***Bước 2:*** Xác định 1 vectơ chỉ phương  của đường thẳng .  ***Bước 3:*** Áp dụng công thức, ta có:   * Phương trình tham số của * Phương trình chính tắc của |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các đường thẳng  và . Viết phương trình:  1) tham số của đường thẳng . 2) chính tắc của đường thẳng . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm , , , ; đường thẳng thẳng ; mặt phẳng . Viết phương trình của đường thẳng  trong mỗi trường hợp sau:  1) Qua  và có 1 vectơ chỉ phương . 2) Qua 2 điểm .  3) Qua và song song với trục tung. 4) Qua  và song song với .  5) Qua  và vuông góc với . 6) Qua  và vuông góc với . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho các điểm , , , ; các đường thẳng thẳng , ; các mặt phẳng , . Viết phương trình của đường thẳng  trong mỗi trường hợp sau:  1) Qua  và vuông góc với các đường thẳng .  2) Qua *B* và vuông góc với đường thẳng và trục  3) Qua *O* và song song với 2 mặt phẳng .  4) Qua , song song với  và vuông góc với .  5)  là giao tuyến của hai mặt phẳng . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ  viết phương trình đường thẳng  đi qua  cắt và vuông góc với đường thẳng . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 5:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và d: và mặt phẳng (*P*): .Viết phương trình đường thẳng ∆ đi qua điểm *A*, song song với (P) và cắt đường thẳng d. |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 6:*** Trong không gian với hệ tọa độ viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mp(*P*), đồng thời cắt cả hai đường thẳng ,  với |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 7:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mp và mặt cầu  có phương trình như sau: .  1) Chứng minh:  cắt  theo một đường tròn có tâm .  2) Gọi  là tâm mặt cầu . Viết phương trình đường thẳng . |

**III. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG**

*Dùng 1 trong 2 cách như trong phần lý thuyết.*

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:  a) . b) |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ  xác định vị trí tương đối của cặp đường thẳng sau theo m với và |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng  và . Xác định để:  1)  vuông góc với . 2)  song song với . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng  và .  a) Chứng minh  và  cùng thuộc một mặt phẳng.  b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  và . |
| ***Ví dụ 5:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng:  và .  a) Chứng minh  và  chéo nhau.  b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  và song song với . | |
| ***Ví dụ 6:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 2 đường thẳng và .  a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng  chéo nhau.  b) Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua gốc tọa độ *O*, song song với và .  c) Viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng  và . | | |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 7:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho 4 đường thẳng:  .  a) CMR: Hai đường thẳng  cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Viết phương trình  mặt phẳng đó.  b) CMR: Tồn tại một đường thẳng  cắt cả 4 đường thẳng đã cho. Viết phương trình  chính tắc của đường thẳng . |
| ***Ví dụ 8:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và 2 đường thẳng ; . Chứng minh *A*,  và  cùng thuộc một mặt phẳng. |

**IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

***1. Phương pháp:***

|  |
| --- |
| Cho đường thẳng  và mặt phẳng .  Xét hệ phương trình (1)   * Nếu (1) vô nghiệm thì . * Nếu (1) có nghiệm duy nhất thì cắt  tại * Nếu (1) có vô số nghiệm thì .   *Chú ý: Nếu VTCP của cùng phương với VTPT của  thì .* |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ  và 3 đường thẳng ; ; và mặt phẳng .  Xét vị trí tương đối của:  a) và . b)  và . c)  và . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng :  và đường thẳng .  a) Xác định giao điểm *A* của đt  và mặt phẳng .  b) Viết phương trình đường thẳng  qua *A* nằm trong mp và vuông góc với . |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho mặt phẳng (*P*):  và 2 đường thẳng  a) Chứng minh:  và  chéo nhau.  b) Viết phương trình đường thẳng  nằm trên mp(*P*), đồng thời cắt  và . |

**V. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| Cho điểm  và đường thẳng .  **Cách 1:**  Gọi là hình chiếu của  lên . Ta c ó .  Tính ;  **Cách 2:**  Gọi  là hình chiếu của  lên .   * Viết phương trình mặt phẳng  qua  và vuông góc với * Khi đó tìm tọa độ điểm  thỏa |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và đường thẳng .  a)Tìm tọa độ điểm  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên đường thẳng .  b)Tìm tọa độ điểm  đối xứng với  qua đường thẳng . |

**VI. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| Cho điểm  và mặt phẳng .  Gọi  là hình chiếu của  lên .   * Viết phương trình đường thẳng  qua  và vuông góc với . * Khi đó tìm tọa độ điểm  thỏa . |

