

TOÁN 7 – HỌC KÌ II

PHẦN I – ĐẠI SỐ

A – BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Giá trị của biểu thức đại số

Bài 1. Tính giá trị mỗi biểu thức sau

a) $A = x^2 + 4xy - 3y^2$ tại $|x| = 5, y = 1$

b) $B = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$ tại $b_1) x = -1$ $b_2) |x| = 3$

c) $C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$ biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

d) $D = \frac{4x - 9}{3x + y} - \frac{4y + 9}{3y + x}$ biết $x - y = 9; x \neq -3y, y \neq -3x$

Bài 2. Tính giá trị của các đa thức sau biết: $x + y = 0$

$$A = 2x + 2y + 3xy(x + y) + 5(x^3y^2 + x^2y^3) + 2$$

$$B = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 5$$

Dạng 2. Các phép toán về đơn thức, đa thức.

Bài 3. Thu gọn các đơn thức sau:

a) $5x(-2xy^2)(3xyz^3)$

c) $(-2x^2yz^3).(-3x^2y^2z)^3$

b) $-0,5ab(-1\frac{1}{5}a^2bc).5c^2b^2$

d) $\frac{-2}{3}abx^5y^3(-bxy).4y^2$

Bài 4. Cho các đa thức

$$A = x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1$$

$$B = -2x^2 + xy + 2y^3 - 3 - 5x + 2y$$

$$C = 7y^2 + 3x^2 - 4xy - 6x + 4y + 5$$

Tính $A + B + C$; $A - B + C$; $2A - B - 3C$

Bài 5. Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$

- a) Thu gọn A b) Tìm x để A = 2

Bài 6. Cho các đa thức $f(x) = 3x^2 - 7 + 5x - 6x^2 - 4x^3 + 8 - 5x^5 - x^3$

$$g(x) = -x^4 + 2x - 1 + 2x^4 + 3x^3 + 2 - x$$

- Thu gọn các đa thức trên rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến
- Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của mỗi đa thức.
- Tính $f(x) + g(x)$; $2f(x) - g(x)$.

Bài 7. Cho các đa thức $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 7x - 4$; $g(x) = -4x^2 + 3x - 3x^3 + 9$

- Tìm đa thức $h(x) = f(x) + g(x)$
- Tính $h(0)$; $h(-2)$
- Tìm GTNN của $h(x)$.

Bài 8. Cho đa thức $f(x) = x^4 - 3(x - 1) + x^3 - 2x + x^2 - 1 - 2x^4$

$$g(x) = -3x^2 + 2x(x+3) + 3x^4 - x(3x^2 + 5) - 2$$

- a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến. Xác định hệ số cao nhất, hệ số tự do và tìm bậc của mỗi đa thức.
- b) Tính $h(x) = 3f(x) + g(x)$; $k(x) = f(x) - g(x)$
- c) Tính giá trị nhỏ nhất của $\frac{h(x)}{2}$

Bài 9. Cho hai đa thức $f(x) = 3x(x^2 + 2x) + x - 2x^2 - 7$

$$g(x) = 3x^3 - (2x^2 - 5x) + 7x^2 + 3$$

- Thu gọn và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của đa thức $f(x)$, $g(x)$ và tìm bậc của chúng.
- Tính $M(x) = 2f(x) + g(x)$; $N(x) = g(x) - f(x)$
- Tính giá trị của $M(x)$ biết $x^2 - 3x = 0$
- Tính giá trị nhỏ nhất của $N(x)$.

