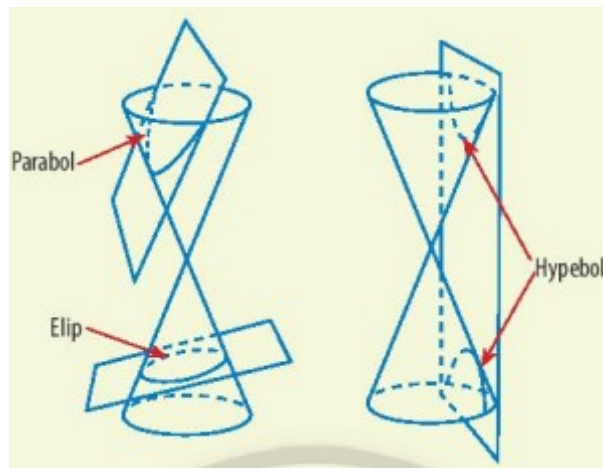


Bài 4. Tính chất chung của ba đường conic

Từ khóa: Đường conic; Tiêu điểm; Đường chuẩn; Tâm sai.

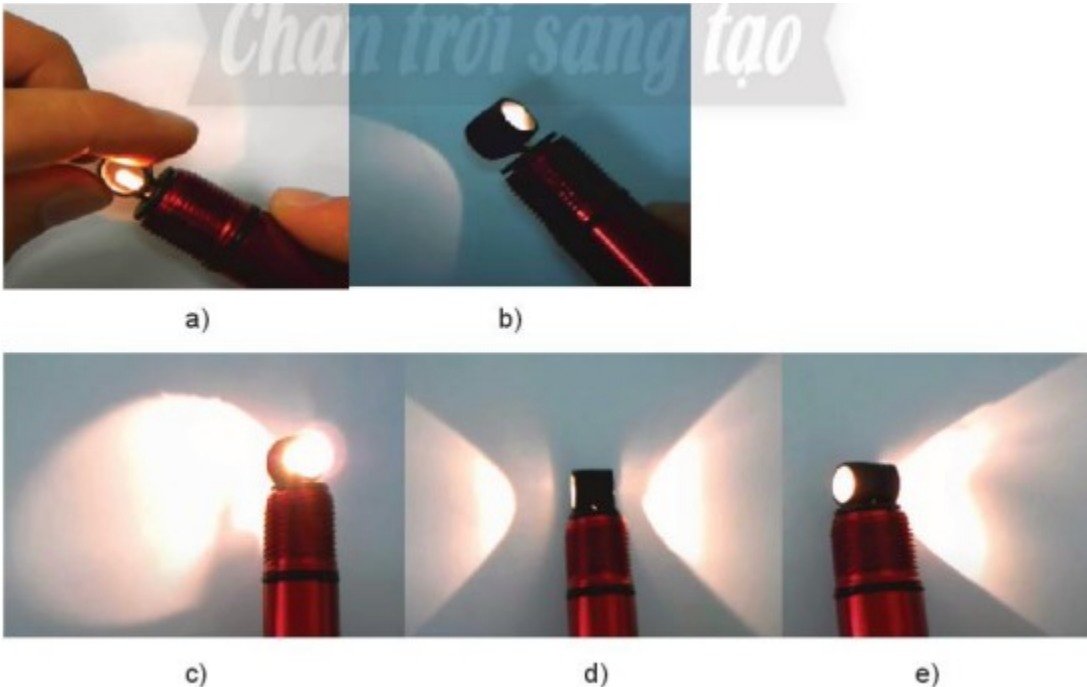


Tại sao người ta gọi elip, hypebol, parabol là ba đường conic?

1. Giao của mặt phẳng với mặt nón tròn xoay



Gắn một đoạn ống nhựa vào đầu bóng của một đèn chiếu nhỏ để tạo ra một chùm ánh sáng hình mặt nón tròn xoay (Hình 1a, b). Chiếu đèn lên một bức tường với các góc nghiêng khác nhau để ánh sáng từ đèn hắt lên bức tường tạo thành các bóng khác nhau (Hình 1c, d, e). Nhận xét hình ảnh bạn thấy trên bức tường.