***2. Ví dụ:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ  cho điểm  và mặt phẳng .  a)Tìm tọa độ điểm  là hình chiếu vuông góc của điểm  lên mặt phẳng .  b)Tìm tọa độ điểm  đối xứng với  qua mặt phẳng . | | |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ  mặt phẳng  và mặt cầu  .  a) Chứng minh mặt phẳng  cắt mặt cầu  theo một đường tròn .  b) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn . |
| ***Ví dụ 3:*** Trong không gian với hệ tọa độ  mặt phẳng  và mặt cầu  .  a) Chứng minh mặt phẳng  tiếp xúc với mặt cầu  b) Tìm tọa độ tiếp điểm của mặt phẳng  và mặt cầu . |
| ***Ví dụ 4:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết các phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng  trên mỗi mặt phẳng sau: mp(*Oxy*), mp(*Oyz*), mp(*Oxz*) và . | |

**VII. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG** **THẲNG CHÉO NHAU**

***1. Kiến thức vận dụng***

|  |
| --- |
| ***⦁ Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:***  Cho điểm  và đường thẳng   đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .  Ta có:  ***⦁ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:***  Cho 2 đường thẳng chéo nhau .   * đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .  * đi qua điểm  và có 1 vectơ chỉ phương .   Ta có:  *Đặc biệt: Nếu  thì; .* |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm hai đường thẳng:  và  a) Chứng minh 2 đường thẳng  và  chéo nhau.  b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  và .  c) Tính khoảng cách từ điểm  đến đường thẳng . |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt cầu  có phương trình ;  và .  a) Chứng minh đường thẳng  tiếp xúc với mặt cầu  tại tiếp điểm . Tìm tọa độ điểm .  b) Chứng minh đường thẳng  cắt mặt cầu  tại 2 điểm phân biệt . Tính độ dài đoạn AB và tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng . |

**VIII. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG**

***1. Kiến thức vận dụng***

|  |
| --- |
| ***⦁ Góc giữa hai đường thẳng:***  Cho 2 đường thẳng  có các vectơ chỉ phương lần lượt  là ,.  Ta có: ,  ***⦁ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng***  Cho đường thẳng có 1 vectơ chỉ phương .  Mặt phẳng  có 1 vectơ pháp tuyến  Ta có: ,. |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt phẳng  có phương trình ; và  a) Tính góc giữa hai đường thẳng , .  b) Tính góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng . |

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, hai đường thẳng ,  và mặt phẳng  có phương trình ; . Viết phương trình đường thẳng  đi qua điểm , vuông góc với đường thẳng  và tạo với đường thẳng  một góc . |

**IX. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG**

***1. Phương pháp***

|  |
| --- |
| * Điểm  nằm trên đường thẳng  thì . * Từ điều kiện ta tìm được |

***2. Ví dụ:***

|  |
| --- |
| ***Ví dụ 1:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, Cho điểm , đường thẳng , và mặt phẳng .  a) Tìm tọa độ điểm  thộc đường thẳng  sao cho .  b) Tìm tọa độ điểm  thộc đường thẳng  sao cho |
| ***Ví dụ 2:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho 3 điểm  .  a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm .  b) Tìm tọa độ điểm  thộc mặt phẳng  sao cho . | |

**HỆ THỐNG MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

**Bài toán 1:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 2:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Mặt phẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là .  \* Đặc biệt: Khi  + Mặt phẳng  đi qua A  + Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là . |  |

**Bài toán 3:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua điểm *A* và , , * không song, không trùng với *

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua A  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 4:** Lập phương trình đường thẳng  là giao tuyến của 2 mặt phẳng (*P*) và (*Q*).

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua *A* (*giải hệ 2 phương trình mp(P) và (Q) với* )  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 5:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua *A* và  * không song song, không trùng với *

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua ***A.***  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là . |  |

**Bài toán 6:** Lập phương trình đường thẳng  đi qua *A* và .

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Đường thẳng  đi qua ***A.***  + Ta có:  Đường thẳng  có 1 vectơ chỉ phương là |  |

**Bài toán 7:** Lập phương trình đường thẳng  là hình chiếu vuông góc của  trên mp.

|  |  |
| --- | --- |
| *Phương pháp:*  + Xác định *A’* là hình chiếu của *A* trên .  + Xác định *B’* là hình chiếu của *B* trên .  + Đường thẳng |  |