Dạng 3. Nghiệm của đa thức

Bài 13. Xác định các hệ số a để các đa thức sau nhận $x = 1$ làm một nghiệm

- a) $x^2 - 8x + a$ b) $x^2 + ax - 5$ c) $ax^3 - x - 1$ d) $7x^2 + ax - 1$

Bài 14. Xác định các hệ số a, b của đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $f(0) = 4$ và nhận $x = 1$ làm một nghiệm của nó.
b) Các nghiệm của đa thức $g(x) = (x+1)(x-2)$ cũng là các nghiệm của $f(x)$

Bài 15. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

- a) $2x^2 + 2x$ e) $\frac{1}{2}(x+3) - \frac{3}{4}(2x-4)$
b) $2x + \frac{1}{3}$ f) $x^4 + x^2 + 2014$
c) $x^3 + 2x$ g) $x^2 - 16$
d) $2x^3 + 8x$ h) $3x(2x-1) - 2(1-2x)$

B – BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 2. Cho $A = \frac{12x-2}{4x+1}$

- a) Tìm giá trị thích hợp của biến x trong A .
b) Tính giá trị của A khi $x^2 + 2x = 0$
c) Tìm giá trị của x để $A = 1$.
d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.
e) Tìm x để $A < 0$; $A > 0$.

Bài 3. Cho biểu thức $M = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

- a) Với giá trị nào của x thì biểu thức trên được xác định?
b) Rút gọn M
c) Tính giá trị của M tại $x = 3$
d) Tìm x khi $M = 4$
e) Tìm x nguyên để M có giá trị nguyên.

Bài 4. Cho hai đa thức $M = 6x^2 + 3xy - 2y^2$; $N = 3y^2 - 2x^2 - 3xy$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị nào của x và y để hai đa thức cùng giá trị âm.

Bài 5. Cho đa thức $G(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các hệ số)

- a) Hãy tính $G(-1)$, biết $a + b = b - 8$
- b) Tính a, b, c biết $G(0) = 4, G(1) = 9, G(2) = 14$.

Bài 6. Tính tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ sau khi đã thu gọn với:

$$f(x) = (1999x^2 - 2000x + 2)^{2011} \cdot (2002x^3 - 20003x^2 + 2005x - 2005)^{2008}$$

Bài 7. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết rằng $f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh:

- a) $a + b + c, c, 2a, 2b$ đều là các số nguyên.
- b) $f(n)$ là số nguyên với mọi giá trị nguyên của n .

Bài 8. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm nếu:

- a) $xf(x - 2) = (x - 4)f(x)$ với mọi x .
- b) $(x - 3)f(x) = (2x - 1)f(x - 2)$ với mọi x .

Bài 9. Tính giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau:

a) $A = \frac{5x - 19}{x - 4} (x \in \mathbb{Z})$

c) $C = x^2 + y^2$ với $x + y = 1$

b) $B = |x - 1| + |x - 3|$

d) $D = 3 - xy$ nếu $x + y = 1$

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất của mỗi biểu thức sau:

a) $A = 9 - 2|x - 3|$

e) $E = (2 - x)(x - 1)$

b) $B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$

f) $F = xy$ biết $x + y = 1$

c) $C = \frac{2}{6 - x} (x \in \mathbb{Z})$

g) $G = 3xy$ biết $x + 2y = 1$

d) $D = \frac{5x - 19}{x - 4} (x \in \mathbb{Z})$

h) $H = |x - 1| - |x - 3|$

PHẦN II - HÌNH HỌC

A – BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Cho tam giác cân ABC, $\angle BAC = 120^\circ$, phân giác AD. Từ B kẻ đường thẳng song song với AD cắt tia CA ở E.

- Chứng minh tam giác ABE là tam giác đều.
- So sánh các cạnh của tam giác BEC

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông ở A, phân giác BD. Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$). Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = CE$. Chứng minh rằng:

- BD là đường trung trực của AE.
- $AD < DC$
- Ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A ($\angle A \neq 120^\circ$). Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi O là điểm giao của BE và CD. Chứng minh rằng:

- $BE = CD$
- $OB = OC$
- D và E cách đều đường thẳng BC

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông ở C có $\angle A = 60^\circ$. Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại E. Kẻ $EK \perp AB$ ($K \in AB$), Kẻ $BD \perp AE$ ($D \in AE$). Chứng minh:

- AE là trung trực của đoạn thẳng CK
- $KA = KB$
- $EB > AC$
- 3 đường thẳng AC, BD, KE đồng quy.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Qua A kẻ $xy \parallel BC$, xy cắt tia phân giác của góc B và C lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- Ax là tia phân giác ngoài của $\triangle ABC$ tại A.
- A là trung điểm của DE.
- $\triangle CED$ vuông
- Ba đường thẳng BD, CE, FA đồng quy (biết EB và DC cắt nhau tại F)

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, phân giác CD. Gọi H là hình chiếu của điểm B trên đường thẳng CD. Trên CD lấy điểm E sao cho H là trung điểm của DE. Gọi F là giao điểm của BH và CA. Chứng minh rằng:

- $\angle EBF = \angle ADC, \angle EBH = \angle ACD$
- BE vuông góc với BC
- $DF \parallel BE$

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ cân, $\angle A = 120^\circ$, phân giác AD. Kẻ $DE \perp AB, DF \perp AC$. Trên các đoạn EB và FC lấy 2 điểm I và K sao cho $EI = FK$

- Chứng minh $\triangle DEF$ đều
- Chứng minh $\triangle DIK$ là tam giác cân.
- Từ C kẻ đường thẳng song song với AD cắt tia BA tại M. Chứng minh $\triangle MAC$ là tam giác đều.
- Tính AD biết $CM = a$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 30^\circ$. Trên đường cao BD lấy điểm K sao cho $BK = AB$

- Chứng minh tam giác ABK đều
- Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Tính số đo các góc của tam giác ABH.
- Chứng minh $CH = 2CD$.

B – BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Chứng minh rằng trong một tam giác tổng độ dài 3 đường trung tuyến lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Vẽ ra ngoài tam giác đó các tam giác ABM và CAN vuông cân ở A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của MB, BC, CN. Chứng minh:

- $BN = CM$
- $BN \perp CM$
- $\triangle DEF$ là tam giác vuông cân.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Gọi O là giao điểm của các đường phân giác của tam giác đó. Từ O kẻ OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Trên tia đối của tia AC, BA, CB lấy theo thứ tự 3 điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $AA_1 = BC; BB_1 = AC; CC_1 = AB$. Chứng minh:

- $AE = AF; BD = BF; CD = CE$
- $EA_1 = FB_1 = DC_1$
- O là giao điểm của các đường trung trực của tam giác $A_1B_1C_1$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Gọi D là điểm nằm giữa A và B, E là điểm nằm giữa A và C và $BD = CE$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, DE, BE.

- Chứng minh $\triangle MIN$ cân

- b) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AB ở P, cắt đường thẳng AC ở Q. Chứng minh tam giác APQ cân
- c) Kẻ phân giác AF của tam giác ABC. Chứng minh $MN \parallel AF$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Từ trung điểm D của cạnh BC kẻ một đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc A, đường thẳng đó cắt tia AB và AC theo thứ tự ở M và N.

- a) Chứng minh $\triangle AMN$ cân
- b) Chứng minh $BM = CN$
- c) Cho $AB = c$, $AC = b$. Tính AM, BM theo b và c.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác của góc ngoài tại B và C cắt nhau ở E. Gọi G, H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến các đường thẳng BC, AB, AC.

- a) Có nhận xét gì về các độ dài EH, EG, EK.
- b) Chứng minh AE là tia phân giác của góc BAC
- c) Đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC cắt các đường thẳng BE, CE theo thứ tự tại D và F. Chứng minh EA vuông góc DF
- d) Chứng minh điểm cách đều các cạnh của tam giác ABC cũng chính là trực tâm của tam giác DEF.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A, $\angle A = 100^\circ$. M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle MBC = 10^\circ$, $\angle MCB = 20^\circ$. Trên tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB$.

- a) Chứng minh $\triangle MCB = \triangle MCE$
- b) Chứng minh tam giác EMB là tam giác đều.
- c) Tính góc AMB.