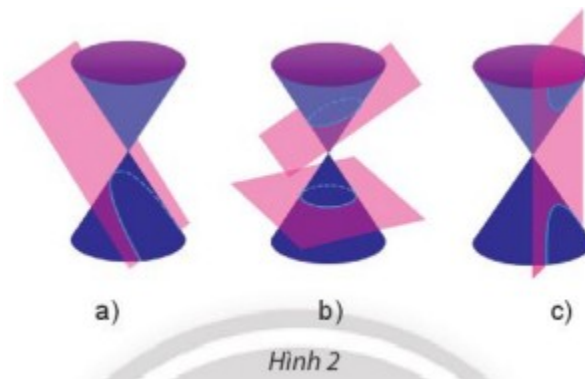
Hình 1

Người ta chứng minh được có thể tạo ra các đường tròn, elip, hypebol, parabol bằng cách cho mặt phẳng cắt mặt nón tròn xoay.

Giao của một mặt phẳng với một mặt nón tròn xoay (mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón) có thể là đường tròn, đường elip, đường hypebol hay đường parabol.

Ví dụ 1

Trong Hình 2a, giao của mặt phẳng và mặt tròn là một đường parabol.



Giao của mặt phẳng và mặt nón trong Hình 2b, c có dạng đường gì?



Khi máy bay bay song song với mặt đất với vận tốc lớn hơn vận tốc của âm thanh sẽ tạo ra các lớp không khí dao động có hình mặt nón (nón Mach) (Hình 3) và tạo ra tiếng nổ mạnh, gọi là tiếng nổ siêu thanh. Những người trên mặt đất nếu nghe thấy tiếng nổ này cùng một thời điểm thì vị trí của họ cùng thuộc một đường hypebol. Hãy giải thích điều này.

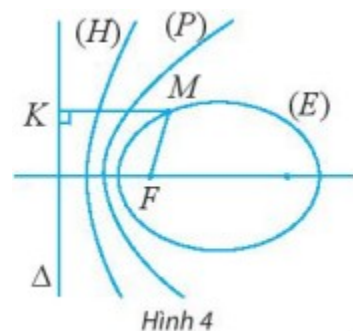


Hình 3

2. Xác định đường conic theo tâm sai, tiêu điểm và đường chuẩn



Cho đường conic có tiêu điểm F , đường chuẩn Δ và một điểm M là điểm nằm trên đường conic đó. Tìm mối quan hệ giữa tỉ số $\frac{MF}{d(M, \Delta)}$ và tên gọi của đường conic.



Định nghĩa chung của các đường conic

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F . Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M, \Delta)}$ bằng một hằng số dương e cho trước, được gọi là **đường conic**. Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là **đường chuẩn** và e gọi là **tâm sai** của đường conic.

Từ định nghĩa trên, kết hợp với tính chất của elip, parabol và hypebol, ta có:

Elip là đường conic có tâm sai $e < 1$;

Parabol là đường conic có tâm sai $e = 1$;

Hypebol là đường conic có tâm sai $e > 1$.

Ví dụ 2

Xác định tâm sai, tọa độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $y^2 = 14x$; b) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$; c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Giải

a) Conic (P): $y^2 = 14x$ là một parabol. Ta có $2p = 14$, $p = 7$.

Suy ra (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{7}{2}; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{7}{2}$ và tâm sai $e = 1$.

b) Conic (E): $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$ là một elip.

Ta có: $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a}{e} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{5}$.

Suy ra (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, đường chuẩn $\Delta_1: x = -2\sqrt{5}$ và tâm sai $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Conic (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ là một hypebol.

Ta có $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4} = 2$, $e = \frac{c}{a} = 2$, $\frac{a}{e} = \frac{2}{2} = 1$.

Suy ra (H) có tiêu điểm $F_2(4; 0)$, đường chuẩn $\Delta_2: x = 1$ và tâm sai $e = 2$.

Ví dụ 3

Cho đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Gọi tên và lập phương trình của các đường (L) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $\frac{MO}{d(M, \Delta)} = e$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $e = \frac{1}{2}$; b) $e = 2$; c) $e = 1$.

Giải

Ta có $MO = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $d(M, \Delta) = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$.

a) (L) có $e = \frac{1}{2} < 1$, do đó (L) là một đường elip.

Ta có $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2MO = d(M, \Delta)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 8(x^2 + y^2) = (x + y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 7y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0.$$

Vậy elip (L) có phương trình $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$.

b) (L) có $e = 2 > 1$, do đó (L) là một hypebol.

Ta có $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, \Delta)} = 2 \Leftrightarrow MO = 2d(M, \Delta)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0.$$

Vậy hypebol (L) có phương trình $x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 4y + 2 = 0$.

c) (L) có $e = 1$, do đó (L) là một parabol.

$$\text{Ta có } M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M, \Delta)} = 1 \Leftrightarrow MO = d(M, \Delta)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0.$$

Vậy parabol (L) có phương trình $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$.



Xác định tâm sai, tọa độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

$$\text{a) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1; \quad \text{b) } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad \text{c) } y^2 = \frac{1}{2}x.$$



Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	Tâm sai
Trái Đất	0,0167
Sao chổi Halley	0,9671
Sao chổi Great Southern of 1887	1,0
Vật thể Oumuamua	1,2



Hình 5. Vật thể Oumuamua

Nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/oumuamud>

BÀI TẬP

1. Xác định tâm sai, tọa độ một tiêu điểm và phương trình đường chuẩn tương ứng của mỗi đường conic sau:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$; b) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$; c) $y^2 = x$.

2. Viết phương trình của conic có tâm sai $e = 1$, tiêu điểm $F(1; 0)$ và đường chuẩn $\Delta: x + 1 = 0$.

3. Viết phương trình của conic (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tiêu điểm $F(8; 0)$, đường chuẩn $\Delta: x - 2 = 0$ và tâm sai $e = 2$;

b) (C) có tiêu điểm $F(-4; 0)$, đường chuẩn $\Delta: x + \frac{25}{4} = 0$ và tâm sai $e = \frac{4}{5}$.

4. Quỹ đạo của các vật thể sau đây là những đường conic. Những đường này là elip, parabol hay hypebol?

Tên	Tâm sai
Sao Hỏa	0,0934
Mặt Trăng	0,0549
Sao Thủy	0,2056
Sao chổi Ikeya-Seki	0,9999
C/2019 Q4	3,5

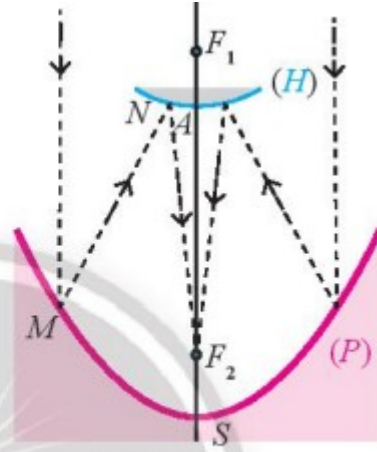


Hình 6. Sao chổi Ikeya-Seki nhìn từ Trái Đất

Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>



Hình 2



Hình 3

7. Mặt cắt của một chảo ăng-ten là một phần của parabol (P). Cho biết đầu thu tín hiệu đặt tại tiêu điểm F cách đỉnh O của chảo một khoảng là $\frac{1}{6}$ m.

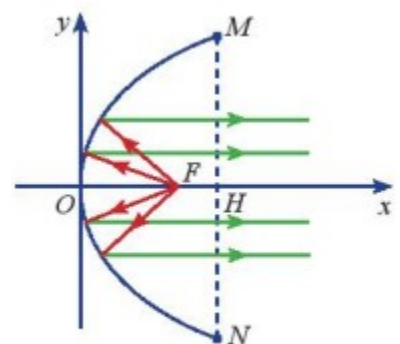
- Viết phương trình chính tắc của (P).
- Tính khoảng cách từ một điểm $M(0,06; 0,2)$ trên ăng-ten đến F .



Hình 4

8. Gương phản chiếu của một đèn chiếu có mặt cắt hình parabol (Hình 5). Chiều rộng giữa hai mép vành của gương là $MN = 32$ cm và chiều sâu của gương là $OH = 24$ cm.

- Viết phương trình chính tắc của parabol đó.
- Biết bóng đèn đặt tại tiêu điểm F của gương. Tính khoảng cách từ bóng đèn tới đỉnh O của gương.



Hình 5